

# THE SYMMETRY AS INTERDISCIPLINARY FACTOR THROUGH ITS APPLICATION AND HISTORY

*Helena Melo, PhD*

CMATI & Department of Mathematics, University of Azores, Portugal

---

## Abstract

The symmetry is used by human race in his achievements since the most primitive times. The human being following the permanent evolution of life could not fail to put the symmetry in his works, once his own outward appearance of almost every being symmetric. In the archaeological remains and even in her earliest art manifestations we checked this fact. All over the world and for all the historical, the symmetry is an inseparable companion of human creation and everything that surrounds him.

---

**Keywords:** Symmetry, symmetry groups, interdisciplinary

## Introdução

A simetria é usada pelo homem nas suas realizações desde os tempos mais primitivos e, seguindo a cadeia de evolução permanente da vida, o ser humano não poderia deixar de colocar essa simetria nas suas obras, uma vez que o próprio formato exterior de quase todos os seres vivos é simétrico. Nos vestígios arqueológicos das suas ferramentas e até mesmo nas suas mais antigas manifestações de arte, evidenciamos esse facto.

Através das épocas notamos a interdisciplinaridade que o tema “simetria” promove. Há simetrias coligadas às artes, à geologia, à química, à física, à biologia, à música, à literatura, à arquitetura, evidentemente à matemática, e a muitas outras áreas do conhecimento.

Pelo desenrolar de várias épocas, desde os tempos mais remotos, evidenciamos e destacamos a aplicabilidade e existência de simetrias, quer por criação, quer por observação, bem como a classificação que lhe é atribuída de acordo com as suas características gerais, os denominados grupos de simetria.

## Desenvolvimento

A palavra simetria tem as suas raízes na filosofia e estética grega, onde era usada para expressar equilíbrio, proporção e também era sinónimo de harmonia. O termo simetria deriva da palavra grega *συμμετρία* (sin (com) e métron (medida)) e foi por muitas vezes traduzida como “comensurável” ou “proporção”, embora não haja, entre elas, uma correspondência de significado.

O termo simetria só entra no vocabulário das ciências no ano de 1830, com o começo do estudo da classe dos cristais, em que a sua análise se baseou na teoria dos grupos, introduzida pelo matemático francês Evariste Galois (1831-1832) num trabalho publicado em 1848.

Com o desenvolvimento das ciências naturais, tais como a cristalografia, a química, a física, entre outras, as estruturas simétricas tornaram-se uma importante área de estudo na geometria. Mas, não só nestes campos observamos a existência de simetria.

O primeiro estudo de simetria, realizado e registado historicamente, talvez tenha sido o existente no livro “I Ching” (livro das mutações), considerado o mais antigo da China.

Provavelmente foi escrito na dinastia Chu (1122 – 256 a.C.). Esse livro é uma espécie de oráculo que visa conhecer o futuro e passado através dos seus 64 hexagramas – trigramas duplicados. Os hexagramas, compostos pela super posição de 6 linhas (*hsian*), são denominados *yang* quando as linhas são contínuas, e de *yin*, quando essas são interrompidas. Os hexagramas são notáveis pela distribuição de simetrias. O matemático alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), autor do sistema binário de numeração, reconheceu nos hexagramas o seu sistema.

A simetria teve, ao longo dos tempos, várias definições e conceitos.

O escultor grego Fídias (c. 492-432 a.C.) define a simetria como “a devida disposição, o equilíbrio e a correspondência adequada das “formas parciais” em qualquer totalidade formal”. Pela mesma altura, o historiador grego Heródoto (480-425 a.C.) fala da distribuição simétrica dos rios sobre a face da Terra, mostrando, assim, possuir conhecimentos de geologia, física e simetria. Também o filósofo, matemático e astrônomo grego Eudoxo de Cnido (c. 400-347 a.C.) formula a doutrina das esferas homocêntricas que suponha uma terra fixa e imóvel, e escreve uma “teoria das proporções”.

Desde o séc. VI a.C., sob a orientação do filósofo e matemático grego Pitágoras de Samos (569-475 a.C.), um grupo de matemáticos gregos, os pitagóricos, estuda pela primeira vez os poliedros regulares. O filósofo grego Platão (427-347 a.C.) também faz referências à simetria. Platão estuda os cinco sólidos regulares, designados posteriormente de sólidos platônicos, e associa cada um com um dos quatro elementos: terra, ar, fogo e água., chegando mesmo a afirmar que os átomos dos quatro elementos da ciência antiga tinham a forma destes poliedros. Pensava-se naquela altura, que os átomos da terra tinham a forma de cubos, os do ar a forma de octaedros, os do fogo, de tetraedros, os da água, de icosaedros e os do cosmos, de dodecaedros.

O arquiteto romano Marcus Lucius Vitruvius Pollio (c. 70-25 a. C.), por volta de 80 a.C., afirma que a proporção seria “a coordenação métrica, em toda obra, entre um módulo e o todo”, e define a simetria numa forma bem mais generalizada, como “a harmonia apropriada que resulta dos membros da própria obra e a correspondência modular que resulta das partes separadas em relação à aparência de todo o corpo”.

O médico grego Cláudio Galeno (130-200) refere que “a beleza consta da simetria das partes, na proporção de um dedo em relação a outro, de todos os dedos em relação à mão ..., em conclusão, de todas as partes em relação às demais”. Anos mais tarde, o filósofo neoplatónico romano Plotino (205-270) menciona que “praticamente toda gente afirma que a beleza visual é produzida pela simetria das partes em relação uma às outras e em relação ao todo”.

Na “idade das trevas”, um período da história compreendido entre os anos 400 e 800 que dá ênfase aos estragos culturais e económicos que ocorreram na Europa em consequência do declínio do Império Romano, a simetria, devido a uma minimização das ideias, transformou-se na limitada noção de reflexão sobre um eixo ou plano, e o latim da linguagem arquitetónica que traduz a palavra grega como “proporção”, aumentou ainda mais a confusão. Por conseguinte, um prédio ou uma pintura podem ter proporções ideais e não serem, no entanto, simétricos.

A noção de simetria torna-se novamente ativa na Renascença. Inicialmente, o pintor florentino Cennino d'Andrea Cennini (1370-1440), um marco de uma transição entre os conceitos dos tempos medievais e do renascimento na arte, fala muito vagamente da simetria. Alguns anos depois, o retorno da simetria começa realmente com um génio de muitas habilidades: pintor, escultor, engenheiro, matemático, músico, geólogo, anatómico, cartógrafo, botânico, escritor e inventor, o italiano Leonardo da Vinci (1452-1519). Leonardo costumava determinar, de maneira sistemática, todas as simetrias possíveis dos edifícios e

monumentos com vista a projetar de maneira harmoniosa possíveis extensões e acrescentos, sem destruir a simetria da parte central.

Leonardo da Vinci, na sua época, estuda alguns grupos de simetria cíclica (rotativas), para além de fazer numerosos esquemas de objetos simétricos, como, por exemplo, o rolamento de esferas.

Albrecht Dürer (1471-1528), de origem alemã, inicia os seus estudos em pintura em 1486, contemporâneo de Leonardo, também é despertado para a matemática e a arquitetura, começando por ler “*Os Elementos*” de Euclides e o tratado “*De architectura*” de Vitruvius. Dürer publica, no ano da sua morte, um tratado que contém alguns aspetos sobre simetria.

No ano de 1595, o astrónomo e matemático alemão Johannes Kepler (1571-1630) escreve o *Prodromus mysterium cosmographicum*. Kepler reduz as distâncias do sistema planetário a corpos regulares inscritos e circunscritos em esferas e encontra outros sólidos quase regulares, para além do 13 sólidos descobertos por Arquimedes, anotando as suas simetrias.

A simetria começa a ressurgir com toda a sua adaptabilidade, tornando-se subentendida na noção de desenho a partir do Renascimento.

Tal como as primeiras manifestações de simetria, a história da arte ornamental começa por volta de dez milhões de anos antes de Cristo, em meados e finais do período Paleolítico, quando temos os primeiros exemplos de rosáceas, todos os 7 tipos de frisos, exemplos de ornamentos derivados da sobreposição dos frisos e todas as 5 redes planas de Bravais: a quadrada, a retangular simples, a retangular centrada, a oblíqua e a hexagonal. Auguste Bravais (1811-1863) foi um físico francês conhecido pelos seus trabalhos em cristalografia. Da arte ornamental do período Neolítico, temos exemplos de todos os 17 tipos de pavimentos que são conhecidos nos dias de hoje.

Apesar de termos vestígios destes conceitos desde os tempos pré-históricos, a teoria das simetrias e a arte ornamental tem as suas raízes na antiga Grécia.

A essência da teoria das simetrias, baseada na teoria dos grupos, é expressada em “Erlangem Program”, um trabalho do matemático alemão Félix Klein (1849-1925), datado de 1872, no qual caracteriza a teoria das simetrias como um universo aproximado para diferentes geometrias através dos seus grupos de transformações e das invariâncias desses grupos. O desenvolvimento da teoria das simetrias não pode ser separado da cristalografia e da teoria dos grupos.

Vários outros matemáticos desenvolveram estudos sobre cristalografia, uns com base na geometria, outros com base nas ciências sociais, salientando-se nos finais do século XIX, por exemplos, o cristalógrafo russo E. S. Federov (1853-1919), o matemático alemão Arthur Moritz Schoenflies (1853-1928), o físico inglês William Barlow (1812-1902), aluno de Klein, entre muitos outros. De modo independente, eles definiram e mostraram matematicamente que só pode haver 230 grupos de simetria interna nos cristais. Essa classificação, aliada aos trabalhos com raio-X desenvolvidos pelo professor de matemática e física na Universidade de Adelaide, o inglês William Henry Bragg (1853-1919), formado em física e química, juntamente com o seu filho, o físico australiano William Lawrence Bragg (1862-1942), constituem a base teórica da cristalografia moderna.

Em 1952, o estudo do matemático alemão Hermann Weyl (1885-1955) é um marco de retorno ao ideal grego. Weyl afirma, entre outras coisas, que a “dilatação” é a última extensão da simetria real e dá uma ideia da simetria como “a invariância de uma transformação na configuração de elementos submetida a um grupo de transformações auto mórnicas”, servindo então para as transformações de crescimento.

Como vimos, a noção de simetria é muito importante nas artes, na matemática, em diversas ciências como a cristalografia, a física, a química, a biologia, entre outras. Há que

referenciar que no ano de 1866, o zoólogo e evolucionista alemão Ernst Haeckel (1834-1919) classificou pela primeira vez os animais quanto à sua simetria.

Por todos os dados apresentados, vamos expressar uma primeira definição de simetria.

Simetria é por conseguinte a propriedade pela qual um objeto (figura ou forma) exhibe partes correspondentes quando submetida a uma operação específica. A simetria, portanto, é uma operação que mantém, através de uma determinada transformação, uma forma invariante. As operações específicas são denominadas operações de simetria, ou operadores simétricos. Assim, um objeto (figura ou forma) que possui simetria pode ser convertido nele próprio, a partir de uma de suas partes, ficando numa posição indistinta da outra.

A simetria, no conceito intuitivo tradicional, pode manter a amplitude dos ângulos, ou a forma, ou as distâncias, ou todas. Uma forma com simetria possui, por consequência, uma relação entre as partes de um todo, com o próprio todo, há uma certa regularidade no espaço. Isso tudo reunido dá a “proporção adequada” referenciada pelos gregos.

Os tipos de simetria são as *isometrias*, que preservam as distâncias, as *simetrias semelhantes*, que preservam a forma, e as *simetrias conformes*, que preservam apenas a amplitude dos ângulos, não preservando a forma ou a distância. Todos esses tipos são transformações, ou seja, aplicações bijetivas de um conjunto nele próprio, e em caso mais específico, aplicações dos pontos do plano Euclidiano nos pontos do plano Euclidiano, ou dos pontos do espaço Euclidiano nos pontos do espaço Euclidiano.

A *isometria* é a simetria baseada nos movimentos de objetos (figuras ou formas) tal que a distância entre quaisquer dois pontos, antes ou depois do movimento, permanece a mesma.

No plano Euclidiano distinguimos as seguintes *transformações isométricas*: *reflexão em reta*, ou simplesmente reflexão; *translação*; *rotação* e *reflexão deslizante*, ou translação refletida. Esse resultado, de 1831, também é conhecido por “Teorema da classificação das isometrias” e deve-se ao historiador e geômetra francês Michel Chasles (1793-1880), que desenvolveu trabalhos na área da geometria projetiva.

A transformação identidade é um caso particular da translação, quando o seu vetor associado é o vetor nulo, ou da rotação, quando o ângulo de rotação é nulo. Todas as transformações, distintas da identidade, são resultantes da composição de reflexões. Assim, cada isometria no plano, distinta da identidade, é a composição de no máximo três reflexões. Sendo a translação e a rotação, distintas da identidade, a composição de duas reflexões também distintas.

As *isometrias no espaço Euclidiano* classificam-se em: reflexão em plano (ou reflexão espacial); translação; rotação em torno de um eixo; reflexão deslizante (ou translação refletida); reflexão rotativa (ou rotorreflexão) e deslocamento helicoidal (ou parafuso), onde cada isometria pode ser representada como, no máximo, a composição de quatro reflexões em planos.

Assim, quer no plano, quer no espaço, temos as seguintes operações de simetria que preservam distâncias: *transformação identidade* – simetria que fixa todos os pontos de dado conjunto; reflexão – simetria bilateral obtida colocando-se um objeto (figura ou forma) diante de um espelho e considerando-se a forma e a sua imagem. Um objeto (figura ou forma) que possui simetria de reflexão tem, no espaço (plano), um plano (reta) imaginário(a) que o divide em duas partes idênticas, de natureza *especular (enantiomorfas)*; *rotação*, conhecida como simetria cíclica ou como simetria rotatória – simetria em que a forma, depois de percorridos 360° em torno de um eixo, repete *n* vezes uma posição congruente no espaço. A rotação tanto pode ser para a direita, *rotação dextrógira*, como para a esquerda, *rotação levógira*, pois, do ponto de vista de sua simetria, são a mesma operação; *translação* – repetição da forma, possuindo dois elementos, o comprimento de translação, ou período, e o sentido; *meia-volta no espaço* – caso particular da rotação quando o ângulo de amplitude é

igual a  $180^\circ$ ; *inversão central* – caracterizada por um ponto imaginário a partir do qual, em uma direção comum, mas em sentido opostos, encontram-se elementos geometricamente iguais; *reflexão rotativa* – composição da rotação e da reflexão numa mesma operação. Um outro nome dado a essa operação é rotorreflexão; *inversão rotativa* – uma operação combinada constituída por uma rotação própria seguida de uma inversão. Também conhecida como “rotoinversão”, ou reflexão rotativa. Assim, um eixo de inversão rotatória é um elemento composto que combina a rotação em redor de um eixo com a inversão em torno de um centro; *rotação deslizante* – combinação das operações de translação e rotação. Também conhecida como translato-rotação, ou deslocamento helicoidal. O operador é um eixo polarizador ou em parafuso (hélice); *reflexão deslizante* ou translação refletida – combinação de simetrias que conjuga a reflexão com uma translação paralela ao plano de reflexão.

O conjunto de todas as isometrias que aplicam o objeto (figura ou forma) sobre si, no espaço euclidiano, munido da operação composição, forma um *grupo*. O grupo de todas as isometrias que deixam o objeto (figura ou forma) fixo, no espaço Euclidiano, chama-se *grupo de simetria do objeto*. Se o grupo de simetria contiver apenas a transformação identidade, o objeto (figura ou forma) é denominado *assimétrico*.

Um *grupo de transformações* no espaço Euclidiano diz-se *discreto* se qualquer ponto do espaço possui um conjunto discreto de imagens pelas transformações do grupo. Os *grupos discretos de isometrias do plano* são os *grupos de simetria* de certas figuras ou padrões “regulares” do plano ou do espaço.

Toda a “teoria das simetrias” no plano pode generalizar-se no espaço tridimensional, basta considerar uma figura espacial como qualquer subconjunto do espaço Euclidiano e o seu grupo de simetria como sendo o conjunto de isometrias do espaço que a deixam invariante.

O interesse pelo estudo dos grupos discretos de isometrias do plano e do espaço foi motivado pela noção de cristal proposta por Bravais em 1850. Para Bravais a geometria dos cristais devia-se a uma disposição “regular” dos seus átomos no espaço.

Uma *figura geométrica* é simplesmente um conjunto de pontos do plano. Na geometria elementar, uma grande parte do estudo é dedicado a figuras como os ângulos, os triângulos, os quadriláteros, etc.

O termo *lugar geométrico* é muitas vezes utilizado como sinónimo de figura, quando essa figura é descrita através de uma condição que caracteriza os seus pontos. Um grupo de figuras, conforme as propriedades que evidenciamos, são mais interessantes que outras. Por exemplo, se formos ver do ponto de vista das simetrias, um triângulo equilátero é mais interessante que um triângulo escaleno, por possui mais simetrias.

Designamos *ornamento* a um objeto (figura ou forma) do espaço Euclidiano cujo grupo de simetria é discreto. Ao grupo simétrico de um ornamento damos o nome de *grupo ornamental*. Dois ornamentos são *equivalentes*, se os seus grupos ornamentais contêm o mesmo tipo de isometrias. Evidentemente esse conceito de equivalência define uma relação de equivalência no conjunto dos ornamentos.

Distinguimos então os seguintes tipos de grupo discretos de isometrias: o grupo de rosácea; o grupo de friso e o grupo de papel de parede.

O *grupo de rosácea*, ou grupo finito, é um grupo discreto que não contém translações diferentes da identidade. Esse grupo também é denominado *grupo cristalográfico de dimensão (ou ordem) zero*. Existem apenas dois grupos: o grupo cíclico, só com rotações, e o grupo diedral que possui para além das rotações, as reflexões. Os ornamentos correspondentes denominam-se *rosáceas*. A existência e completa classificação do grupo finito de simetria ou grupo de rosácea foram atribuídas a Leonardo da Vinci, que procurou verificar todas as isometrias que deixam um determinado ornamento invariante.

O *grupo de friso* é um grupo discreto que tem translações diferentes da identidade, mas apenas numa só direção. Esse grupo é também denominado grupo *cristalográfico de dimensão (ou ordem) um*. Os ornamentos correspondentes denominam-se *frisos*. Podemos construir 7 tipos de frisos distintos. Os 7 grupos de simetria discretos dos frisos foram deduzidos, independentemente, em 1924, pelo professor e pesquisador húngaro George Polya (1887-1985) e pelo mineralogista suíço Paul Niggli (1888-1953). No ano de 1927 foi deduzido pelo matemático e filósofo das ciências suíço Andreas Speiser (1885-1970).

O *grupo de papel de parede*, ou grupo de pavimento, é um grupo discreto que possui translações diferentes da identidade em duas direções distintas. Esse grupo é também denominado grupo *cristalográfico de dimensão (ou ordem) dois*. Os ornamentos correspondentes denominam-se *papéis de parede, ou pavimentos*. Podemos construir 17 tipos de papéis de parede distintos. A derivação dos 17 grupos de simetria dos papéis de parede foi dado incompleto por Camille Jordan (1838-1922) em 1868/69, que havia descrito 16 de tais grupos, deixando o grupo de simetria indicado por  $pgg$  ou  $W_2^4$ . O professor alemão de física Leonhard Sohncke (1842-1897) descobre, em 1842, o conceito de *grupo espacial*, e em 1874, Sohncke encontra, como um resultado parcial da dedução dos 230 grupos espaciais, o 17.º grupo que estava em falta.

Entre 1885 e 1890, E. S. Fedorov, estudando cristalografia, encontrou certos grupos de isometrias que atuam sobre todo o plano. Ele demonstrou a existência de unicamente 17 grupos de simetria do plano. Em 1924, G. Pólya e P. Niggli redescobriram os 17 grupos de Fedorov. Desde então, esses grupos têm sido estudados exaustivamente e aplicados não só à cristalografia, mas também em diversos aspetos de desenho, tais como: mosaicos; pinturas; esculturas; e igualmente na arquitetura.

Muitos trabalhos de arte em muitas culturas e épocas diversas descrevem muitos dos padrões dos papéis de parede. O holandês Maurits Cornelius Escher (1898-1972) é um dos artistas que se beneficiou da classificação matemática dos papéis de parede.

O *grupo espacial* é um grupo discreto que possui translações diferentes da identidade em três direções distintas. Esse grupo é também denominado grupo *cristalográfico de dimensão (ou ordem) três*. Os ornamentos correspondentes denominam-se *cristais*. Existem 230 grupos espaciais distintos e desses 230 grupos espaciais encontrados, os primeiros 65 grupos contêm apenas isometrias próprias (grupos rotatórios no espaço) e foram classificados por C. Jordan, em 1869, e por L. Sohncke, em 1879. Desses 65 grupos, um está formado apenas por translações e 22 grupos se apresentam em 11 pares enantiomorfos – elementos com configuração idêntica mas que não podem sobrepor – segundo a torção. Os outros 165 grupos contêm, isometrias impróprias, reflexões em plano, reflexões rotatórias (rotorreflexões) e reflexões deslizantes. A classificação e a enumeração desses 165 grupos foram feitas, independentemente, por E. S. Fedorov na Rússia, em 1890, por A. Schoenflies na Alemanha, em 1891, e por W. Barlow na Inglaterra, em 1894. Os 230 grupos espaciais são obtidos pela combinação dos 32 grupos pontuais – grupos finitos de simetria – com os 14 reticulados espaciais denominados *modos de Bravais*. Esses reticulados espaciais são determinados pelas três direções e pelas distâncias ao longo das células unidade – unidades formadoras dos cristais, e resultam do arranjo de pontos idênticos no espaço, de modo que algum ponto fosse repetido em intervalos regulares ao longo de cada fileira do padrão do cristal.

C. Jordan, utilizando a teoria dos grupos, descreveu um método para definir todas as maneiras possíveis de repetir regularmente agrupamento idênticos de pontos. Fez uma lista de 174 tipos de grupos incluindo os grupos espaciais. Em 1873, Sohncke aplicou a teoria de Jordan para os espaços de dimensão dois e três, produzindo, de início, uma classificação incompleta.

Em 1880, Klein sugeriu ao seu aluno, Schoenflies, o problema de encontrar os grupos cristalográficos no espaço (grupos espaciais), e por volta de 1891, conseguiu a lista completa dos tais 230 grupos. A apresentação dos grupos espaciais foi feita em 1892 com a sua publicação onde usa aspectos da teoria dos grupos. Schoenflies correspondeu-se com Fedorov, que também tinha feito a classificação dos grupos espaciais, e corrigiu alguns erros menores em sua classificação, republicando sua classificação em 1923.

Para além dos ornamentos, como modelos visuais óbvios de grupos de simetria no plano, ou no espaço, são usados diagramas de Arthur Cayley (1821-1895) e tabelas de símbolos gráficos de elementos de simetria elaborados em cristalografia.

A “teoria reticular” de Bravais só foi experimentalmente confirmada em 1911 com a experiência de Max Von Laue (1879-1960), professor de física na Universidade de Munique, que passou um feixe estreito dos raios X através de um cristal de sulfato de cobre. Dois anos mais tarde, em 1913, William Henry Bragg e William Lawrence Bragg, determinam a primeira estrutura de cristal por técnicas de raio-X. As leis de difração de Bragg permitem hoje analisar a estrutura atômica da matéria (nomeadamente cristais) pelos padrões de difração de raio-X, possibilitando aos cristalógrafos reunirem dados para um melhor refinamento da estrutura do cristal. Em 1915, pai e filho receberam o Nobel de Física pelos seus trabalhos. A partir dos seus trabalhos, entre 1924 e 1937, passamos a dispor da possibilidade de desvendar a estrutura das substâncias cristalinas.

Embora do ponto de vista cristalográfico a teoria de Bravais não fosse mais do que pura hipótese, alguns dos seus trabalhos foram apresentados à Academia das Ciências de Paris pelo matemático Augustin Cauchy (1789-1857) tendo chamado a atenção de vários matemáticos da época.

A questão de procurar grupos cristalográficos em uma dimensão superior a três foi de certo modo relevante, motivando David Hilbert (1862-1943), um matemático importante em sua época, a lançar uma pergunta: “ Existe no espaço Euclidiano, de dimensão  $n$ , somente um número finito de grupos com uma região fundamental?”

Os casos de dimensão dois e três eram conhecidos, mas, nenhum caso de dimensão mais elevada o era. O alemão Ludwig Bieberbach (1886-1982) resolveu esse problema em 1910. Provou que, em toda dimensão, só havia um número finito de grupos. Não determinou realmente o número em nenhuma dimensão, apenas a questão de serem em número finito.

Passemos agora a *transformação de simetria semelhante, ou similar*. A ideia transmitida por H. Weyl, em 1952, foi desenvolvida por Aleksei Vasilevic Shunikov (1887-1970), em 1960, e por E. I. Galyarski e Alexander M. Zamorzaev (1927-1997), em 1963.

Existem, de modo geral, apenas três tipos de transformação de simetria semelhante: *dilatação central*, ou simplesmente dilatação, ou homotetia; *dilatação rotativa e reflexão dilatória*. Essas transformações são, em dada ordem, isomorfas com as seguintes isometrias existentes no espaço Euclidiano: translação; deslocamento helicoidal e reflexão deslizante.

O último tipo de simetria é a *transformação de simetria conforme* ou a transformação que preserva as circunferências do plano Euclidiano e as superfícies esféricas no espaço Euclidiano. Nessa transformação é preservada a propriedade de equiangularidade, ou seja, de conservação dos ângulos, mas não de equiformidade, que preserva as formas. Para esta simetria podemos utilizar um circunferência de inversão, para o plano Euclidiano, ou a superfície esférica, para o espaço Euclidiano, que são os elementos de transformação da simetria conforme. Por exemplo, considerando uma circunferência de inversão e uma reta secante a essa circunferência, a reta, pela inversão, transforma-se numa circunferência que contém o centro da circunferência de inversão. Por outro lado, a transformada de uma circunferência qualquer, que não passe pelo centro da circunferência de inversão, é também uma circunferência distinta da inicial, caso está não seja ortogonal com a circunferência de inversão.

O *grupo de simetria* conforme é constituído pela isometria, pela transformação de simetria semelhante e pela transformação de simetria conforme.

Observamos que a reflexão no plano é um caso particular da inversão, quando consideramos a circunferência de inversão uma circunferência com o seu raio infinito. Também a reflexão no espaço é um caso particular da inversão quando consideramos a superfície esférica de inversão uma superfície esférica com o seu raio infinito.

Todas essas transformações ajudam na aplicação e observação de simetrias.

## Conclusão

Observamos que podemos encontrar simetrias relacionada com muitas ciências, tais como: na geociência, nomeadamente na cristalografia e na estratigrafia, entre muitos ramos; na biociência, particularmente na zoologia e na botânica; nas ciências ditas exatas como a matemática, a química e a física; na tecnologia; na arquitetura; na música; na literatura; na filosofia da arte e na estética; e em muitas outras áreas do saber.

Na *cristalografia*, os elementos de simetria mais encontrados nos cristais são: a *simetria de translação*, que é estrutural; a *simetria de reflexão*; a *simetria de rotação* e a *simetria de inversão*. Também há casos de simetria de inversão rotativa, dilatação, entre outras. Por isso, torna-se interessante o estudo da simetria cristalina, quer pelo aspeto da imensa diversidade de formas que os cristais apresentam, quer pela sua simetria, interna e externa. Na denominada cristalografia geométrica o interesse principal é a classificação de minerais através das suas formas, usando para isto os grupos finitos de isometrias e tendo em atenção a “restrição cristalográfica” segundo a qual só podemos ter rotações de ordem 1, 2, 3, 4 e 6.

A *estratigrafia* é um ramo da geociência que estuda e interpreta os estratos ou camadas das rochas, ocupando-se da identificação, descrição, sequência horizontal e vertical, mapeamento e conexão das unidades geológicas agrupadas segundo a sua composição físico-química, a sua formação, idade, coberturas, e todas as suas alterações. A simetria surge na estratigrafia quando esta analisa o problema da sucessão vertical dos estratos geológicos.

Na *zoologia*, apesar da enorme diversidade de formas animais, podemos classificá-las, de um modo geral, em alguns grupos de simetria, tais como: *grupo esférico* – o organismo tem uma forma esférica, com suas partes dispostas concêntricamente ao redor do centro geométrico do animal; *grupo radial* – o corpo do animal possui a forma de um cilindro heteropolar ou modificações dele, em que o seu eixo principal é de ordem infinita ou muito elevada; *grupo bilateral* – os animais possuem apenas um plano de simetria que os divide em duas partes especulares. Esta simetria é a mais abundante nos animais superiores, nos mamíferos, répteis e aves. O homem também se inclui nessa simetria; *grupo birradial* – que apresenta dois planos de simetria perpendiculares entre si, por isso também chamada de *dissimetria*, em que cada um desses planos divide o animal em metades especulares diferentes entre si; *grupo raro* – os animais desse grupo possuem uma simetria muitíssimo rara e instável. A astéria (estrela do mar) é um belo exemplo dessa raridade, que possui um eixo de ordem 5, bem como as teias de aranhas que têm uma estrutura e simetria radiais.

Na *botânica*, a origem da simetria nos vegetais ainda não é conhecida, mas, já foram propostas várias explicações. Inclusive foram sugeridos genes que controlariam a forma e a simetria. É interessante notar que determinadas partes dos vegetais e, até mesmo, vegetais inteiros são, geometricamente, modificações anamórficas de outros vegetais. Nos vegetais superiores, tais como as ervas, arbusto e árvores, o desenvolvimento da simetria está associado a outros fenómenos. Os principais grupos de simetrias observados nos vegetais são: *simetria bilateral* – um tipo raro de simetria e pode ser encontrada nas algas; *simetria de translação* – também um tipo raro de simetria e podemos encontrá-la nas bactérias; *simetria radial* – que reúne o maior número de vegetais simétricos e muitas vezes há modificação



nessa simetria pela inclusão de eixos polarizados. Como exemplos temos: os cogumelos, os pinheiros, etc. Nos vegetais superiores, existe um eixo longitudinal raiz-caule que confere ao vegetal a polaridade necessária para enfrentar a desigualdade dos ambientes terrestre e atmosférico; *simetria birradial* – característica dos bacilos: *simetria esférica* – encontrada em bactérias e em outros vegetais inferiores. As bactérias podem se reunir, mudando então a sua forma geométrica, mas mantendo a sua simetria.

Na *matemática* encontramos, para além da área de geometria em que temos: a *simetria axial*, a *simetria rotacional*, a *simetria pontual*, a *simetria de translação*, muitos exemplos e aplicações de simetria. Os números capicuas são exemplos de simetria: 232, 4321234, etc. Vejamos agora algumas definições envolvendo esse conceito: *simetria de uma relação binária* – Dizemos que uma relação R no conjunto A é simétrica se, e somente se, quaisquer que sejam dois elementos, X e Y, do conjunto A, o par ordenado (X,Y) pertence a R, então o par ordenado (Y,X) também pertence a R; *simétrico de um número* – Dado um número ou uma expressão algébrica X, chama-se *simétrico*, ou *oposto*, o mesmo X, porém com sinal “trocado”; *matriz simétrica* – Dizemos que uma matriz é simétrica se é igual à sua transposta; *jogo simétrico* – Dizemos que um jogo é simétrico quando os dois jogadores, além de disputarem com as mesmas regras, têm a capacidade de usar as mesmas estratégias para vencer ou dominar o adversário.

Novamente na geometria, observamos que os 5 sólidos platônicos possuem todas as faces iguais, arestas iguais, todas as faces possuem o mesmo número de arestas, e todos os ângulos sólidos possuem o mesmo número de arestas.

Sendo a *química* a ciência que estuda os elementos químicos isolados ou em combinação, as reações, transformações, transmutações e interações de elementos químicos, há naturalmente numerosas conotações de simetria. Classificar as moléculas pelas suas propriedades é habitual mas também complexo. As moléculas, por exemplo, podem ser classificadas em simétricas e assimétricas. Há basicamente duas simetrias envolvidas: a reflexão em plano e a rotação sobre um eixo. Um grupo pontual de simetrias é um método de denotar a combinação de elementos simétricos que a molécula contém.

A *física* é o ramo das ciências que estuda a matéria e a energia. Dentro da imensa diversificação da física, desde a clássica até a nuclear, há diversas aplicações e deduções que se baseiam em simetrias das mais variadas maneiras. A “teoria da relatividade” e a “teoria quântica” envolvem noções de simetria em seu desenvolvimento. A aplicação da simetria na física conduz a importantes conclusões em determinadas leis físicas. Na física das partículas, considerações de simetria podem ser usadas nas leis de conservação. Observamos que todas as grandezas que se conservam na física são simétricas em relação ao tempo. Damos como exemplo a conservação do movimento linear, a conservação do momento angular, a conservação da carga e da energia.

A *tecnologia* utilizada no fabrico de determinados objetos, quer pela indústria, quer pela engenharia mecânica, deve ser de fácil utilização, sendo simples e racionais. Em sua maioria, as partes de uma máquina consistem em formas geométricas específicas ou em combinações dessas formas. Um eixo muito bem trabalhado teria a simetria de um cilindro – corpo ideal geométrico, e o parafuso seria uma helicoidal geométrica exata. A facilidade de uso, a função e o custo, fazem com que todos os objetos fabricados pelo homem sejam simétricos.

Na *arquitetura*, a simetria utilizada pelos arquitetos nas suas construções visa atingir dois ideais: o primeiro deles é a organização do espaço de uma maneira funcional e o segundo, é a estética, em que a simetria visa buscar, de alguma maneira, o equilíbrio da composição arquitetónica. Da mesma maneira que os minerais, os animais e as plantas são reunidos em grupos que possuem a mesma simetria, os diversos estilos arquitetónicos também podem reunidos, temos assim: o *grupo bilateral* e o *grupo rotatório*. O grupo

bilateral, mais difundido tanto no tempo como no espaço, possui um plano de simetria que a divide em duas partes especulares, por exemplo o Pantheon, em Roma, e o grupo rotatório, quando o eixo de simetria tem ordem muito alta, aproxima-se da forma circular, como por exemplo o Pentágono, nos Estados Unidos da América, e a torre inclinada de Pisa, na Itália.

Na *música*, algumas peças, tais como as do compositor Bela Bartok, evidenciam sinais de simetria. Também encontramos na *literatura*, em alguns textos, ou frases, ilustram o conceito de simetria. Por exemplo: “*A man, a plan, a canal, Panamá!*” (A M A N A P L A N A C A N A L P A N A M A), ou “*Amar tão bem é boa trama.*” (A M A R T A O B E M E B O A T R A M A).

Na *filosofia da arte* e na *estética*, a simetria é um conceito importante, pois é um dos fatores determinantes da emoção estética, quando se trata de exteriores considerados como belos. A simetria já foi comparada ao ritmo de uma bela sucessão de sons, onde a simetria seria igual a um ritmo estável ou em repouso. Por isso, muitos referenciam a arquitetura como “música congelada”. No passado, as teorias idealistas de beleza, por exemplo, tentavam sempre associá-la às doutrinas de proporção e simetria. Por essa razão, os gregos fizeram tantas menções de números como originadores da beleza, do belo e do sublime. A beleza se tornou, com o passar do tempo, sinónimo de proporção ideal, surgindo o número de ouro, ou razão áurea de valor aproximado 1,618. Atrás dessa proporção viveram Vitruvius, Leonardo, Piero della Francesca, Dürer e tantos outros homens.

De um modo geral, o progresso científico, existente nas diversas áreas do conhecimento, é o resultado do trabalho de muitas pessoas, em muitos lugares e em muitas épocas, o que só vem despertar um interesse ainda maior pelo raciocínio e pela criatividade individual, elementos essenciais em todas as ciências, quer humanas, quer exatas, quer biológicas, entre outras. A procura e a aplicação da simetria contribuem para esse tão desejado progresso acompanhado pela ânsia do belo e do útil.

### **Referências:**

- Darvas, Gyorgy. Symmetry. Birkhauser Verlag AG, Basel, Switzerland, 2007.  
 Wade, Dave. Symmetry: The ordering Principle. Walker & Company, 2006.  
 Farmer, David D. Grupos e Simetria. Gradiva Publicações, 1999.  
 Armstrong, M. A.. Groups and Symmetry. Springer, England, 1988.  
 Alsina, C. and Trillas, E.. Lecciones de Algebra y Geometria. Editora Gustavo Gili, Barcelona, 1984.  
 Rohde, Geraldo M.. Simetria. Hemus editora limitada, 1982.  
 Ghyka, Matila,. The Geometry of Art and Life. Dover Publications, 2 edition,1977.  
 Pedoe, Dan. Geometry and the Visual Arts. Dover Publications, 2 edition,1976.