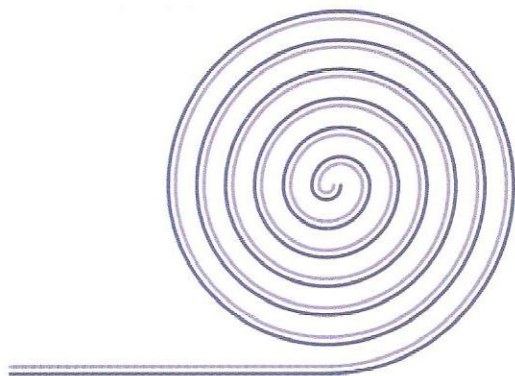


Áurea Sousa • Helena Melo • Jerónimo Nunes • João Cabral
Maria do Carmo • Osvaldo Silva • Paulo Medeiros

MA7EMÁTICA

perspetivas



FICHA TÉCNICA

Título	Matemática 7 Perspetivas
Autores	Áurea Sousa Helena Melo Jerónimo Nunes João Cabral Maria do Carmo Martins Osvaldo Silva Paulo Medeiros
Edição	Universidade dos Açores
Depósito Legal	419082/16
ISBN	978 989 20 7152 7
Data de Saída	Dezembro de 2016
Tiragem	335 exemplares
Execução Gráfica	EGA - Empresa Gráfica Açoreana Rua Mnauel Augusto Amaral, 5 9500-222 Ponta Delgada S. Miguel - Açores

Índice

Estatística, uma aprendizagem para a vida	15
Quadrivium	41
Informática, comunicação e colaboração	75
Do número à revolução de um ensino aberto	100
Mentes brilhantes da Matemática	121
A fotografia e a Matemática	145
Notas biográficas	173

Quadrivium

Helena de Fátima Sousa Melo
Universidade dos Açores

Na matemática da Antiga Grécia, tempo de Tales de Mileto, Pitágoras de Samos, Platão, entre outros, foi atribuído ao matemático pitagórico Arquitas de Tarento (428 a.C. – 347 a.C.), devido ao seu interesse variado, a divisão da matemática em quatro ramos: Aritmética – ou números em repouso, relacionada ao estudo dos números, Música – ou números em movimento, considerada uma aplicação da aritmética e ao estudo dos princípios musicais, Geometria – ou grandezas em repouso, relacionada com a teoria do espaço, grandezas estáticas e a Astronomia – ou grandezas em movimento, como também uma aplicação da Geometria.

A Aritmética, a Música, a Geometria e a Astronomia compõem o conhecido Quadrivium das artes liberais, que corresponde, a grosso modo, às ciências exatas que por alguns é definida com qualquer área da ciência que é capaz de se expressar quantitativamente. O Quadrivium, que etimologicamente significa o *cruzamento de quatro caminhos*, esta voltado para o estudo da matéria.

Considerando esta divisão da Matemática foram selecionados alguns artigos, aqui adaptados, cujos textos originais foram todos publicados no Jornal Correio dos Açores, entre os anos de 2013 e de 2016, em espaço próprio. Esta louvável iniciativa do Correio dos Açores pôde proporcionar, e ainda proporciona, a divulgação da Matemática, por si só, bem como na sua interdisciplinaridade. Assim, surgem alguns texto que se desenrolam nas quatro áreas mencionadas.

Na Aritmética referenciamos os textos: “Simetrias Numéricas – capicuas e relações numéricas” e “Era uma vez... uns números”.

Na Música destacamos os textos “Verão, Férias, Música e ... Matemática” e “O Koto e a sua partitura numérica”.

Na Geometria temos os textos: “Problemas Clássicos da Grécia Antiga”, “Simetrias e Isometrias- qual a diferença” e “Os 13 sólidos Arquimedianos”.

Na Astronomia apresentamos o texto “Quadrados mágicos – quadrados planetários”.

Quadrivium

Helena de Fátima Sousa Melo
Departamento de Matemática
Universidade dos Açores

Na matemática da Antiga Grécia, tempo de Tales de Mileto, Pitágoras de Samos, Platão, entre outros, foi atribuído ao matemático pitagórico Arquitas de Tarento (428 a.C. – 347 a.C.), devido ao seu interesse variado, a divisão da matemática em quatro ramos: Aritmética – ou números em repouso, relacionada ao estudo dos números, Música – ou números em movimento, considerada uma aplicação da aritmética e ao estudo dos princípios musicais, Geometria – ou grandezas em repouso, relacionada com a teoria do espaço, grandezas estáticas e a Astronomia – ou grandezas em movimento, como também uma aplicação da Geometria.

A Aritmética, a Música, a Geometria e a Astronomia compõem o conhecido Quadrivium das artes liberais, que corresponde, a grosso modo, às ciências exatas que por alguns é definida com qualquer área da ciência que é capaz de se expressar quantitativamente. O Quadrivium, que etimologicamente significa o *cruzamento de quatro caminhos*, está voltado para o estudo da matéria.

Considerando esta divisão da Matemática foram selecionados alguns artigos, aqui adaptados, cujos textos originais foram todos publicados no Jornal Correio dos Açores, entre os anos de 2013 e de 2016, em espaço próprio. Esta louvável iniciativa do Correio dos Açores pôde proporcionar, e ainda proporciona, a divulgação da Matemática, por si só, bem como na sua interdisciplinaridade. Assim, surgem alguns textos que se desenrolam nas quatro áreas mencionadas.

Na Aritmética referenciamos os textos: “Simetrias Numéricas – capicuas e relações numéricas” e “Era uma vez... uns números”.

Na Música destacamos os textos “Verão, Férias, Música e ... Matemática” e “O Koto e a sua partitura numérica”.

Na Geometria temos os textos: “Problemas Clássicos da Grécia Antiga”, “Simetrias e Isometrias- qual a diferença” e “Os 13 sólidos Arquimedianos”.

Na Astronomia apresentamos o texto “Quadrados mágicos – quadrados planetários”.

Simetrias Numéricas – capicuas e relações numéricas

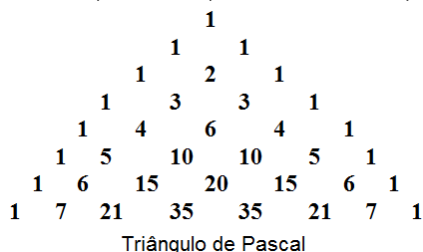
O mundo à nossa volta está repleto de simetrias. Na arte, na música, na escrita, em vários momentos deparamo-nos com simetrias. Achemo-las curiosas, divertimo-nos na sua busca, entramos num mundo mágico e cheio de surpresas. Na matemática há, de modo geral, dois tipos de simetrias, as simetrias geométricas e as simetrias numéricas. Hoje vamos ver as simetrias numéricas.

“Brincar” com os números, para alguns, é algo de terapêutico. Poder expressar uma determinada quantidade de várias formas e maneiras tem, de certo modo, sua graça. Imaginemos se ao pedirmos uma determinada quantidade, por exemplo, de laranjas, ao invés de mencioná-la diretamente – 28 laranjas – referíssemos esta quantidade como “o produto do quadrado de dois por sete”. Até teria a sua piada! Principalmente para os amantes do cálculo aritmético.

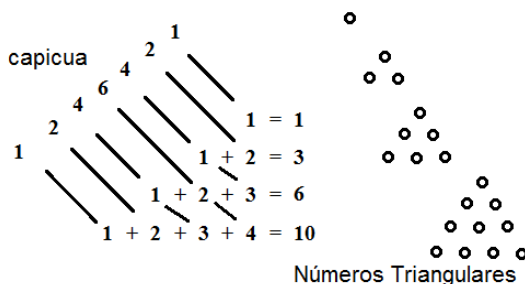
Mas, tratemos de casos menos complexos e mais harmonioso aos nossos olhos e mente, as simetrias numéricas que encontramos em *capicuas*. O termo *capicua*, ou *número palíndromo*, tem origem na expressão catalã “cap i cua” que significa “cabeça e cauda”. Capicuas são numerais que lidos nos dois sentidos representam o mesmo valor, por exemplo, 13431. A palavra “*palíndromo*” é de origem grega, sendo constituída pelos termos “palin”, que significa “novo”, e “dromo”, que significa “percurso ou circuito”. Assim, palíndromos são palavras ou frases que podem ser lidas da esquerda para a direita ou da direita para a esquerda. Como exemplo temos “Saíram o tio e oito Marias”. Os palíndromos também podem ser chamados de *anacíclicos*, ou seja, que voltam em sentido inverso, que refazem inversamente o ciclo. No nosso caso vamos tratar dos numéricos, os números capicuas.

Começemos pelos números capicuas mais simples, ou seja, os que são constituídos por n algarismos iguais, 5, 44, 333, e todos os que imaginarmos. Também formamos capicuas quando escrevemos um numeral com quaisquer algarismos e depois continuamos a escrevê-lo repetindo os algarismos já escritos pela ordem inversa, 2.736.446.372. Podemos encontrar capicuas na escrita das horas, 14:41, ou das datas, 21/02/2012, e se pensarmos num número capicua mais ampliado, podemos referir também as horas, minutos e segundos nessa data, ou seja, 21:02:20, 11/02/2012. Uma das próximas datas capicua ocorrerá em 12/02/2021.

Capicuas mais interessantes são obtidas através de relações numéricas. No triângulo de Pascal (vide imagem), obtemos capicuas formados pelos algarismos das suas linhas sucessivas, ou seja, na primeira linha temos 1, na segunda, 11, depois, 121, seguidamente, 1331 e 14641. A partir da sexta linha não temos capicuas expressos, mas sim uma perfeita simetria de números que podem ser lidos da direita para a esquerda ou da esquerda para a direita. Assim, na sexta linha temos 1-5-10-10-5-1, na sétima linha, 1-6-15-20-15-6-1, na oitava, 1-7-21-35-35-21-7-1, etc..



Há outros triângulos igualmente curiosos e que produzem capicuas. O triângulo que determina *números triangulares* produz capicuas na soma de determinadas diagonais. Informamos que um número triangular é um número natural que pode ser representado na forma de triângulo equilátero.



Uma das técnicas para obter capicuas é considerar um determinado número, inverter a ordem dos seus algarismos, adicioná-lo ao número inicial, obtendo um novo número, e repetir sempre esse processo até ter um número capicua. Por exemplo, $1524 + 4251 = 5775$ (capicua), $568 + 865 = 1433$ (não é capicua), então fazemos $1433 + 3341 = 4774$ (capicua). Há casos em que iniciamos este procedimento com números que só após muitas operações gera um número capicua. Por exemplo, o número 276, após a

repetição do processo quinze vezes, dá origem ao um número capicua 8.836.886.388.

Podemos obter alguns números capicuas através de mais do que uma operação aritmética, e executando-as por mais de uma vez. Por exemplo, $37 \times 3 + 50 = 161$, $3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 37 = 111111$. Este último resultado também pode ser obtido fazendo $12345 \times 9 + 6$. Observamos que esta associação entre um número composto por uma sequência ordenada de algarismos multiplicado por nove e adicionado o algarismo seguinte da sequência resulta num número capicua curioso. Iniciemos essa obtenção de número capicua com $0 \times 9 + 1 = 1$, depois $1 \times 9 + 2 = 11$, $12 \times 9 + 3 = 111$, $123 \times 9 + 4 = 1111$, $1234 \times 9 + 5 = 11111$, $123456 \times 9 + 7 = 1111111$, $1234567 \times 9 + 8 = 11111111$ e $12345678 \times 9 + 9 = 111111111$. Se observarmos está pirâmide de números e operações, repararmos que a quantidade de “1” que aparece no resultado está associada ao número que é adicionado ao produto. Os próprios quadrados desses resultados originam capicuas, ou seja, $1 \times 1 = 1$, $11 \times 11 = 121$, $111 \times 111 = 12321$, $1111 \times 1111 = 1234321$, $11111 \times 11111 = 123454321$, $111111 \times 111111 = 12345654321$, $1111111 \times 1111111 = 1234567654321$, $11111111 \times 11111111 = 123456787654321$ e o produto $111111111 \times 111111111$ é igual a 12345678987654321, e curiosamente o algarismo do centro desses números resultantes correspondem a quantidade de “1” que aparece no número que foi elevado ao quadrado.

No conjunto dos números primos também podemos observar a existência de capicuas. Acredita-se que, do mesmo modo que existe infinitos números primos, exista infinitos primos capicua. Também há pares, ternos, quartetos, quintetos, e talvez outras formações, de primos capicua, que são conjuntos de números primos apenas diferentes no seu algarismo central. Apresentamos alguns deles: pares – (919, 929), ternos – (10301, 10501, 10601), quartetos – (727, 757, 787, 797), quintetos – (101, 131, 151, 181, 191).

O número 836 proporciona, quando fazemos 836×836 , um intrigante número capicua, o número 698.896, pois quer lido da esquerda para a direita, quer lido da direita para a esquerda, quer lido de cabeça para baixo, ou sofrendo um rotação de 180 graus, com centro de rotação no ponto separador das classes dos milhares e das unidades, continua sendo capicua. Outro número com esta propriedade é 869968, o produto de 54373 por 16. Experimente formar outros números capicuas com esta simetria perfeita, quer por cálculo, quer pela simples junção de algarismos.

Texto original publicado em 16 de janeiro de 2014

Era uma vez... uns números

Em qualquer situação podemos sempre encontrar um espaço para um passatempo, para contar história, ir ao cinema, usufruindo de momentos agradáveis, quer em família, quer entre amigos.

Há pelo menos duas áreas da matemática, na minha opinião, que conseguem nos proporcionar, de imediato, momentos interessantes e agradáveis: a história da matemática e a matemática recreativa. Quem não gosta de ouvir uma boa história? Quem não gosta de passar o tempo a se divertir?

A História da Matemática, bem como a Matemática Recreativa, é uma mais-valia no ensino-aprendizagem da matemática pois, auxiliam na construção do conhecimento, na evolução de conceitos, na sua aplicação, uma vez que para contar uma boa história, ou criar um *puzzle* eficaz, temos que ter um bom domínio dos conceitos a serem utilizados.

Há vários encontros, *workshops*, congressos sobre estas temáticas. Nesses encontros podemos constatar a multiplicidade de temas que cada uma abrange e as suas interligações.

Para dar um pequeno gozo sobre essas temáticas, vamos iniciar nossa digressão pela matemática recreativa, que, de entre outras áreas da matemática, tem conexões com a teoria dos números. A Teoria dos Números é um dos ramos da considerada matemática pura e que estuda as propriedades dos números em geral, mas, em particular as dos números inteiros. Nesse seguimento, trataremos dos números de Friedman. Assim, era uma vez uns números cativantes e curiosos que, decerto, despertarão o calculista adormecido que há em nós e fará com que passemos o tempo sem nos aperceber.

Mas o que é um número de Friedman?

Os números de Friedman têm essa denominação em homenagem ao matemático americano que os estudou Erich Friedman (1965 -). Erich Friedman, professor associado de Matemática na Universidade de Stetson, Florida, é considerado um especialista em puzzles matemáticos. As suas áreas de interesse são a Geometria, a Teoria dos Grafos, a Teoria dos Jogos e a Computação.

Os números de Friedman são números inteiros positivos que podem ser expressos, numa determinada base de um sistema de numeração, como uma combinação dos seus algarismos e dos símbolos das quatro operações aritméticas básicas de adição (+), subtração (-), divisão (/), multiplicação (x), bem como da operação de potenciação, para além do

uso de parêntesis. Por exemplo, 126 é um número de Friedman na base 10, a base que normalmente utilizamos, pois, $126 = 21 \times 6$.

Outro número de Friedman na nossa base é $81648 = (8 \times 8 - 1) \times 6^4$, ou seja, o resultado de $63 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6$.

O primeiro número de Friedaman e o único que possui apenas dois algarismos é o número $25 = 5^2$. Um exemplo de um número de Friedman não na base 10 é $24132 = 31 \times 422$ expressos na base 5.

Lembramos que a operação de potenciação deve ser efetuada antes das operações de multiplicação e divisão, e essas, por sua vez, devem ser efetuadas antes das operações de adição e subtração, essa ordem de execução das operações pode ser alterada através da utilização de parêntesis, que devem ser resolvidos, em primeiro lugar, de dentro para fora. Assim, se tivermos $2 + 4^3 \times 5 - 6$, devemos fazer inicialmente 4 elevado a 3, que resulta em 64, multiplicar esse resultado por 5, obtemos 320, e ao produto obtido, adicionar 2 e subtrair 6, ou seja, obtemos 316. Mas, se tivermos $[(2 + 4)^{3 \times 1} - 7] \times 4$, devemos fazer primeiramente a adição entre 2 e 4, depois obter o produto de 3 por 1, e só depois efetuar a potência de base 6 e expoente 3, ou seja, 216, obtendo de seguida a diferença entre essa potência encontrada e 7, e só então multiplicar o resultado por 4, encontrando assim 836. Se resolvermos essa última expressão sem os parêntesis, ou seja, $2 + 4^{3 \times 1} - 7 \times 4$, obtemos 38. Quando não há indicação de prioridade entre as operações, ou se estas possuem a mesma preferência, devemos resolvê-las da esquerda para a direita. Por exemplo, $2 - 3 - 4 + 7 - 6 = -1 - 4 + 7 - 6 = -5 + 7 - 6 = 2 - 6 = -4$.

Quando os algarismos utilizados para expressar os números de Friedman seguem a mesma disposição que a disposição do numeral original, os números de Friedman recebem o nome de *números de Friedman agradáveis*, ou *números de Friedman ordenados*, ou ainda *números de Friedman fortes*. O número 127 que pode ser expresso como $-1 + 2^7$ é o primeiro com essa propriedade. Um outro exemplo de número de Friedman ordenado é o número $32785 = 3 + 2 \times 7 + 8^5$, no qual verificamos a mesma ordenação.

Há muitos números de Friedman e em várias bases.

Na base 10 e com apenas três algarismos temos uma lista com treze números de Friedman: 121, 125, 126, 127, 128, 153, 216, 289, 343, 347, 625, 688, 736.

Apenas três destes números são números de Friedman ordenados, a saber: $127 = 1 + 2^7$, $343 = (3 + 4)^3$ e $736 = 7 + 3^6$.

Os outros dez termos da lista apresentada são apenas números de Friedman, pois temos que $121 = 11^2$, $125 = 5^{(1+2)}$, $126 = 6 \times 21$, $128 = 2^{(8-1)}$, $153 = 3 \times 51$, $216 = 6^{(2+1)}$, $289 = (8 + 9)^2$, $347 = 7^3 + 4$, $625 = 5^{(6-2)}$ e 688 é o produto de 8 por 86.

Também podemos nos divertir comprovando que 123456789 e 987654321 são ambos número de Friedman.

Apresentamos a solução descoberta por Michael Reid e Philippe Fondanaiche, colegas de Erich Friedman,

$$123456789 = ((86+2 \times 7)^5 - 91) / 3^4 = \frac{(86+2 \times 7)^5 - 91}{3^4}$$

$$987654321 = (8 \times (97+6/2)^5 + 1) / 3^4 = \frac{8 \times \left(\frac{97+6}{2}\right)^5 + 1}{3^4}.$$

Números com o mesmo algarismo também podem ser números de Friedman.

$$\text{O menor número é } 99999999 = \left(9 + \frac{9}{9}\right)^{9 - \frac{9}{9}} - \frac{9}{9}.$$

$$\text{O maior número encontrado até ao momento corresponde ao número } 6666666666666666 = \frac{6 \times \left(\frac{66-6}{6}\right)^{6 + \frac{66-6}{6}} - 6}{6 + \frac{6+6+6}{6}}.$$

Quando os números de Friedman possuem um número par de algarismos e são expressos pela multiplicação de dois números cuja quantidade de algarismos é igual à metade do número inicial, então esse são denominados números vampiros e cada um dos fatores é designado de “presas”. Os fatores são formados a partir do número original em qualquer ordem, não sendo permitidos zeros no início do número. Por exemplo, 1260, 1395, 125460 são todos números vampiros. E como $1260 = 21 \times 60$, 21 e 60 são as presas.

O número 125460 admite dois pares de presas visto que, $125460 = 204 \times 615 = 246 \times 510$.

Há outros números com essa condição e com muitos mais presas, como o caso de 24959017348650 que admite cinco pares de presas, ou seja, $24959017348650 = 2947050 \times 8469153 = 2949705 \times 8461530 = 4125870 \times 6049395 = 4129587 \times 6043950 = 4230765 \times 5899410$.

Com tantas contas, vamos contar mais. Mas, agora, vamos contar uma história. Os personagens principais são os números inteiros. Com a necessidade de contar e relacionar quantidades, o homem desenvolveu símbolos no intuito de expressar tais situações. Desde os tempos mais primitivos, por várias civilizações, o homem busca algo mais concreto, que interpretasse de uma forma mais simples essas situações. Com o aparecimento dos números naturais, temos um modo de contar que relaciona símbolos (algarismos) a determinadas quantidades (números). Assim, era uma vez... os números.

Com o Renascimento apareceu a expansão comercial que obrigou os comerciantes a indicarem casos de lucro e prejuízo. E para resolverem esse problema usaram os símbolos + e -. Assim, com o uso dessa nova simbologia, os matemáticos da altura puderam desenvolver técnicas de operação adequadas a expressar qualquer condição compreendendo números positivos e negativos. Aparece um novo conjunto numérico representado pela letra Z (abreviatura de “Zahlen” que significa “número” na língua alemã), constituído pelos números positivos (conjunto dos números naturais) e seus respectivos opostos, podendo ser escrito na forma:

$$Z = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}.$$

Os gregos eram grandes apreciadores dos números naturais e como tal atribuíam-lhes características humanas, tornando-os fascinantes e misteriosos. Hoje tratamos dos números de Friedman e dos números vampiros e, demos um cheirinho da história dos números em geral, mas, há muito mais para contar...

Texto original publicado em 14 de agosto de 2014

Verão, Férias, Música e ... Matemática

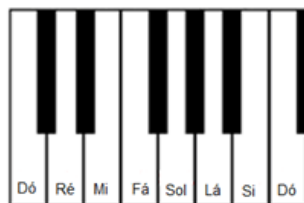
No verão estamos inquietos que chegue o período das férias para podermos ficar longe da rotina do quotidiano e fazer o que nos dá mais gosto. Nas férias, queremos passear, ver lugares diferentes, conversar, ouvir música e a última coisa que desejamos é pensar no serviço, nas responsabilidades, nos afazeres diários, e, também, na Matemática que nos persegue dia a dia, quer na contagem do tempo, quer no trabalho, quer em casa, quer nas compras, pois esta está em tudo que nos rodeia. Por isso, a Matemática não entra em férias, também acompanha-nos nos momentos de lazer, quando apreciamos os motivos em uma calçada, a arquitetura, a natureza e também a música, tão agradável, tão envolvente e tão cheia de Matemática.

Desde as eras mais longínquas o homem produz sons. Esses sons, numa sequência melódica, originam a música. Mas como surgem as escalas, as notas, os compassos de que temos conhecimento nos dias de hoje? Surgem de uma observação matemática. Os antigos, inspirados nos pitagóricos, dividiram a Matemática em quatro partes, conhecida por *quadrvium* (*quadri* quatro, *vium* caminho), que compreendia: a geometria, a astronomia, a aritmética e a música. Estas eram matérias ensinadas nas universidades medievais.

A música era para os pitagóricos um sinal da harmonia do cosmos, bem como uma via para conseguir o equilíbrio interno. Os pitagóricos foram os primeiros a fundamentá-la cientificamente. Consideravam que a música tinha uma aritmética escondida. Para os pitagóricos, “tudo é número”. Este pensamento atravessou gerações. Um facto curioso é a influência na música de Mozart da numerologia, uma teoria que utiliza a matemática básica. Podemos verificar tal influência na sua obra “Flauta Mágica”.

Pitágoras teria notado que ao esticar uma corda, produzia determinado som, o tom, e fazendo outras marcas nessa mesma corda observou que os sons produzidos eram ora agradáveis, ora não. Este descobriu que as marcas que produziam sons agradáveis estavam relacionadas com as frações 1:2, 2:3 e 3:4. Quando o comprimento da corda esticada é reduzido para a sua metade produz um som mais agudo relacionado com o primeiro som, temos “a oitava acima”. Uma oitava é então o intervalo entre uma nota musical e outra com a metade ou o dobro da sua frequência. Surge, com Pitágoras, um primeiro grupo de notas, uma primeira escala musical.

A Escala é pois uma sequência discreta de sons que se sucedem dentro da oitava. Os tipos de escalas existentes são muitos em todas as partes do mundo. A escala musical mais utilizada hoje foi desenvolvida pela civilização ocidental e baseia-se num conjunto de doze sons, a chamada escala cromática igualmente temperada. No piano, por exemplo, apercebemo-nos dessa escala cromática quando, sem pular nenhuma, tocamos todas as 7 teclas brancas e 5 pretas teclas.



Oitava musical

Neste sistema de temperamento igual, a oitava é assim dividida nos doze intervalos de semitons. A correspondência entre duas frequências separadas por um semitom é sempre a mesma relação matemática, uma constante igual à "raiz duodécima" de 2 que corresponde a aproximadamente 1,059463. Esse valor é o fator de proporção, ou razão, entre as duas notas consecutivas da escala temperada que estão em progressão geométrica, ou seja, todas as oitavas formam uma sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao produto do termo anterior por 1,059463.

Com o conhecimento das relações entre os sons podemos construir um instrumento musical de entre os vários tipos existentes. Estes são classificados de acordo com a maneira pela qual produzem o som. Assim temos os instrumentos de sopro, de cordas, de percussão, de teclas e não esqueçamos dos eletrônicos. Um instrumento de construção bastante simples e interessante, em que nos apercebemos da matemática envolvida, é o xilofone.

O xilofone, palavra de origem grega (ξύλον – "madeira, φωνή – "som") é geralmente o nome que se dá a vários instrumentos musicais de percussão, entre eles, o próprio xilofone, a marimba, o balafon, que pode diferir no seu aspeto geral ou no tipo de madeira utilizado. Constituído de uma sequência de placas de madeira ordenadas, do som mais grave, à esquerda, para o mais agudo, à direita, onde cada placa está sobre um tubo de alumínio, percutem-se essas placas de madeira utilizando baquetas, com cabeças, que podem ser de borracha ou madeira dura, ou outro tipo de material de acordo com o timbre



Xilofone de um plano
com uma oitava musical

desejado. As placas são feitas com todo o cuidado, em madeira seca, cortadas em diferentes tamanhos com precisão e montadas sobre uma moldura trapezoidal longa. Normalmente a disposição das placas é feita em dois planos. No primeiro plano são colocadas as placas correspondentes às teclas brancas do piano e no segundo plano, as correspondentes às teclas pretas. No entanto podemos posicionar as placas num só plano. As madeiras utilizadas geralmente são o carvalho, a nogueira e o jacarandá, onde conseguimos os melhores tons do xilofone.

Podemos construir em casa um xilofone observando alguns requisitos preliminares tais como a utilização de uma vara maciça de madeira, com poucos nós; cortes paralelos, de diversos comprimentos, satisfazendo a progressão geométrica entre as placas; e, a colocação das placas na sua base trapezoidal.

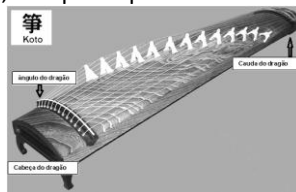
Para podermos efetuar o corte de cada placa, devemos saber o seu comprimento. Consideremos, por exemplo, uma vara de uma polegada por polegada e meia, onde iniciaremos o seu corte com uma placa de 10cm de comprimento, que corresponde a um som mais agudo. A próxima placa deve ter o comprimento de 10,6cm (arredondando o produto de $10 \times 1,059463$), para a próxima, o comprimento de 11,2cm (arredondando o produto de $10,6 \times 1,059463$), depois as placas devem ter os comprimentos iguais a 11,9cm, 12,6cm, 13,4cm, 14,2cm, 15cm, 15,9cm, 16,8cm, 17,8cm, 18,9cm e a placa correspondente a oitava abaixo 20cm, assinalando assim, cada um dos doze semitons existentes numa oitava.

Apesar de muita matemática envolvida, esta não é complicada e até é divertida. Podemos também construir um instrumento de corda, pois este satisfaz as mesmas relações matemáticas para os trates – pequenas divisões de metal feitas nos braços desses instrumentos, bem como instrumentos de sopro, como a “flauta de pan”, em que os tubos são cortados com as mesmas dimensões das utilizadas para as placas do xilofone, ou proporcionais a estas. De modo geral, todos os instrumentos obedecem à mesma relação entre as frequências, ou seja, a raiz duodécima de dois.

Texto original publicado em 1 de agosto de 2013

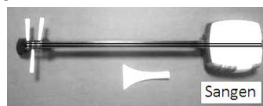
O Koto e a sua partitura numérica

O Koto é um dos instrumentos musicais tradicionais japoneses de cordas dedilhadas, da família dos cordofones, composto por uma caixa-de-ressonância feita com a madeira tradicional do Japão e com diversas cordas. A sua história é longa e remota ao século VI, época do imperador Kimmei (509 — 571), o 29.º Imperador do Japão, e durante muitos séculos a sua música foi apreciada e tocada pela nobreza. O Koto foi importado da China e inicialmente possuía sete cordas. Existem variações desse instrumento com modelos de treze cordas, de dezassete cordas, de vinte e uma cordas e de oitenta cordas.



No século XVII, o músico e compositor cego japonês Yatsushashi Kengyo (1614 – 1685) fundou um estilo independente, e um livro contendo as suas principais partituras musicais, que são executadas até hoje, foi impresso em 1664. Segundo informações, o nome *Kengyo* é um título dado aos músicos cegos que são altamente qualificados. Yatsushashi criou as afinações tradicionais para o Koto: Hira e Kumoi. Não devemos confundir afinações com escalas. De modo genérico, a afinação corresponde ao processo de produzir um som equivalente a outro por comparação. A escala, por sua vez, é formada por intervalos, maiores, justos ou menores, em relação à tónica, que é a sua primeira nota.

Ainda no século XVII o instrumento tornou-se popular como acompanhamento de dança e como conjunto formado juntamente com outros dois instrumentos: o Shakuhachi, um instrumento de sopro, e o Sengen, um instrumento de três cordas.



O Koto moderno possui treze cordas que são feitas de seda, ou nylon, e esticadas com a mesma tensão sobre *trastes móveis* chamados “pontes” (*Kotoji*). O corpo do Koto é constituído por duas pranchas de madeira com aproximadamente 185 centímetros de comprimento e 27 centímetros de altura, formando a caixa-de-ressonância. A madeira utilizada na construção do Koto é o kiri, uma madeira originária da China, Coreia e Japão, tolerante ao frio invernal, geadas e poluição ambiental, bem como, resistente aos incêndios, pois rebrota a partir das suas raízes.

Por debaixo de cada uma das treze cordas do Koto existe uma só “ponte” que eleva a corda permitindo-lhe vibrar quando tocada. As cordas produzem o som de acordo com a localização e a posição de sua respetiva ponte, que como é móvel, pode ser deslocada, levantada ou abaixada, durante a execução de uma música, alterando, por conseguinte, a afinação da corda a que corresponde.

O som do Koto é produzido pelo dedilhar das suas cordas usando três *plectros*, *palhetas*, ou “*unhas*” artificiais, (*Tsume*) de marfim que são fixas por pequenos cintos em três dedos: o polegar, o indicador e o dedo médio, da mão direita, utilizada para o efeito. O modo de tocar cada sequência de caracteres é determinado pela posição da “ponte” sobre o corpo e pela tensão da corda. Por vezes, a posição da “ponte” é modificada pelo músico, com a mão esquerda, alterando o tom durante a execução de uma peça. Cada corda pode dar origem a uma maior ou menor tonalidade empurrando ou relaxando a corda, de modo que o Koto possa mudar os seus sons continuamente.

A partitura utilizada para a escrita da música tocada no Koto é diferente da partitura normalmente utilizada em outros instrumentos, isto é, a partitura tradicional italiana. A partitura tradicional italiana deriva do trabalho do monge italiano beneditino Guido d'Arezzo (cerca de: 992 – 1050), criador do sistema de notação musical com quatro linhas horizontais, o *tetragrama*, uma vez que “tetra” significa “quatro” em grego, que deu origem à atual pauta musical com cinco linhas horizontais, o *pentagrama*, visto que “penta” significa “cinco” em grego, onde cada nota ocupa uma posição na pauta de acordo com a nota desejada. Para além desse contributo, d'Arezzo idealizou o solfejo, um sistema de ensino musical que permitia ao estudante cantar os nomes das notas. Para tal, também criou os nomes pelos quais as notas são conhecidas atualmente, ou seja, Dó, Ré, Mi, Fá Sol, Lá e Si, como substituição do sistema de letras: A (Lá), B (Si), C (Dó), D (Ré), E (Mi), F (Fá) e G (Sol), que eram usadas anteriormente. Os nomes das notas musicais foram retirados de um texto sagrado em latim das sílabas iniciais do Hino a São João Batista:

Ut *queant laxis (Ut)*

Resonare *fibris (Re)*

Mira *gestorum (Mi)*

Famuli *tuorum (Fa)*

Solve *polluti (Sol)*

Labii *reatum (La)*

Sancte *Ioannes (San)*

Que significa: "Para que teus grandes servos possam ressoar claramente a maravilha dos teus feitos, limpe nossos lábios impuros, ó São João."

Mais tarde, para facilitar o canto, a nota *Ut* passou a ser chamada de *Dó*, provavelmente, segundo algumas informações, por proposta do músico italiano Giuseppe Donizetti (1788 – 1856) que escolheu a primeira sílaba do seu sobrenome para essa nova denominação e a nota *San* passou a ser chamada de *Sí*, por serem as iniciais em latim de São João: *Sancte Ioannes*.

Não seguindo a partitura tradicional italiana, a partitura para o Koto é geralmente escrita na vertical, de cima para baixo e da direita para a esquerda, utilizando os treze caracteres, ideogramas japoneses representativos dos números de 1 a 10, seguidos dos caracteres "toe" "i" e "kin", pois, no Koto, cada uma das cordas possui o seu próprio nome de acordo com esses dez numerais japoneses e os três caracteres.

一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	斗	為	巾
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	toe	i	kin
Ich	Ni	San	Shi	Go	Roku	Nana	Hachi	Kyu	Zyu			

As cordas do Koto, a partir do seu lado inferior, recebem os seguintes nomes: Ich (1), Ni (2), San (3), Shi (4), Go (5), Roku (6), Shichi (ou, Nana) (7), Hachi (8), Kyu (9), Zyu (ou, Ju) (10), Toe (11), I (12), Kin (13) (vide imagem). O ideograma para o número “um” (*ichi*) corresponde à corda mais grossa, sendo a corda de menor som.

Uma das mais famosas peças de música de Koto é "Sakura Sakura". Esta peça é uma das pedras preciosas da cultura japonesa. "Sakura" significa "flor de cerejeira" em japonês. E a composição mais conhecida, segundo alguns relatos, é a de Yatsuhashi intitulada *Rokudan no Shirabe*, que significa “Estudo (*Shirabe*) de (no) Seis Ciclos (*Roku + dan*)” (imagem), contendo todas as técnicas básicas para tocar o Koto. Cada ciclo (*dan*) possui 52 compassos e a peça possui seis (*roku*) variações, que inicia devagar e aumenta a rapidez até ao final.

九 八 巾 為 八 巾 為	十 九 巾 為 九 巾 為	五 十 巾 為 九 巾 為	一 五 巾 為 四 巾 為	五 巾 為 三 巾 為	六 段 の 調
斗 十 八 巾	九 巾 為 一 二 十 七 六 七	九 巾 為 一 二 十 七 六 七	一 二 巾 為 一 五 二 一 二	三 四 八 七 六 七	
五 十 九 十	斗 五 十 巾 為	斗 五 十 巾 為	六 巾 為 一 五 七	一 五 巾 為 四 巾 為	
斗 十 九 十 九 八	八 九 巾 為 斗 十	九 巾 為 一 二 十 七 六 七	三 四 八 七 六 七	九 八 七 六 七	等 半 調 子

Rokudan no Shirabe
Estudo em Seis Ciclos

Atualmente existem duas correntes para o Koto: a Ikuta Ryu e a Yamada Ryu. A escola Ikuta, fundada no final do século XVII por Ikuta Kengyo (1656 – 1715), baseava-se na transposição para o Koto das fórmulas existentes para os instrumentos Shamisen e Sengen. A característica fundamental dessa escola está em sua ênfase nas técnicas instrumentais. A escola Yamada, fundada no final do século XVIII por Yamada Kengyo (1757 – 1817), baseava-se em narrativas, dando um maior destaque ao canto. Tecnicamente o estilo de execução das duas escolas também é diferente, pois, o formato da “unha” é diferente. No estilo Ikuta, a unha tem o formato retangular, e no estilo Yamada, é adotado o formato oval. Essa diferença faz com que os instrumentistas também se sentem de maneira diferente com relação ao instrumento, porém, como o Koto assemelha-se a um dragão, estes ajoelham-se junto a extremidade direita, considerada a cabeça do dragão. No entanto, o instrumentista da escola Ikuta senta num ângulo oblíquo, enquanto o da escola Yamada, senta em ângulo reto. A posição que a mão direita toca as cordas também é diferente. Na escola Ikuta toca-se com a mão inclinada em relação às cordas, e na escola Yamada toca-se com a mão na posição vertical em relação às cordas.

Como podemos notar, direta ou indiretamente, pelos ângulos, posições, numerais, a Matemática está presente e na música em geral é uma constante, quer na construção de um instrumento, quer na própria evolução musical.

1.	5.
5.	7.
4.	3.
3.	1. 2.
1. 2.	1. 2.
o	o
1. 2.	3. 4.
5.	3. 4.
	8.
1. 2.	7.
1. 2.	6.
	7.
transcrição numérica	

Texto original publicado em 10 de março de 2016

Problemas clássicos da Geometria

Hoje em dia, com a diversidade de *software* de geometria e programas de construções gráficas, perdeu-se a satisfação de um traçado, utilizando uma régua sem escala e um compasso.

Sabemos que a régua é usada para traçar partes de retas pela ligação de quaisquer dois dos seus pontos, visto que a reta é infinita nos seus dois sentidos, e o compasso é utilizado para construir circunferências, onde todos os pontos de uma mesma circunferência têm a mesma distância, o raio, a um mesmo ponto, o seu centro.

Mas onde está o fascínio e o desafio destes instrumentos?

Voltemos atrás no tempo, por volta da época de Tales de Mileto (cerca de 640 a.C. — 550 a.C.), Pitágoras de Samos (cerca de 580 a.C. — 500 a.C.), Euclides de Alexandria (cerca de 360 a.C. — 295 a.C.), Arquimedes de Siracusa (cerca de 287 a.C. — 212 a.C.), entre outros sábios da Antiga Grécia, em que as construções, envolvendo a régua e o compasso, tiveram um papel desafiador na resolução de determinados problemas de geometria.

Surgem, por estas alturas, três problemas que desempenharam um papel importante na geometria da Antiga Grécia. Algumas das soluções apresentadas para esses problemas deram origem a várias teorias, curvas e construções, mas nenhuma dessas soluções utilizou uma régua ou um compasso.

Estes famosos problemas clássicos da geometria grega são a *quadratura do círculo*, a *trisseção do ângulo* e a *duplicação do cubo*. Mas porque são tão importantes e o que há de desafiador neles?

A *quadratura do círculo* foi um problema proposto inicialmente pelo filósofo grego Anaxágoras de Clazómenas (cerca de 499 a.C. — 428 a.C.) e consistia em construir um quadrado com a mesma área de um círculo, utilizando apenas uma régua e um compasso.

Como sabemos, a área de um círculo é calculada pela fórmula $A_o = \pi r^2$, onde π (Pi) é a famosa constante – aproximadamente 3,14 – e r é o raio do círculo. Por sua vez, a área de um quadrado é obtida multiplicando dois de seus lados, que são iguais, ou seja, $A_o = l^2$.

Assim, para que a área de um quadrado seja igual a área de um círculo, o lado do quadrado terá que ser $l = r\sqrt{\pi}$. Ora, é impossível obter o segmento $r\sqrt{\pi}$ por meio da régua e do compasso.

A *trisseccão do ângulo* foi outro problema clássico da geometria grega envolvendo construções com a régua e o compasso e baseia-se em obter, dado um ângulo qualquer, um outro ângulo com um terço da amplitude do ângulo dado.

O problema da trisseccão surge naturalmente após o da bissecção do ângulo. Os gregos sabiam trissectar alguns ângulos, entre eles, o ângulo de amplitude igual a 90° e o ângulo de amplitude igual a 180° .

Notemos que se o ângulo dado for de amplitude igual a um múltiplo de 45° o problema tem solução, pois algebricamente a amplitude da trisseccão desse ângulo é também igual a um múltiplo de 15° . Por exemplo, se a amplitude do ângulo inicial for igual a 135° que é igual a $3 \times 45^\circ$, a amplitude do ângulo trissectado será igual a $45^\circ = 3 \times 15^\circ$. Facilmente, com a régua e o compasso, conseguimos construir o ângulo resultante da trisseccão dos ângulos múltiplos de 45° , mas algumas das soluções obtidas não são por construção direta dessa trisseccão.

Se o ângulo for diferente de um múltiplo de 45° , o problema torna-se mesmo impossível de ser obtido pela construção com a régua e o compasso, mesmo que indiretamente. Hoje em dia sabemos que, por exemplo, um ângulo de 60° não pode ser trissectado apenas utilizando esses instrumentos.

A impossibilidade da resolução com a régua e o compasso deste problema foi provada em 1837 pelo matemático francês Pierre Laurent Wantzel (1814 – 1848), apoiando-se nos resultados do matemático alemão Johann Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855), publicados em 1801.

A *duplicação do cubo* foi mais um problema de geometria euclidiana que não possui solução por meio da régua e do compasso. O problema consiste em encontrar um método em que dada a aresta de um cubo obter, através desses instrumentos, a aresta de outro cubo cujo volume seja o dobro do volume do cubo inicial.

As origens deste famoso problema está relacionada com uma lenda ligada a Péricles (cerca de 495 a.C. – 429 a.C.), um dos principais líderes de Atenas, que morrera vitimado da epidemia que assolou parte da população daquela cidade-estado. Desesperados por essa enorme perda, os habitantes consultaram o oráculo de Apolo em Delos para saber como podiam combater a doença. Em resposta foi-lhes dito que deveriam duplicar o altar de Apolo, que possuía o formato de um cubo. Logo os atenienses dobraram as dimensões do altar, ou seja, as arestas passaram a ter o dobro do comprimento inicial, mas isso não afastou a peste, porque o seu volume fora multiplicado por oito e não por dois.

Com essa lenda, este problema também ficou conhecido como problema de Delos ou problema *deliano*.

Para termos a solução correta a esta questão, isto é, obtermos o dobro do volume do cubo inicial, o comprimento da aresta deste novo cubo deverá ser igual à aresta inicial multiplicada por $\sqrt[3]{2}$, ou seja, $a\sqrt[3]{2}$, onde a é o comprimento da aresta do primeiro cubo. Consequentemente, o seu volume será $a\sqrt[3]{2} \times a\sqrt[3]{2} \times a\sqrt[3]{2} = 2a^3$, o dobro do volume do cubo original. É evidente que não conseguimos obter, com a régua e o compasso, o segmento $a\sqrt[3]{2}$ e assim, o problema não tem solução por meio desses instrumentos.

Quase todo o caminho da geometria dos antigos gregos foi influenciado pelas tentativas de resolução desses problemas. Para as soluções obtidas neste período foram utilizadas outras curvas como, por exemplo, a trissectriz ou a quadratriz de Hípias, que servia tanto para trissectar um ângulo, bem como, para quadrar um círculo.

A reta e a circunferência, obtidas através da régua e do compasso, respetivamente, eram entendidas, segundo o filósofo grego Platão de Atenas (cerca de 427 a.C. – 347 a.C.), como curvas perfeitas e como tal deveriam ser suficientes para executar quaisquer construções. Talvez fosse esse um dos motivos da busca, pelos gregos, de uma solução usando apenas esses instrumentos.

É certo que estes três problemas desafiaram os geómetras gregos, bem como, com o passar dos anos, as gerações de matemáticos.

Texto original publicado em 23 de maio de 2013

Simetrias e Isometrias – qual a diferença?

Volta e meia deparamos com objetos que possuem determinadas características geométricas que saltam às nossas vistas. Observadas algumas das suas características, os matemáticos ora dizem que esses objetos possuem simetrias, ora afirmam que esses objetos foram construídos através de isometrias. Mas do que falam? Qual a diferença entre simetria e isometria? Quando devemos usar um termo ou outro?

A simetria é usada pelo homem em suas produções desde os tempos mais primitivos. O ser humano não poderia deixar de colocar a simetria em suas obras, uma vez que a própria essência formal de todos os seres é a simetria. Apesar de termos vestígios deste conceito destes os tempos pré-históricos, a teoria das simetrias e a arte ornamental tem suas raízes na antiga Grécia.

Assim, a palavra simetria tem suas raízes na filosofia e estética grega, onde era usada para expressar equilíbrio, proporção, e era sinónimo de harmonia, e deriva da palavra grega συμμετρία (“sin” – com; “métron” – medida). O termo simetria só entra nas ciências em 1830, com o começo do estudo da classe dos cristais e sua análise baseou-se na teoria dos grupos, introduzida pelo matemático francês Evariste Galois (1811 – 1832).

Com o desenvolvimento das ciências naturais, tais como a cristalografia, a química, a física, entre outras, as estruturas simétricas tornaram-se uma importante área de estudo na geometria. Mas não só nesses campos observamos a existência de simetria.

Ao longo dos tempos, a simetria teve várias definições e conceitos. Fídias (cerca de 492 a.C. – 432 a.C.), escultor grego, define a simetria como “a devida disposição, o equilíbrio e a correspondência adequada das “formas parciais” em qualquer totalidade formal”. Eudoxo de Cnido (cerca de 400 a.C. – 347 a.C.) filósofo, matemático e astrónomo grego formula a doutrina das esferas homocêntricas que suponha uma terra fixa e imóvel. Escreve também uma “teoria das proporções”.

Desde o séc. VI a.C., sob a orientação de Pitágoras (cerca de 569 a.C. – 475 a.C.), que um grupo de matemáticos gregos estuda pela primeira vez os poliedros regulares. Platão (cerca de 427 a.C. – 347 a.C.) filósofo grego, também faz referências à simetria. Marcus Vitruvius, arquiteto romano, por volta de 80 a.C., define a simetria, numa forma bem generalizada, como “a harmonia apropriada que resulta dos membros da própria obra e a correspondência modular que resulta das partes separadas em relação à aparência de todo o corpo”.

Na “idade das trevas”, entre os séculos V e IX, um relacionamento estreito leva à minimização das ideias abertas e fortes da simetria como algo dinâmico, mais e mais, até transformá-la na vulgar e limitadíssima noção de reflexão sobre um eixo ou plano.

A volta da simetria começa realmente com Leonardo da Vinci (1452 – 1519), que costumava determinar de maneira sistemática todas as simetrias possíveis dos edifícios monumentais com vista a projetar de maneira harmoniosa eventuais extensões e acrescentos, sem destruir a simetria da parte central. A simetria começa a ressurgir com toda a sua adaptabilidade, e do renascimento em diante, a simetria é algo implícito na noção de desenho.

Podemos então definir a *simetria* como a operação que mantém, através de determinadas transformações geométricas, um dada figura geométrica, isto é, um conjunto de pontos do plano, invariante. Um objeto que possui simetria pode ser convertido nele próprio, a partir de uma das suas partes, ficando numa posição indistinta da outra. Uma figura geométrica com simetria possui uma certa regularidade no plano.

A palavra isometria deriva da palavra grega *ισομετρία* (“iso” – mesma; “métron” – medida). A *isometria* é uma transformação geométrica que, aplicada a uma figura geométrica, mantém as distâncias entre pontos. Ou seja, os segmentos da figura transformada são geometricamente iguais aos da figura original, podendo variar a direção e o sentido. No plano euclidiano distinguimos as seguintes *transformações isométricas*: reflexão em reta, translação, rotação e reflexão deslizante. Esse resultado, de 1831, também é conhecido por “Teorema da classificação das isometrias” e deve-se ao historiador e geômetra francês Michel Chasles (1793 – 1880).

Uma *isometria* passa a ser designada por *simetria de uma figura geométrica* se, e só se, essa isometria deixa a figura, após a transformação, invariante. O conjunto de todas as simetrias de uma figura geométrica com a operação de composição é o grupo de simetrias dessa figura, e tal figura é denominada de *ornamento*.

Podemos dizer que um ornamento possui: *simetria axial*; *simetria translacional*; *simetria rotacional*, se, respetivamente, fazem parte das simetrias desse ornamento a reflexão numa reta, a translação, a rotação. Se a rotação for de 180° , dizemos que há *simetria central*.

Distinguimos os seguintes tipos de grupo de simetrias:

O *Grupo de rosácea* (ou grupo cristalográfico de dimensão 0) é um grupo, finito, que não contém translações de vetor não-nulo, ou seja, não possui simetria translacional no seu grupo de simetrias. Possui 2 grupos: o

grupo cíclico, com apenas rotações, e o *grupo diedral*, com reflexões e rotações. Os ornamentos correspondentes denominam-se *rosáceas*. A existência e completa classificação desse grupo de simetria foram atribuídas a da Vinci;

O *Grupo de friso* (ou grupo cristalográfico de dimensão 1) é um grupo, infinito, que tem translações de vetor não-nulo, numa só direção. Os ornamentos são denominados *frisos*. Existem 7 grupos de simetria dos frisos e esses foram deduzidos, independentemente, em 1924, pelo professor húngaro George Pólya (1887 – 1985) e pelo mineralogista suíço Paul Niggli (1888 – 1953);

O *Grupo de papel de parede* (ou grupo cristalográfico de dimensão 2) é um grupo, infinito, que tem translações em 2 direções diferentes. Os ornamentos são designados *pavimentos*. Existem 17 grupos distintos. Entre 1885 e 1890, E.S. Fedorov, estudando cristalografia, demonstrou a existência de unicamente 17 grupos de simetria do plano. Em 1924, Pólya e Niggli redescobriram esses grupos;

O *Grupo espacial* (ou grupo cristalográfico de dimensão 3) é um grupo que tem translações em 3 direções diferentes. Os ornamentos denominam-se *cristais*. Existem 230 grupos espaciais distintos. A determinação do grupo de simetrias no espaço foi realizada, por volta de 1830, pelo médico e mineralogista alemão Johann F.C. Hessel (1796 – 1872), mas o seu trabalho não teve reconhecimento dos seus pares, tendo mesmo permanecido no desconhecido até à sua reedição em 1897. Hessel classificou, em 1831, os 32 grupos tridimensionais que correspondem aos grupos finitos de simetria. Mais tarde, em 1848, a mesma determinação foi redescoberta por Auguste Bravais (1811 – 1863), que de um modo mais elegante, demonstra, geometricamente, a existência das 32 classes cristalinas e das 14 redes tridimensionais as quais levam o seu nome.

Vários matemáticos desenvolveram estudos sobre cristalografia, uns com base na geometria, outros com base em outras ciências e desde então têm sido estudados exaustivamente e aplicados não só na cristalografia, como também em diversas manifestações artísticas, bem como na arquitetura. O holandês M.C. Escher (1898 – 1972) é um dos artistas que usou a classificação matemática dos pavimentos.

Como vimos, quer a noção de simetria, quer a noção de isometria, são muito importantes nas artes, em matemática, e em diversas ciências, cada qual com seu papel definido.

Texto original publicado em 12 de dezembro de 2013

Os 13 sólidos Arquimedianos

Durante muitos anos estudamos os cinco sólidos platônicos que são poliedros regulares convexos constituídos pelo mesmo tipo de polígono regular em suas faces. Mas há muitos outros tipos de sólidos.

Historicamente, os poliedros regulares foram associados com algumas características do ser humano por causa das suas próprias características geométricas. O filósofo grego Platão de Atenas (cerca de 428 a.C. – 347 a.C.) apresenta, em sua obra “Timeu”, uma associação entre esses cinco sólidos – o tetraedro regular (quatro triângulos equiláteros), o hexaedro regular (seis quadrados), o octaedro regular (oito triângulos equiláteros), o icosaedro regular (vinte triângulos equiláteros) e o dodecaedro regular (doze pentágonos regulares) – e os quatro elementos – o fogo, a terra, o ar e a água – e o universo, respetivamente. Para Platão, o universo era formado por um corpo e uma alma, e na matéria havia porções limitadas por triângulos regulares e quadrados, formando elementos que se diferenciavam por sua forma periférica. Lembramos que os poliedros (do grego: poli – muitas; edros – faces) são convexos quando estão todos para o mesmo lado em relação ao plano que contém qualquer uma das suas faces, os polígonos (do grego: poli – muitos; gonos – ângulos).

Pelo lado artístico, os sólidos platônicos são muito utilizados e apreciados por causa das suas simetrias, principalmente no Renascimento, onde em 1480, o pintor Piero della Francesca (1415 – 1492) faz um estudo muito completo em sua obra “*Libellus De Quinque Corporibus Regularibus*”. Nessa mesma obra o autor encontra-se com quatro outros tipos de poliedros que apresentam faces regulares, mas não todas com o mesmo polígono, os denominados *sólidos arquimedianos*.

Os sólidos arquimedianos, ou sólidos de Arquimedes, ou poliedros semirregulares, são poliedros convexos cujas faces são polígonos regulares de mais de um tipo, enquanto nos sólidos platônicos, todas as faces são polígonos regulares de um único tipo. Esses sólidos têm o nome do matemático, físico, engenheiro, inventor e astrónomo grego Arquimedes de Siracusa (cerca de 287 a.C. – 212 a.C.), pois foi quem os estudou no século III a.C.. Infelizmente, de acordo com geómetra e historiador norte-americano Howard Eves (1911 – 2004), os trabalhos originais de Arquimedes, que tratam desses sólidos, estão perdidos.

Para além de Piero della Francesca, durante a Renascença, muitos artistas e matemáticos foram gradualmente redescobrimdo os sólidos arquimedianos. As descobertas ficaram completas por volta de 1619, pelo

astrónomo e matemático alemão Johannes Kepler (1571 – 1630), na sua obra “*Harmonices Mundi*”, onde apresenta um estudo sistematizado.

Estes poliedros semirregulares têm a particularidade de em torno de todos os seus vértices haver o mesmo arranjo de polígonos, sendo essa uma das exigências para ser sólido arquimediano.

Curiosamente todos os sólidos arquimedianos podem ser colocados dentro de um tetraedro regular, de modo que quatro das suas faces fiquem sobre as faces do tetraedro.

Existem apenas treze sólidos arquimedianos que são todos obtidos através de transformações nos sólidos platónicos, proporcionando uma forte ligação entre eles. Onze desses sólidos são obtidos através de cortes (também denominados truncamentos), cada vez mais profundos, nos sólidos platónicos. Esses são: o *tetraedro truncado*; o *cubo truncado*; o *cuboctaedro*; o *rombicuboctaedro*; o *cuboctaedro truncado*; o *octaedro truncado*; o *icosaedro truncado*; o *dodecaedro truncado*; o *icosidodecaedro*; o *rombicosidodecaedro* e o *icosidodecaedro truncado*. Os dois últimos são obtidos por snubificação de dois sólidos platónicos: o *cubo snub* e o *dodecaedro snub*. A snubificação é, por assim dizer, o processo de afastar as faces de um poliedro preenchendo os espaços formados entre elas com outras faces (polígonos), em alguns caso a rotação das faces é necessária. Por exemplo, o cubo snub é obtido quando afastamos as faces do cubo, giramos 45° e preenchemos os espaços formados entre as faces com 32 triângulos equiláteros.














Através da tabela apresentada (vide imagem), podemos observar que os sólidos arquimedianos, a exceção do *rombicuboctaedro*, também satisfazem a relação de Euler, em que o número de faces adicionado ao número de vértices e subtraído o número de aresta é igual a 2, ou seja,

$$F + V - A = 2.$$

Segundo a Psicogeometria, aos 13 sólidos arquimedianos correspondem os 13 toróides horizontais que estão ao longo do corpo humano e que se dispõem ordenadamente e transversalmente à medula espinhal, até ao alto da cabeça com o dodecaedro snub. Esses servem para distribuir o biocampo humano e regular o seu ambiente interno, de modo a manter uma condição estável mediante múltiplos ajustes de equilíbrio dinâmico.

Os *duais* dos sólidos arquimedianos, ou seja, os sólidos obtidos pela união dos pontos centrais das faces adjacentes dos sólidos arquimedianos, são chamados sólidos de Catalan, descritos pela primeira vez em 1865 pelo

matemático belga Eugène Catalan (1814 – 1894), mas, essa é uma outra história para um outro dia...

Sólido Arquimediano		Faces	Arestas	Vértices	Composição
A1 Tetraedro Truncado		8	18	12	4 Triângulos equiláteros 4 Hexágonos regulares
A2 Cubo Truncado		14	36	24	8 Triângulos equiláteros 6 Octógonos regulares
A3 Cuboctaedro		14	24	12	8 Triângulos equiláteros 6 Quadrados
A4 Rombicuboctaedro		26	42	24	8 Triângulos equiláteros 18 Quadrados
A5 Cuboctaedro truncado		26	72	48	12 Quadrados 8 Hexágonos regulares 6 Octógonos regulares
A6 Cubo snub		38	60	24	32 Triângulos equiláteros 6 Quadrados
A7 Octaedro Truncado		14	36	24	6 Quadrados 8 Hexágonos regulares
A8 Icosaedro Truncado		32	90	60	12 Pentágonos regulares 20 Hexágonos regulares
A9 Dodecaedro Truncado		32	90	60	20 Triângulos equiláteros 12 Decágonos regulares
A10 Icosidodecaedro		32	60	30	20 Triângulos equiláteros 12 Pentágonos regulares
A11 Rombicosidodecaedro		62	120	60	20 Triângulos equiláteros 30 Quadrados 12 Pentágonos regulares
A12 Icosidodecaedro truncado		62	180	120	30 Quadrados 20 Hexágonos regulares 12 Decágonos regulares
A13 Dodecaedro Snub		92	150	60	80 Triângulos equiláteros 12 Pentágonos regulares

Texto original publicado em 13 de novembro de 2014

Quadrados Mágicos – Quadrados Mágicos Planetários

Um *quadrado mágico* é uma tabela de números inteiros, com a mesma quantidade de linhas e colunas, cuja soma, de todos os valores de qualquer uma das suas linhas, ou das suas colunas, ou de uma das suas duas diagonais, é sempre a mesma. Esse resultado invariável é chamado *constante* do quadrado. O número de quadrículas de uma linha, ou de uma coluna, é denominado de *módulo* ou *ordem* do quadrado. Se, por exemplo, um quadrado for de ordem 4, isto significa que possui 4 linhas e 4 colunas, e contém um número total de 16 quadrículas.

Os quadrados mágicos foram encontrados em diversas culturas, mas não se conhece bem a sua origem. Desde a antiguidade os quadrados mágicos intrigaram muitas pessoas, mantendo sempre uma ligação com o mundo da magia, pois atribuíam-lhes propriedades místicas. Por exemplo, no Egito, gravados em pedras ou metais, eram usados como amuletos, visto que acreditavam que tinham qualidades astrológicas, divinatórias e preveniam doenças.

Parte da história destes quadrados pode ser encontrada no livro chinês Yih King, escrito há cerca de 3000 anos e repleto de simbologia. Nesse livro encontramos o quadrado mágico de ordem 3, conhecido como *Lo Shu*, preenchido com os números de 1 até 9, em que a soma de cada linha, coluna ou diagonal é igual a 15. Na primeira linha desse quadrado estão os números 4, 9 e 2, na segunda linha os números 7, 5 e 3 e na última linha os números 8, 1 e 6. O número 5 representa a Terra e à sua volta estão distribuídos os quatro elementos principais: os metais 4 e 9; o fogo 2 e 7; a madeira 3 e 8; e a água 1 e 6. Esse quadrado com nove números era considerado um amuleto de alta eficiência, que combatia a peste e livrava da mordida do escorpião.

No ocidente, os quadrados mágicos foram referidos pela primeira vez em 130 na obra do autor grego Téon de Esmirna (c. 70 – 135). Por volta do século nono, os quadrados mágicos foram usados pelos árabes nos cálculos de horóscopos, sendo assim, introduzidos no mundo da astrologia. Em 1300 um sábio greco-bizantino, Manuel Moschopoulos, inspirado nos tratados árabes, escreveu um tratado sobre quadrados mágicos. O italiano Luca Bartolomeu de Pacioli (1445 — 1517) trabalhou com uma grande variedade de quadrados mágicos, tendo também influenciado a mística ocidental.

Na Idade Média os quadrados mágicos se tornaram muito populares pelo seu uso em Pantáculos (palavra de origem grega, composta por *pan-*, que significa "tudo", e *-kleo*, que significa "honra") e Talismãs (palavra de origem árabe *Tilasm*, e também de origem grega *Teleo* que significa "consagrar") para a proteção dos seus portadores.

O livro mais antigo sobre esse tema é *Occulta Philosophia* de Heinrich Cornelius Agrippa von Nettesheim (1486 – 1535), um médico e matemático alemão da Renascença, escrito entre 1507 e 1510, cujo capítulo XXII do Livro II é dedicado aos quadrados mágicos planetários. Os sete planetas, conhecidos até então, aparecem nas ordens de 3 à 9 dos quadrados mágicos. A razão de iniciarem na ordem 3 é devido ao de ordem 1 não ser considerado, por alguns matemáticos, como quadrado mágico, porém segundo Cornelius Agrippa esse quadrado representava a eternidade, e o de ordem 2 ser inexistente.

Assim, o quadrado mágico de ordem 3, com 9 elementos, estava associado a Saturno, o de ordem 4, com 16 elementos, associado a Júpiter, o de ordem 5, com 25 elementos, a Marte, o de ordem 6, com 36 elementos, representava o Sol, o de ordem 7, com 49 elementos, seria Vénus, o de ordem 8, com 64 elementos, associado a Mercúrio e o de ordem 9, com 81 elementos, representava a Lua. Naquela altura não eram conhecidos os planetas Netuno e Plutão, o Sol e a Lua eram considerados planetas e a Terra era vista como um planeta fixo. Posteriormente associaram o quadrado mágico de ordem 10 à Terra.

Em 1801, o inglês Francis Barret no capítulo XXVIII do Livro I do seu livro *O Magus*, reproduz o capítulo do livro de Agrippa sob o nome de *As Tábuas Mágicas dos Planetas*, onde os diagramas dos quadrados mágicos estão melhor definidos. Os quadrados mágicos ainda são trabalhados por Paracelso, pseudônimo de Phillipus Aureolus Theophrastus Bombastus von Hohenheim (1493 — 1541), um médico, alquimista, físico, astrólogo e ocultista suíço-alemão, também por Athanasius Kircher (c. 1601 – 1680), um jesuíta alemão, geólogo e médico, entre outros estudiosos desse tema.

Como vemos, o número de quadrículas de um quadrado mágico é igual a sua ordem multiplicada por ela própria. Assim, sabendo a ordem, sabemos a quantidade de quadrículas que cada quadrado mágico planetário e os respetivos números que serão colocados em cada quadrícula iniciando pelo número 1.

O número constante da soma dos números das n linhas, ou das n colunas e ou das n diagonais de um determinado quadrado mágico de ordem n é o número planetário, e a soma total do quadrado é denominada

o *número místico*. O número planetário é a média aritmética entre o número de ordem e o seu cubo, isto é, $\frac{n+n^3}{2}$, e o número místico é a soma de todos os números do quadrado mágico, ou a metade do produto do número de quadrículas pelo número de quadrículas adicionadas de uma unidade. Na tabela seguinte apresentamos na primeira coluna a ordem do quadrado mágico, na segunda, o astro, na terceira, o número planetário e na quarta o respetivo número místico.

Ordem	Astro	Nº planetário	Nº místico
3	Saturno	15	45
4	Júpiter	34	136
5	Marte	65	325
6	Sol	111	666
7	Vénus	175	1225
8	Mercúrio	260	2080
9	Lua	369	3321

Através da ilustração, com os quatro primeiros quadrados mágicos planetários, podemos comprovar, o número místico e verificar que a rota se mantém não só pela soma dos números das linhas, ou colunas, mas também pela soma de outras combinações de números.

4	9	2
7	5	3
8	1	6

4	14	15	1
9	7	6	12
5	11	10	8
16	2	3	13

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

6	32	3	34	35	1
7	11	27	28	8	30
19	14	16	15	23	24
18	20	22	21	17	13
25	29	10	9	26	12
36	5	33	4	2	31

Texto original publicado em 6 de junho de 2013

