



Universidade dos Açores
Departamento de Matemática

Tópicos da Teoria da Relatividade

Paulo Renato Ferreira Fragata

Ponta Delgada
abril de 2013



Universidade dos Açores

Departamento de Matemática

Tópicos da Teoria da Relatividade

Paulo Renato Ferreira Fragata

Dissertação apresentada para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática para Professores, sob a orientação do Professor Doutor Mário Alexandre Pousão da Costa Gata, do Departamento de Matemática.

Ponta Delgada

abril de 2013

Agradecimentos

“Todos temos momentos brilhantes, mas, a maioria deles são graças ao estímulo de outra pessoa.”

George Adams

À Carina, pelo apoio incondicional que me deu ao longo deste percurso e, sem o qual, teria sido muito mais difícil concretizar este objetivo.

Aos meus pais, por me terem proporcionado a educação e formação necessárias para alcançar mais esta etapa da minha vida.

Ao Professor Doutor Mário Gatta, pela sua orientação, dedicação e partilha de conhecimentos.

Aos colegas e professores do mestrado, por proporcionarem um ambiente propício para o cultivo do saber, do conhecimento, do trabalho, da entreaajuda e da amizade.

Aos meus restantes familiares e amigos, por fazerem parte da minha vida e lhe darem um significado especial.

Resumo

Qualquer descrição física da natureza tem por base a especificação da posição e do instante em que decorre determinado acontecimento. Para tal, é necessário recorrer a um sistema de coordenadas, escolhido por cada observador, do modo que ele achar mais pertinente. Dada a generalidade na escolha do sistema de coordenadas, é útil conhecer as regras que nos permitem comparar cálculos feitos em diferentes sistemas.

No desenvolvimento da presente dissertação, apresentaremos os conceitos fundamentais da *Teoria da Relatividade Restrita* e algumas das suas aplicações. Apresentaremos, também, uma teoria alternativa, “*relatividade fraca*”, aparentemente credível, à relatividade restrita, baseada nas chamadas *transformações inerciais* e defendida pelo físico italiano Franco Selleri.

Começaremos por fazer uma breve abordagem histórica ao desenvolvimento da *Teoria da Relatividade Restrita*, focando o conflito existente entre os pressupostos da Mecânica Clássica de Newton e os do Eletromagnetismo. Focaremos o *grupo de transformações de Galileu*, que se acreditava ser válido em Mecânica e o *grupo de transformações de Lorentz*, que se revelou o necessário para a coerência do princípio da relatividade de Galileu, devidamente generalizado, com a teoria eletromagnética. Verificaremos como Albert Einstein resolveu a contradição existente entre aquelas diferentes transformações, em 1905, com a publicação do artigo histórico *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*, estabelecendo, com ele, as bases da *Teoria da Relatividade*.

Indicaremos algumas das consequências mais importantes da adoção dos princípios relativistas em Mecânica e em Eletrodinâmica.

Partindo do princípio que qualquer teoria científica é, em certa medida, fruto da compreensão que o Homem tem da natureza, em cada época histórica, e sendo, portanto, uma construção humana padecerá, naturalmente, de defeitos. Assim, dado que a *Teoria da Relatividade Restrita* foi desenvolvida no início do século XX não é de estranhar, passado todo este tempo, e tendo havido um desenvolvimento subsequente do conhecimento, que a mesma não encerre em si toda a verdade. Assim, com base nos trabalhos de diversos

investigadores, tencionamos, também, apresentar explicações alternativas, aparentemente, consistentes com resultados experimentais conhecidos, mas de grandes consequências interpretativas, nomeadamente, na questão da simultaneidade entre acontecimentos. Mencionaremos, ainda, alguns resultados experimentais que põem em causa os ditames da relatividade, tal qual a entendemos.

Abstract

Any physical description of Nature will be based on the specification of the spatial and temporal positions of events. As such, one has to resort to coordinate systems, chosen by each observer in the way he finds more suitable. Given the generality in the choice of coordinate systems, it is useful to, and indeed necessary, to know the rules allowing for the comparison between calculations performed in different systems.

In developing the present dissertation we will expose the fundamental concepts underlying the *Special Theory of Relativity* as well as some of its applications. We will also present an alternative theory, “*weak relativity*”, apparently credible, based on the so-called “*inertial transformations*” as defended by the Italian physicist Franco Selleri.

We will begin with brief historical approach to the development of the *Theory of Special Relativity*, emphasizing the conflict between the presuppositions of Newtonian mechanics versus Electromagnetism as embodied in Maxwell's equations. We will refer to the *group of Galilean transformations*, previously believed to be valid for mechanical phenomena, as well as to the *group of the Lorentz transformations*, which became necessary for the coherence between Maxwellian electromagnetism and the generalized Galilean relativity principle. We will see how Einstein resolved the contradiction between those different transformations in 1905, with the publication of the historical paper *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*, which established the basis of the *Theory of Relativity*.

We will also indicate some of the more important consequences that result from the adoption of relativistic principles both in Mechanics and in Electrodynamics.

Given the belief that any scientific theory is, in a way, the result of human understanding of nature in each historical epoch and being, consequently, a human construction, it results that it will suffer, naturally, of defects. Hence, since the *Theory of Special Relativity* was developed in the beginning of the 20th Century, it is no surprise that, after all this time and the corresponding development in knowledge, we can now say that this theory no longer contains all the possible truth. So, and based in the work of several researchers, we also pretend to expose alternative explanations, apparently consistent with known experimental results but with big interpretational consequences, namely in what

concerns the question of simultaneity between different events. We will also mention some experimental results that seem to put in question the relativistic rulings as we know them.

Índice

Agradecimentos	II
Resumo	III
Abstract	V
Índice	VII
Lista de Figuras	IX
1. Introdução	1
1.1. Enquadramento e Motivação	1
1.2. Objetivos	4
1.3. Estrutura e organização	5
2. A Relatividade de Galileu	8
2.1. As transformações de Galileu	9
2.2. Invariantes face às transformações de Galileu	12
2.2.1. A transformação das velocidades	12
2.2.2. A transformação da aceleração e da força	14
2.2.3. A transformação do momento linear e da energia	16
3. A Relatividade de Einstein	18
3.1. As transformações de Lorentz	18
3.1.1. Dedução das transformações de Lorentz	19
3.2. Relatividade Restrita	28
3.2.1. Universo de Minkowski	30
3.2.2. Métrica de Minkowski	31
3.2.3. Intervalo Relativista	32
3.2.4. Diagramas de Minkowski	34
3.2.5. Cone de luz	40
3.3. Dilatação do tempo	42
3.4. Contração do espaço	45
3.5. A transformação das velocidades	47

3.6. A transformação do momento e da energia	51
3.7. A transformação da força	56
3.8. “Paradoxo” dos Gêmeos	61
4. Eletromagnetismo relativista	66
4.1. Equações de Maxwell	66
4.2. Quadri vetor densidade de corrente	67
4.3. Transformação dos campos	73
4.4. Covariância das equações de Maxwell	81
4.5. Força de Lorentz	90
5. “Relatividade fraca”	94
5.1. Transformações gerais	95
5.2. Transformações equivalentes	105
5.3. Simultaneidade retardada e simultaneidade avançada	109
5.4. Contração do espaço	114
5.5. Dilatação do tempo	116
5.6. Transformações inerciais	120
5.6.1. Espaço e tempo para corpos em movimento	124
5.7. Dinâmica Alternativa	127
5.7.1. Transformação inercial das velocidades	128
5.7.2. Transformação inercial do momento e da energia	129
5.7.3. Transformação inercial da força	137
6. Eletromagnetismo na “relatividade fraca”	140
6.1. Transformação inercial dos campos	140
6.2. Equações de Maxwell e as transformações inerciais	146
7. Alguns aspectos particulares das diferenças entre a relatividade restrita e a relatividade fraca	150
7.1. Sinais superluminais	150
7.2. Algumas implicações “genéricas”	155
8. Conclusão	160
Bibliografia	164

Lista de Figuras

Figura 1: Referenciais S e S' de acordo com as restrições impostas. (p. 10)

Figura 2: Determinação geométrica de \vec{r}' em função de \vec{r} . (p. 10)

Figura 3: Referenciais inerciais S e S' considerados para a dedução das transformações de Lorentz. (p. 20)

Figura 4: Diagrama de Minkowski para dois referenciais. (p. 35)

Figura 5: Os acontecimentos A e B são simultâneos em S , pois ocorrem no mesmo instante t_I , contudo não são simultâneos em S' . Por sua vez, os acontecimentos A e C são simultâneos em S' , pois ocorrem no mesmo instante t'_I , mas não são simultâneos em S . A reta AB designa-se linha de simultaneidade em S e a reta AC chama-se linha de simultaneidade em S' . (p. 36)

Figura 6: Fenómeno da dilatação do tempo observado num diagrama de Minkowski. (p. 37)

Figura 7: Os acontecimentos A e B estão sobre a mesma linha do universo em S , $x = x_1$ (reta paralela a Ot), no entanto não se encontram na mesma linha do universo em S' . Os acontecimentos B e C encontram-se na mesma linha do universo em S' , $x' = x'_1$ (reta paralela a $O't'$), mas, por sua vez, tal não se verifica em S . (p. 38)

Figura 8: Fenómeno da contração do espaço observado num diagrama de Minkowski. (p. 39)

Figura 9: Classificação dos intervalos no universo de Minkowski. (p. 40 e 41)

Figura 10: Cone de luz de um acontecimento O , origem das coordenadas onde o cone de luz está definido. (p. 41)

Figura 11: Trajeto do raio luminoso visto pelo observador O' . (p. 42)

Figura 12: Trajeto do raio luminoso visto pelo observador O . (p. 43)

Figura 13: Trajeto do raio luminoso entre a fonte, o espelho e novamente a fonte, no referencial próprio da régua. (p. 45)

Figura 14: Nave espacial que se desloca face à Terra com uma velocidade constante e uniforme e dispara uma munição que se desloca relativamente a ela, na mesma direção e sentido, também, com uma velocidade constante e uniforme. (p. 51)

Figura 15: Transformações das grandezas da Mecânica, relativamente, às transformações de Lorentz. (p. 60 e 61)

Figura 16: Linha do universo do gémeo viajante, atingindo instantaneamente uma velocidade uniforme, em A , continuando a sua viagem até B onde inverte instantaneamente o sentido da mesma e regressa à Terra com a mesma velocidade uniforme até parar instantaneamente em C . O gémeo que permaneceu na Terra tem a sua linha do universo coincidente com o eixo dos tempos. (p. 63)

Figura 17: Corpo eletrificado. q é a carga, A a área da base do corpo e l o comprimento do corpo. (p. 67)

Figura 18: Corpo C de carga q_0 e volume V_0 deslocando-se com velocidade \vec{u} e \vec{u}' relativamente a S e a S' , respetivamente. (p. 69)

Figura 19: Transformações do quadrivetor densidade de corrente e dos campos elétrico e magnético face às transformações de Lorentz. (p. 93)

Figura 20: O referencial inercial S' , com coordenadas cartesianas ortogonais, desloca-se paralelamente ao eixo Ox do referencial inercial S com velocidade \vec{v} . (p. 98)

Figura 21: Referenciais inerciais S e S' , sendo que S' desloca-se a uma velocidade constante e uniforme $v < c$ face a S e consequentemente, atendendo às transformações inerciais, S' vê S a deslocar-se face a si com uma velocidade uniforme e constante $\frac{c\beta}{1-\beta^2}$, que pode ser superior a c . (p. 123)

Figura 22: Representação gráfica das funções f e g , definidas por $f(x) = \frac{1}{1-x}$ e $g(x) = \frac{x}{1-x^2}$, que representam, respetivamente, a velocidade do raio de luz visto de S' e a velocidade do referencial S face a S' . Tal como deduzido anteriormente vê-se que a

velocidade de S face a S' , dada por g , pode ser superior a c (pois $c = 1$), mas que não é superluminal, pois nunca ultrapassa a velocidade do raio de luz dada por f . (p. 123)

Figura 23: Transformações das grandezas da Mecânica, relativamente, às transformações inerciais. (p.138 e 139)

Figura 24: Troca de sinais superluminais entre dois observadores inerciais A e B com base nas transformações inerciais. ct é a linha do universo do amigo A , aquele que se encontra na Terra e ct' é a linha do universo do amigo B , aquele que partiu em viagem com uma velocidade constante e uniforme inferior a c , percorrendo os sucessivos pontos do eixo $O'ct'$. Verifica-se que a resposta (B_2) chega depois da pergunta ter sido realizada (B_1). (p. 151)

Figura 25: Troca de sinais superluminais entre dois observadores inerciais A e B com base nas transformações inerciais. ct é a linha do universo do amigo A , aquele que se encontra na Terra e ct' é a linha do universo do amigo B , aquele que partiu em viagem com uma velocidade constante e uniforme inferior a c . Verifica-se que a resposta (B_2) chega depois da pergunta ter sido realizada (B_1). (p. 153)

1. Introdução

“Se fui capaz de ver mais longe, é porque me apoiei em ombros de gigantes.”

Isaac Newton

O presente capítulo visa apresentar uma primeira abordagem ao desenvolvimento desta dissertação. Pretende, também, enquadrar historicamente a *Teoria de Relatividade Restrita* no desenvolvimento da Física Moderna e apresentar uma teoria alternativa à mesma, tendo por base os últimos estudos e investigações realizados. Visa, ainda, mostrar que a Matemática é uma ferramenta fundamental para o desenvolvimento da Física Teórica e como a partir dela é possível desenvolver teorias representativas do funcionamento do Universo que só mais tarde, com o desenvolvimento da tecnologia, podem ser demonstradas a partir da experimentação. Ainda neste capítulo especificar-se-á a estrutura e organização da presente dissertação.

1.1. Enquadramento e Motivação

Desde o início da Humanidade que o Homem, elemento determinante na evolução da mesma, preocupou-se em explicar o “mundo” que o rodeava, conjecturando hipóteses que possibilitassem a explicação dos fenómenos físicos que observava.

Tais teorias tiveram um grande impulso na Grécia Antiga. No século IV a. C., os astrónomos gregos procuravam descobrir regularidades no movimento dos planetas e explicá-las através de modelos matemáticos. Todavia, Platão considerava que a matematização de tais modelos não poderia levar à obtenção de resultados irrefutáveis, uma vez que aos mesmos estavam associados uma série de incertezas, nomeadamente na correlação entre a posição dos astros e o tempo associado a esta posição. Platão entendia, por isso, que na adequação do modelo à realidade estavam implícitas uma série de imperfeições e, como tal, aos modelos apresentados estavam associados uma série de problemas.

De facto, Platão tinha razão, dado que os modelos físicos apresentados ao longo dos tempos foram-se revelando cada vez mais adequados e, como tal, as teorias apresentadas foram-se mostrando, consequentemente, mais válidas.

Galileu Galilei (1564 – 1642) apercebeu-se que se deixássemos cair um objeto no porão de um barco em movimento, para um observador que lá se encontrasse o objeto descreveria uma trajetória em linha reta, assim, se o observador não soubesse onde se encontrava, admitiria que estava num referencial estacionário. Contudo, se o observador se encontrasse fora do barco e num local imóvel, veria o objeto cair descrevendo uma curva que acompanhava o movimento do mesmo, pelo que saberia que o referencial onde o objeto se encontrava se deslocava em relação ao seu referencial. Com isto concluiu que não é possível distinguir os estados de repouso e de movimento retilíneo uniforme do referencial próprio do observador.

Nos finais do século XVII, Isaac Newton (1642 – 1727), com base nas teorias que o antecederam, axiomatizou toda a Mecânica em três leis fundamentais a partir das quais, segundo ele, poder-se-ia deduzir tudo o resto, criando, assim, a Mecânica Newtoniana ou Mecânica Clássica, tal como hoje se designa. É certo que nem todos os físicos e matemáticos aceitavam a sua teoria, contudo o facto de as previsões se adequarem perfeitamente aos fenómenos reais, observados à altura, fez com que a mesma prevalecesse durante cerca de dois séculos. Para Newton o espaço e o tempo eram absolutos. Assim, o primeiro haveria de permanecer imutável e poder-se-iam distinguir umas partes de outras e, portanto, todas as réguas mediam as distâncias da mesma forma, o segundo fluía de forma igual sem relação com nada exterior e, consequentemente, igual para todos os observadores, isto é, todos os relógios marcam o tempo da mesma maneira.

Albert Einstein (1879 – 1955), criador da *Teoria da Relatividade*, pensava na luz e em como um seu raio não seria influenciado pelo avanço, por exemplo, de um comboio, nem pelo ar nele contido. Referia, ainda, que um raio de luz não se deixa influenciar pela velocidade dos sistemas em referência, pelo que a sua velocidade no vácuo é constante e não possível de ultrapassar. Einstein adicionou, também, o tempo ao espaço. Consequentemente, todo e qualquer acontecimento passou a ser descrito tendo em conta as suas coordenadas espaciais e temporal, formando, portanto, um *continuum* a que chamou espaço-tempo que se curva na presença da matéria e, como tal, quer o espaço quer o tempo deixaram de ser absolutos e vistos da mesma forma por observadores localizados em sistemas de referência diferentes.

Assim, concluiu que não existem sistemas de referência absolutos, pelo menos até hoje nunca se descobriu nenhum, pois não existe qualquer corpo no Universo que não se mova em relação a nada. Em suma, Einstein rompeu com a ideia da existência de um sistema de referência privilegiado, considerando que todos os sistemas de referência são equivalentes e substituiu o princípio newtoniano do tempo absoluto pelo princípio da constância da velocidade da luz no vácuo, contido nas equações de James Maxwell (1831 – 1879), de modo a obter a transformação cinemática² perante a qual as suas equações permaneciam covariantes.

A *Teoria da Relatividade* deveu-se sobretudo ao esforço de Einstein, constituindo, sem dúvida, um grande passo para a forma como compreendemos a natureza, mas é sobretudo uma construção humana e, como tal, apesar de muitas virtudes, também padece de alguns defeitos. Daí que seja compreensível e natural que existam arestas por limar e conceitos por retificar, até porque qualquer teoria científica é, em certa medida, fruto da nossa compreensão da natureza em cada época histórica. Sendo esta teoria desenvolvida no início do século XX não é de estranhar, passado todo este tempo, e tendo havido um desenvolvimento subsequente do conhecimento e da tecnologia, que a mesma não encerre em si toda a verdade, até porque estes desenvolvimentos vieram trazer, para a referida teoria, alguns “efeitos colaterais”. Como forma de explicar alguns desses efeitos, alguns deles conhecidos por paradoxos da *Teoria da Relatividade*, alguns físicos propuseram ideias alternativas. No desenvolvimento desta dissertação, apresentaremos a alternativa proposta pelo físico italiano Franco Selleri, a partir da sistematização dos trabalhos efetuados por vários físicos, que, apoiada nas transformações inerciais, tenta explicar o que a relatividade explica, bem como responder a questões para as quais a *Teoria da Relatividade* não encontra resposta.

Os matemáticos, até meados do século XIX, preocupavam-se apenas em estabelecer os aspetos mais fundamentais da realidade, fazendo com que a Matemática ficasse “presa” a esta noção. Contudo, a partir daí, aperceberam-se que a essência desta disciplina era criar formalismos rigorosos que valessem por si e que pudessem ser aplicados como ferramentas essenciais para a ciência. Os físicos, por sua vez, descobriram que, apesar de não terem certezas de nada, têm hipóteses muito plausíveis para a explicação dos fenómenos, hipóteses essas que se podem exprimir através de formalismos matemáticos. Foi esta simbiose entre

² Cinemática é o ramo da Física que se ocupa da descrição dos movimentos, sem se preocupar com a análise das suas causas.

ciências, nomeadamente entre a Matemática e a Física, que nos permitiu alcançar feitos para a humanidade que para Júlio Verne (1828 - 1905) não passavam de pura ficção.

1.2. Objetivos

Com o desenvolvimento desta dissertação pretende-se apresentar uma das mais fascinantes teorias sobre o funcionamento do Universo, nomeadamente sobre a relação existente entre o espaço e o tempo do ponto de vista de observadores localizados em diferentes referenciais inerciais – *Teoria da Relatividade Restrita*. Pretende-se, também, dar a conhecer as suas bases e a sua evolução, enquanto teoria do ramo da Física Teórica.

Pretende-se demonstrar que uma teoria, por mais perfeita que possa parecer, está sempre associada a suposições e assunções, por parte dos seus criadores, com base no conhecimento que estes possuem, consequência dos trabalhos desenvolvidos, anteriormente, por outros pensadores. Estas ideias levam, inevitavelmente, a incertezas e fraquezas do ponto de vista físico, conceptual e filosófico. Assim, dá-se ênfase à relatividade pré-einsteiniana, relatividade de Galileu, e à “relatividade fraca”, alternativa à relatividade de Einstein, com base nas transformações inerciais.

Por fim, pretende-se demonstrar como a Matemática foi, é e será fundamental para a evolução do conhecimento científico e para a formalização de qualquer teoria física. Mostrar-se-á como, a partir desta, se consegue criar e desenvolver toda uma teoria. Assim, a grande maioria das conclusões apresentadas, independentemente da teoria trabalhada, serão demonstradas matematicamente.

O trabalho que se pretende desenvolver não visa ser aplicado no Ensino Básico e/ou Secundário na disciplina de Matemática, mas sim, ser um estudo científico e de aprofundamento da temática subjacente, podendo estar na base de investigações posteriores.

1.3. Estrutura e organização

A presente dissertação de mestrado, intitulada *Tópicos da Teoria da Relatividade*, encontra-se dividida em oito capítulos: *Introdução*; *A Relatividade de Galileu*; *A Relatividade de Einstein*; *Eletromagnetismo relativista*; *Relatividade fraca*; *Eletromagnetismo na relatividade fraca*; *Alguns aspetos particulares das diferenças entre relatividade restrita e relatividade fraca*; *Conclusão*. Em cada um deles, apresentam-se os aspetos essenciais das temáticas abordadas.

No primeiro capítulo, *Introdução*, apresenta-se um enquadramento motivacional associado ao desenvolvimento da Física, sobretudo no que diz respeito à descrição de fenómenos associados ao movimento retilíneo e uniforme entre referenciais inerciais. Dá-se ênfase à importância do acumular do conhecimento, baseado em teorias físicas e/ou matemáticas, para a obtenção de novas teorias explicativas dos fenómenos universais e ao facto de toda e qualquer teoria científica estar sujeita a novos desenvolvimentos e até refutações, tendo por base a acumulação e atualização do dito conhecimento. Apresentam-se, ainda, os objetivos principais da realização da dissertação e a sua estrutura.

No segundo capítulo, *A Relatividade de Galileu*, apresentaremos o seu princípio da relatividade e a forma como se passa de um sistema de coordenadas, espacialmente e temporalmente, de um referencial inercial para outro que se desloca, relativamente ao primeiro, com velocidade constante e uniforme. A esta relação de coordenadas, entre diferentes referenciais inerciais, designa-se por *transformações de Galileu*. Verificaremos, também, se as leis da Mecânica são ou não invariantes face às transformações referidas, estudando, nomeadamente, a velocidade, a aceleração, a força, o momento linear e a energia.

No que diz respeito ao terceiro capítulo, *A Relatividade de Einstein*, veremos como a sua *Teoria da Relatividade Restrita* veio alterar, profundamente, a forma como a Física entendia as leis do Universo, baseando-se em dois postulados designados por *Princípio da Relatividade* e *Princípio da constância da velocidade da luz*. Focaremos, especialmente, a forma como Einstein passou a entender os conceitos de espaço e tempo e como reformulou as leis da Mecânica Clássica, tendo por base uma nova transformação entre coordenadas de referenciais inerciais distintos. Apresentaremos, assim, as *transformações de Lorentz*, e uma

sua possível dedução, e o modo como Hermann Minkowski (1864 – 1909) conjugou o espaço e o tempo num *continuum* quadrimensional chamado *espaço-tempo* ou *universo de Minkowski*.

Relativamente ao quarto capítulo, *Eletromagnetismo relativista*, daremos especial atenção às equações de Maxwell e à sua covariância face às *transformações de Lorentz*. Para a demonstração desta covariância será necessário recorrer às transformações das componentes do quadri vetor densidade de corrente e à transformação dos campos elétrico e magnético, pelo que deduziremos como estas transformações se apresentam, quando se passa de um referencial inercial para outro.

No quinto capítulo, *Relatividade fraca*, apresentaremos uma teoria alternativa à *Teoria da Relatividade Restrita* de Einstein, baseada num novo tipo de transformações de coordenadas entre referenciais inerciais, as *transformações inerciais*. Estas transformações são obtidas a partir das transformações equivalentes que contém um parâmetro livre que varia consoante o método de sincronização dos relógios de observadores provenientes de diferentes sistemas inerciais. Esta teoria preconiza a existência de um referencial inercial privilegiado, ao contrário do que afirma a relatividade. Uma das grandes implicações desta teoria é a admissão de que se podem obter velocidades superiores a c , como, aparentemente, já se verificou experimentalmente. Ainda, de acordo com esta teoria, proposta por Franco Selleri, é possível explicar alguns dos paradoxos e fenómenos que a *Teoria da Relatividade* não consegue. Apresentaremos, também, neste capítulo, um subcapítulo intitulado *Dinâmica Alternativa*, no qual se pretende verificar se a transformação da velocidade, do momento e energia e da força, face às *transformações inerciais*, apresenta diferenças significativas face ao que acontece na relatividade.

No sexto capítulo, *Eletromagnetismo na relatividade fraca*, apresentaremos a transformação dos campos elétrico e magnético a partir das transformações inerciais e as equações de Maxwell escritas nos diferentes referenciais inerciais, de acordo com os trabalhos de Puccini (2003) e Buonaura (2004).

No que diz respeito ao capítulo sete, *Alguns aspetos particulares das diferenças entre relatividade restrita e relatividade fraca*, focaremos a nossa atenção em alguns aspetos contraditórios desta teoria. Assim, debruçar-nos-emos no problema que os sinais superluminais apresentam à *Teoria da Relatividade Restrita* no que diz respeito à ordem

temporal de acontecimentos, e na forma como as transformações inerciais resolvem a situação. Apresentaremos, ainda, algumas considerações filosóficas sobre o conceito de tempo.

No oitavo e último capítulo, *Conclusão*, apresenta-se uma síntese dos resultados, mais relevantes, obtidos no desenvolvimento desta dissertação.

2. A Relatividade de Galileu

“Mais fácil me foi encontrar as leis com que se movem os corpos celestes, que estão a milhões de quilómetros, do que definir as leis do movimento da água que escoia frente aos meus olhos.”

Galileu Galilei

O princípio da relatividade foi, primeiramente, enunciado por Galileu, mantendo-se, ainda hoje, como uma das leis fundamentais da Física, tal qual a conhecemos, e afirma que não é possível efetuar qualquer experiência mecânica (naquela altura) que revele o movimento uniforme, por exemplo de um barco.

Tal afirmação significa que os valores das grandezas fisicamente observáveis, apesar de aparecerem com valores diferentes para diferentes observadores, mantêm as suas relações independentemente do observador que as contempla, sendo que esta noção só aparece mais tardiamente com Einstein.

Importa, portanto, definir referencial inercial que é aquele em que todas as partículas livres, isto é, não atuadas por forças ou atuadas por um sistema de resultante nula, têm velocidade constante ou seja aceleração nula.

Uma outra forma de enunciar o princípio da relatividade, anteriormente citado, é afirmar que todos os referenciais de inércia são equivalentes, no que respeita à descrição dos fenómenos físicos. Sendo assim, a escolha do referencial inercial é totalmente arbitrária, interessando, apenas, conhecer as regras que permitem comparar medições efetuadas por diferentes observadores em diferentes referenciais. Obviamente, tais regras estão associadas às transformações de coordenadas de um sistema inercial para outro.

Vejamos como Galileu explicou este princípio.

“Encerrai-vos com alguns amigos na maior sala debaixo da coberta de um grande navio, que tem moscas, borboletas e animais voadores semelhantes; esteja também um grande vaso de água, dentro do qual estão pequenos peixes; suspenda-se ainda um reservatório, que

gota a gota vá deitando água noutra recipiente de boca estreita, que esteja mais abaixo: e estando parado o navio, observe-se diligentemente como aqueles pequenos animais voadores com velocidades semelhantes vão a todas as partes da sala; veremos os peixes nadar indiferentemente em todas as direções; as gotas que caiem entrarão todas no recipiente em baixo; e vocês atirando ao amigo alguma coisa, não mais galhardamente a deveis lançar em direção a um ponto que a outro, quando as distâncias forem iguais; e saltando vós, como se diz, a pés juntos, iguais espaços percorrereis em todas as direções. Observai que tereis diligentemente todas estas coisas, ainda que nenhuma dúvida exista que, enquanto a nave está parada, as coisas assim sucedem, fazei mover a nave com quanta velocidade se queira; que (sempre que o movimento seja uniforme e não flutuante aqui e ali) vós não reconhecereis a mínima mutação em todos os efeitos nomeados, nem nenhum deles poderá saber se a nave se move ou está parada.” (Galileu, *Dialogue Concerning the Two Chief World Systems*, Second Day). Sendo que a ideia fundamental da explicação de Galileu, como inicialmente foi dito, é que nenhum fenómeno ou experiência pode permitir distinguir os estados de repouso e de movimento retilíneo uniforme do referencial próprio do observador.

2.1. As transformações de Galileu

Consideremos dois referenciais inerciais S e S' e suponhamos um corpo imóvel no sistema S , de eixos cartesianos ortogonais. Todos os pontos desse corpo expressam-se, no sistema S , através das suas coordenadas cartesianas (x, y, z) .

Vejamos, agora, como exprimir todos os pontos desse corpo no sistema S' . Evidentemente que o faremos através das suas coordenadas cartesianas (x', y', z') . As fórmulas de transformação das coordenadas espaciais (x, y, z) , no sistema S , em (x', y', z') , no sistema S' , e vice versa, estabelecem-se com facilidade desde que se conheçam os sistemas em questão.

No caso de os sistemas S e S' se encontrarem em repouso, um relativamente ao outro, estamos perante um simples problema geométrico. Caso se verifique movimento de um relativamente ao outro, vamos considerar que este se faz de forma retilínea e uniforme e, como tal, todos os pontos de S' têm relativamente a S a velocidade \vec{v} .

Para simplificarmos a análise geométrica do problema, centremo-nos, exclusivamente, nos aspetos físicos. Assim, vamos supor que os eixos Ox e $O'x'$ são coincidentes e que $O'x'$ desliza sobre Ox , que Oy e $O'y'$ são paralelos, que Oz e $O'z'$ são paralelos e que as origens O e O' coincidem na origem dos tempos, isto é $t = 0$ e $t' = 0$ quando O e O' coincidem, para além disso os eixos coordenados deverão ser perpendiculares dois a dois (ver figura 1).

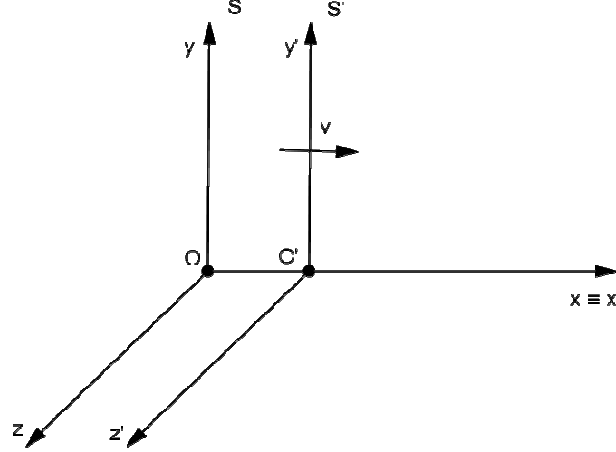


Figura 1: Referenciais S e S' de acordo com as restrições impostas

No desenvolvimento de todo este trabalho, iremos considerar que os referenciais inerciais S e S' têm estas características.

Consideremos um ponto P , de coordenadas (x, y, z) no referencial S e (x', y', z') em S' e \vec{r} e \vec{r}' os vetores posição do ponto P , relativamente a S e S' , respetivamente.

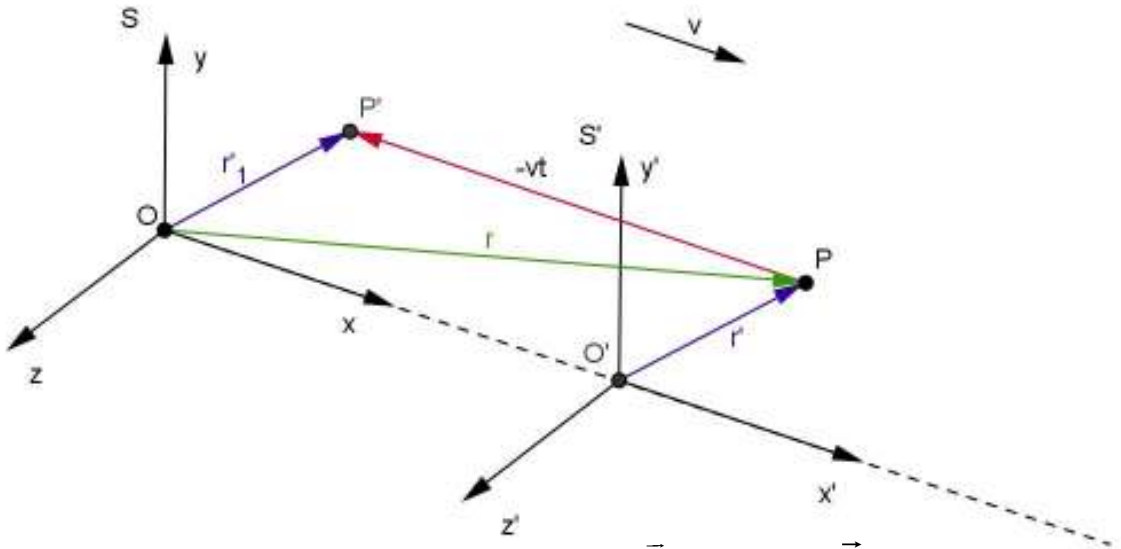


Figura 2: Determinação geométrica de \vec{r}' em função de \vec{r} .

Pela regra do triângulo para a adição de vetores, facilmente se verifica que

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t \text{ com } \vec{v} = v\vec{e}_x, \quad (2.1)$$

donde se obtém

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}, \quad (2.2)$$

sendo x' , y' e z' as componentes do vetor \vec{r}' .

Esta transformação depende apenas de um parâmetro: o módulo da velocidade do sistema S' relativamente ao sistema S , $v = \|\vec{v}\|$.

Interessa, neste momento, verificar o que acontece relativamente ao tempo, isto é qual a relação entre o tempo t , em que um acontecimento se dá no referencial inercial S , e o tempo t' , em que o mesmo acontecimento se dá em S' .

Um acontecimento é, por definição, um fenómeno que se verifica numa zona do espaço, suficientemente pequena, para que as dimensões do sistema físico, sede do fenómeno, não sejam importantes face às relações que queremos estabelecer, bem como para a sua extensão temporal, que consideramos instantânea. Desta forma, qualquer acontecimento é definido por quatro coordenadas: três espaciais e uma temporal. Teremos, portanto, um acontecimento definido em S por (x, y, z, t) e em S' por (x', y', z', t') .

Atendendo à conceção da Física Clássica (pré-relativista) o tempo é absoluto, isto é, dois acontecimentos A e B simultâneos num determinado referencial são-no em qualquer outro e, como tal, o intervalo de tempo entre os dois acontecimentos é o mesmo ($\Delta t = \Delta t'$), independentemente do referencial. Assim sendo, qualquer acontecimento tem em S' e em S as seguintes coordenadas

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \quad (2.3)$$

$$\begin{cases} x = x' + vt' \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases} \quad (2.4)$$

As transformações de coordenadas (2.3) são designadas por *transformações de Galileu* e as transformações de coordenadas (2.4) são as suas inversas. Apesar de na conceção clássica da definição de um acontecimento intervir o espaço e o tempo, os fenómenos físicos descreviam-se num espaço e num tempo independentes, a três e a uma dimensão, respetivamente.

2.2. Invariantes face às transformações de Galileu

De acordo com o princípio da relatividade de Galileu as leis da Mecânica não devem permitir identificar um referencial privilegiado. Assim sendo, verifiquemos se a velocidade, a aceleração, a força, o momento linear e a energia são invariantes face às transformações de Galileu.

2.2.1. A transformação das velocidades

Consideremos um corpo que tem, relativamente ao referencial S uma velocidade $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$, sendo u_x , u_y e u_z as suas componentes. Pretendemos determinar a velocidade deste mesmo corpo relativamente ao referencial S' . Ora, como sabemos, por definição

$$\vec{u}' = \frac{d\vec{r}'}{dt'} \quad (2.5)$$

isto é,

$$\vec{u}' = \left(\frac{dx'}{dt'}, \frac{dy'}{dt'}, \frac{dz'}{dt'} \right) \quad (2.6)$$

sendo que

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} ; u'_y = \frac{dy'}{dt'} ; u'_z = \frac{dz'}{dt'} . \quad (2.7)$$

A partir das equações (2.7) e das transformações de Galileu (2.3), obtemos

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{d}{dt}(x - vt) = \frac{dx}{dt} - v \frac{dt}{dt} = u_x - v \quad (2.8)$$

$$u'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{dt} = u_y \quad (2.9)$$

$$u'_z = \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{dt} = u_z . \quad (2.10)$$

Generalizando para qualquer \vec{v} constante, temos

$$\vec{u}' = \vec{u} - \vec{v} \quad (2.11)$$

e, consequentemente,

$$\vec{u} = \vec{u}' + \vec{v} . \quad (2.12)$$

pelo que, o vetor velocidade não é invariante face às transformações de Galileu, uma vez que \vec{u} resulta da adição vetorial da velocidade relativa ao referencial S' , \vec{u}' , com a velocidade \vec{v} , velocidade de S' relativamente a S .

O resultado, anteriormente obtido, é conhecido como *teorema da adição de velocidades*, na Mecânica Clássica, e mostra que estas se compõem geometricamente como qualquer outro conjunto de vetores do espaço e, consequentemente, poder-se-iam obter velocidades infinitas.

2.2.2. A transformação da aceleração e da força

Admitamos um corpo que tem, num referencial inercial S , uma aceleração $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$. O nosso objetivo é determinar a aceleração deste mesmo corpo relativamente a S' .

Como é do nosso conhecimento, por definição,

$$\vec{a}' = \frac{d^2 \vec{r}'}{dt'^2} \quad (2.13)$$

donde

$$\vec{a}' = \left(\frac{d^2 x'}{dt'^2}, \frac{d^2 y'}{dt'^2}, \frac{d^2 z'}{dt'^2} \right) \quad (2.14)$$

e, consequentemente,

$$a'_x = \frac{d^2 x'}{dt'^2}; \quad a'_y = \frac{d^2 y'}{dt'^2}; \quad a'_z = \frac{d^2 z'}{dt'^2}. \quad (2.15)$$

A partir de (2.15) e das transformações de Galileu (2.3), chegamos a

$$a'_x = \frac{d^2 x'}{dt'^2} = \frac{d^2 (x - vt)}{dt^2} = \frac{d^2 x}{dt^2} - v \frac{d^2 t}{dt^2} = a_x - v \times 0 = a_x \quad (2.16)$$

$$a'_y = \frac{d^2 y'}{dt'^2} = \frac{d^2 y}{dt^2} = a_y \quad (2.17)$$

$$a'_z = \frac{d^2 z'}{dt'^2} = \frac{d^2 z}{dt^2} = a_z \quad (2.18)$$

donde se conclui que

$$\vec{a} = \vec{a}', \quad (2.19)$$

ou seja, que o vetor aceleração é invariante em qualquer referencial inercial, face às transformações de Galileu.

Uma das leis fundamentais da Mecânica, conhecida por Lei Fundamental da Dinâmica (segunda lei de Newton), na sua versão atual, afirma que a “variação da quantidade de movimento é proporcional à intensidade da força motriz aplicada, sendo a sua direção igual àquela em que atua a força”. Matematicamente, esta lei traduz-se, presentemente, por

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\vec{a} = \vec{F}. \quad (2.20)$$

De acordo com a Física Clássica, a massa de um corpo, m , é a mesma em qualquer referencial inercial que se considere, isto é, $m' = m$. Assim, multiplicando ambos os membros da equação (2.19) por m , temos que

$$m\vec{a} = m\vec{a}' \Leftrightarrow m\vec{a} = m'\vec{a}'. \quad (2.21)$$

Não havendo razão em contrário para as forças conhecidas na altura, pois estas só dependiam das distâncias e estas são invariantes, vem

$$\vec{F} = \vec{F}'. \quad (2.22)$$

A Equação Fundamental da Dinâmica e, em geral todas as equações da Mecânica, conservam, portanto, a mesma forma, quando se passa de um referencial inercial para outro em movimento retilíneo e uniforme relativamente ao primeiro, face às transformações de Galileu.

Vejamos, a título de exemplo, a lei da atração universal de Newton que afirma que “duas partículas materiais atraem-se ou gravitam, reciprocamente, com uma força diretamente proporcional às suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância que as separa”. Matematicamente, esta lei exprime-se por

$$F = G \frac{mM}{r^2}, \quad (2.23)$$

sendo F a intensidade da força de atração entre as partículas, G a constante da gravitação universal, m e M as massas de cada uma das partículas e r a distância entre elas, relativamente

ao referencial inercial S . Consequentemente, podemos afirmar que a força de gravitação universal em S' é dada por

$$F' = G \frac{m' M'}{r'^2}. \quad (2.24)$$

Pois G é uma constante e, portanto, assume o mesmo valor em qualquer referencial inercial que se considere, as massas das partículas são invariantes, isto é, $m' = m$ e $M' = M$ e $r' = r$, pois para dois acontecimentos simultâneos ($\Delta t' = \Delta t$), vem da primeira equação de (2.3) que $\Delta x' = \Delta x$. Concluimos, assim, que a força de atração universal entre duas partículas medida por observadores pertencentes a diferentes referenciais inerciais é a mesma.

2.2.3. A transformação do momento linear e da energia

Na Física Clássica, se considerarmos um sistema que não esteja sujeito a forças externas, o seu momento linear ou quantidade de movimento conserva-se, ou seja, é constante. Um exemplo ilustrativo e tradicional desta afirmação passa por considerarmos um sistema de duas partículas. O momento linear destas partículas antes do choque é igual ao momento linear depois do choque, independentemente do referencial que se considere.

Para determinarmos o momento linear de uma partícula \vec{p} , temos de conhecer a sua massa m e a sua velocidade \vec{u} , sendo que o mesmo nos é dado por

$$\vec{p} = m \frac{d\vec{r}}{dt} = m \vec{u} \quad (2.25)$$

Atendendo a que a massa de um corpo é constante, independentemente do referencial inercial considerado, como referido anteriormente, e que a velocidade de um corpo não é uma grandeza física invariante face às transformações de Galileu, obviamente que a quantidade de movimento, também, não é um invariante face a esta mesma transformação.

Por sua vez a energia cinética de um corpo, E , é também função da sua massa e da sua velocidade \vec{u} , relacionando-se da seguinte forma

$$E = \frac{1}{2} m \|\vec{u}\|^2 = \frac{1}{2} m u^2. \quad (2.27)$$

No referencial S' , tendo em conta (2.11), esta energia será obtida por

$$\begin{aligned} E' &= \frac{1}{2} m {u'}^2 = \frac{1}{2} m (u - v)^2 = \frac{1}{2} m (u^2 - 2uv + v^2) \\ &= \frac{1}{2} m u^2 + \frac{1}{2} m (v^2 - 2uv) = E + \frac{1}{2} m (v^2 - 2uv) \end{aligned} \quad (2.28)$$

e, conseqüentemente, a energia cinética não é invariante relativamente às transformações de Galileu, o que é óbvio, pois, passando-se para o referencial próprio do corpo, a energia cinética passará a ser nula.

3. A relatividade de Einstein

“Equações são mais importantes para mim (...) uma equação é algo para a eternidade.”

Albert Einstein

Em 1905, com a publicação do artigo *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*, Albert Einstein iniciou uma nova fase da Física pondo em causa noções, até então, tidas como básicas. Tais noções foram, essencialmente, os conceitos de simultaneidade e sincronização de relógios em diferentes referenciais inerciais e as fórmulas das transformações, do tipo das de Galileu, para relacionar as coordenadas de corpos em diferentes referenciais inerciais. Mais tarde Poincaré “batizou” a teoria de Einstein por Teoria da Relatividade Restrita.

Continuando a utilizar os conceitos de espaço e tempo, tal como acontecia na Física Clássica de Galileu e Newton, a relatividade restrita modifica a forma como se julgava que estes estavam relacionados, nomeadamente renuncia a noção de que o espaço e o tempo são absolutos. Tais alterações vieram pôr em evidência propriedades, até então desconhecidas, que nos permitiram ter uma visão, globalmente, diferente e mais precisa do Universo em que vivemos. Esta nova noção de espaço-tempo permitiu a explicação de alguns fenómenos físicos que até então eram incompreensíveis.

3.1. As transformações de Lorentz

Nos finais do século *XIX* existiam duas teorias físicas fundamentais, consistentes e solidamente confirmadas pela experiência: a Mecânica Newtoniana e o Eletromagnetismo de Ampère, Faraday e Maxwell.

De acordo com o novo princípio da relatividade de Einstein, todas as leis físicas deveriam ter a mesma forma, independentemente, do referencial inercial considerado. Contudo, tal não acontecia para as duas teorias acima referidas. As leis da Mecânica

Newtoniana mantinham-se covariantes face às transformações de Galileu, mas as leis do Eletromagnetismo não. Tal facto era totalmente inaceitável. Vejamos um exemplo do que acabamos de expor.

Consideremos uma partícula de carga q e massa m , movendo-se a uma velocidade \vec{v} , consideremos, também, um campo elétrico \vec{E} e um campo magnético \vec{B} . A equação que nos dá a força total da partícula é da forma (equação de Lorentz)

$$\vec{F} = q\vec{E} + q(\vec{v} \times \vec{B}) \quad (3.1)$$

A covariância da força de Lorentz implicaria que \vec{F} , por um lado, e $q\vec{E} + q(\vec{v} \times \vec{B})$, por outro, se transformassem, na passagem do referencial inercial S para o referencial inercial S' , de modo a que se verificasse $\vec{F}' = q'\vec{E}' + q'(\vec{v}' \times \vec{B}')$, o que, facilmente, se depreende que não acontece, se se considerar as transformações de Galileu.

Era, portanto, necessário encontrar um grupo de transformações que permitisse manter, simultaneamente, covariantes as leis da Mecânica e do Eletromagnetismo.

Veio-se a descobrir que o grupo das *transformações de Lorentz*, que logo à partida, mantinham as equações de Maxwell do Eletromagnetismo covariantes, não permitiam a covariâncias das leis da Mecânica, pelo que se revelou necessário rever estas últimas.

De seguida, apresentaremos uma dedução das transformações de Lorentz.

3.1.1. Dedução das transformações de Lorentz

As transformações do Lorentz podem ser obtidas, supondo-se que a luz se propaga no vácuo de forma isotrópica, isto é, propaga-se em todas as direções com a mesma velocidade c , independentemente do referencial inercial considerado e da velocidade da sua fonte emissora, em qualquer referencial inercial que se queira considerar.

Para chegarmos às equações destas transformações, vamos considerar dois referenciais inerciais S e S' , de modo que S' se desloca relativamente a S com uma velocidade constante \vec{v} , que Ox e $O'x'$ são orientados segundo a direção de \vec{v} e que Oy e $O'y'$ são paralelos entre si, bem como Oz e $O'z'$, para além de serem perpendiculares dois a dois, no referencial em questão, como fizemos atrás, aquando do estudo das transformações de Galileu. Toda esta construção é realizada para facilitar os cálculos e deduções, sem introduzir artificialismos físicos.

Suponhamos, agora, que no instante em que as origens O e O' dos dois referenciais coincidem, considera-se a origem dos tempos, isto é $t = t' = 0$. Imaginemos, também, que neste instante, uma fonte luminosa situada na origem de S e nela fixada emana um sinal luminoso. Passado algum tempo, os observadores de S e S' notam a passagem do sinal luminoso num determinado ponto I . Para os observadores de S , tal acontecimento tem as coordenadas (x, y, z, t) , por sua vez, para os observadores de S' o mesmo acontecimento terá as coordenadas (x', y', z', t') .

A figura seguinte retrata o que acabamos de explicar.

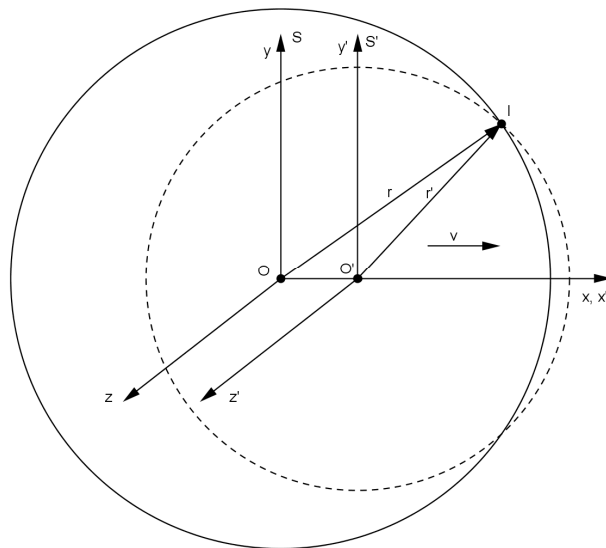


Figura 3: Referenciais inerciais S e S' considerados para a dedução das transformações de Lorentz.

Atendendo a que o sinal luminoso partiu da origem quando $t = t' = 0$, e como a luz se propaga através de ondas esféricas, com uma velocidade c , para um observador de S , ao

fim de um certo tempo t , a região iluminada será uma superfície esférica de centro em O e raio ct , isto é, o conjunto dos pontos iluminados obedece à equação

$$x^2 + y^2 + z^2 = (ct)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0. \quad (3.2)$$

Da mesma forma, atendendo a que a velocidade da luz no vácuo é invariante, para um observador de S' o conjunto dos pontos iluminados satisfaz a equação

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = 0. \quad (3.3)$$

As duas equações anteriores são invariantes, originando o invariante fundamental, designado por intervalo s . Este invariante dá-nos a distância num espaço-tempo quadridimensional, sendo a sua expressão do tipo

$$s^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 \text{ ou } s^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \quad (3.4)$$

Como consideramos que o espaço e o tempo são homogêneos, isto é, têm as mesmas propriedades em todos os seus pontos e em todos os instantes, a transformação dos mesmos tem de ser linear. Podemos escrever então

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

isto é,

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}t \\ z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}t \\ t' = a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}t \end{cases} \quad (3.6)$$

Aqui, todos os coeficientes considerados são funções da velocidade relativa dos dois referenciais.

Para além disso, atendendo à posição relativa dos eixos coordenados escolhidos e à admissão que O e O' coincidem na origem dos tempos, podemos reduzir o número de coeficientes entre as coordenadas de um acontecimento em S e S' .

Comecemos por considerar um acontecimento pertencente ao plano xOz , tendo portanto o mesmo a coordenada nula em y , este também pertence ao plano $x'O'z'$, e portanto $y' = 0$, assim temos que

$$a_{21}x + a_{23}z + a_{24}t = 0, \text{ para quaisquer valores de } x, z \text{ e } t \quad (3.7)$$

o que implica que

$$a_{21} = 0 \wedge a_{23} = 0 \wedge a_{24} = 0. \quad (3.8)$$

De forma análoga, consideremos um acontecimento no plano coordenado xOy , $z = 0$, o mesmo pertence ao plano $x'O'y'$, $z' = 0$, seguindo deste modo que

$$a_{31}x + a_{32}y + a_{34}t = 0, \text{ para quaisquer valores de } x, y \text{ e } t \quad (3.9)$$

obtendo-se, assim, que

$$a_{31} = 0 \wedge a_{32} = 0 \wedge a_{34} = 0. \quad (3.10)$$

Consideremos, agora, um acontecimento pertencente ao plano $y'O'z'$, $x' = 0$. Um observador em S vê o plano $y'O'z'$ a uma distância vt do plano yOz , pelo que $x = vt$. Assim a $x = vt$ corresponde $x' = 0$, logo,

$$a_{11}vt + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t = 0 \Leftrightarrow (a_{11}v + a_{14})t + a_{12}y + a_{13}z = 0,$$

$$\text{para } y, z \text{ e } t \text{ quaisquer} \quad (3.11)$$

e, portanto,

$$a_{11}v + a_{14} = 0 \wedge a_{12} = 0 \wedge a_{13} = 0 \Leftrightarrow a_{14} = -a_{11}v \wedge a_{12} = a_{13} = 0. \quad (3.12)$$

Donde o sistema (3.6), após estas considerações de simetria, é-nos dado por

$$\begin{cases} x' = a_{11}x - a_{11}vt \\ y' = a_{22}y \\ z' = a_{33}z \\ t' = a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}t \end{cases} \quad (3.13)$$

Ainda por razões de simetria, atendendo a que por hipótese o espaço é isotrópico, isto é, equivalente em todas as suas direções, t' , à semelhança de x' , só poderá depender de x e de t , pelo que $a_{42} = a_{43} = 0$ e, portanto, temos que

$$\begin{cases} x' = a_{11}x - a_{11}vt \\ y' = a_{22}y \\ z' = a_{33}z \\ t' = a_{41}x + a_{44}t \end{cases} \quad (3.14)$$

Como dissemos anteriormente, todos os coeficientes obtidos dependem da velocidade de S' relativamente a S , isto é são funções de v , então admitamos o seguinte

$$a_{22} = f(v), \quad (3.15)$$

donde segue,

$$y' = f(v)y. \quad (3.16)$$

Atendendo aos princípios da relatividade restrita, a transformação inversa será dada por,

$$y = f(-v)y', \quad (3.17)$$

uma vez que supomos que S se desloca relativamente a S' com uma velocidade uniforme e constante $-\vec{v}$.

Como a relação entre y e y' não depende do sentido da velocidade, tem-se que

$$f(v) = f(-v). \quad (3.18)$$

Assim, de (3.16), (3.17) e (3.18) vem que

$$y' = f(v)f(-v)y \Leftrightarrow y' = f^2(v)y, \quad (3.19)$$

donde, por (3.16) e (3.19) se conclui que $f(v) = 1$, pois nas condições restritas das transformações de Lorentz, as componentes espaciais perpendiculares à velocidade do referencial S' face a S , não são afetadas pela transformação, como já acontecia para as transformações de Galileu. Consequentemente, $a_{22} = 1$.

De forma análoga, dada a necessária simetria entre eixos coordenados, concluímos que $a_{33} = 1$. E portanto,

$$\begin{cases} x' = a_{11}x - a_{11}vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = a_{41}x + a_{44}t \end{cases}. \quad (3.20)$$

Determinemos, agora, os coeficientes a_{11} , a_{41} e a_{44} . Como vimos anteriormente,

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0 \wedge x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = 0 \quad (3.21)$$

e consequentemente,

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2. \quad (3.22)$$

Substituindo em (3.22) x' , y' , z' e t' pelas relações obtidas em (3.20), vem que

$$x^2 - c^2t^2 = (a_{11}x - a_{11}vt)^2 - c^2(a_{41}x + a_{44}t)^2 \quad (3.23)$$

e desenvolvendo os casos notáveis e agrupando os termos semelhantes, obtemos

$$x^2 - c^2t^2 = x^2(a_{11}^2 - c^2a_{41}^2) + t^2(a_{11}^2v^2 - c^2a_{44}^2) - 2xt(a_{11}^2v + a_{41}a_{44}c^2). \quad (3.24)$$

Concluindo-se, assim, que

$$\begin{cases} a_{11}^2 - c^2a_{41}^2 = 1 \\ c^2a_{44}^2 - a_{11}^2v^2 = c^2 \\ a_{11}^2v + a_{41}a_{44}c^2 = 0 \end{cases}. \quad (3.25)$$

Resolvendo a primeira equação do sistema (3.25) em ordem a a_{41}^2 e a terceira em ordem a a_{41} , vem

$$a_{41}^2 = \frac{a_{11}^2 - 1}{c^2} \wedge a_{41} = -\frac{a_{11}^2 v}{a_{44} c^2}, \quad (3.26)$$

donde se conclui que

$$\frac{a_{11}^4 v^2}{a_{44}^2 c^4} = \frac{a_{11}^2 - 1}{c^2} \quad (3.27)$$

logo, de (3.27), deduz-se

$$a_{44}^2 = \frac{a_{11}^4 v^2}{c^2 (a_{11}^2 - 1)}. \quad (3.28)$$

Substituindo na segunda equação do sistema (3.25) o resultado obtido em (3.28), segue que

$$c^2 \frac{a_{11}^4 v^2}{c^2 (a_{11}^2 - 1)} - a_{11}^2 v^2 = c^2 \quad (3.29)$$

e resolvendo a equação anterior em ordem a a_{11}^2 , obtemos

$$a_{11}^2 v^2 = (a_{11}^2 v^2 + c^2)(a_{11}^2 - 1), \quad (3.30)$$

$$\Leftrightarrow a_{11}^2 (v^2 - c^2) = -c^2 \Leftrightarrow a_{11}^2 = \frac{c^2}{c^2 - v^2}$$

o que implica que

$$a_{11} = \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}}. \quad (3.31)$$

Dividindo ambos os termos da fração por c , concluímos que

$$a_{11} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (3.32)$$

Substituindo, agora, na equação (3.28) o resultado obtido em (3.32), temos

$$a_{44}^2 = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)^4 v^2}{c^2 \left[\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)^2 - 1 \right]} = \frac{v^2}{c^2} \frac{\frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^2}}{\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - 1}, \quad (3.33)$$

$$= \frac{v^2}{c^2} \frac{\frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^2}}{\frac{1 - 1 + \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{v^2}{c^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^2} \frac{v^2}{c^2}$$

donde se deduz que

$$a_{44}^2 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (3.34)$$

e conseqüentemente

$$a_{44} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (3.35)$$

Por fim, substituindo os resultados obtidos em (3.32) e (3.35), na terceira equação do sistema (3.25), vem

$$\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} v + a_{41} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} c^2 = 0 \quad (3.36)$$

e resolvendo a mesma em ordem a a_{41} , obtemos

$$a_{41} = \frac{-v \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \Leftrightarrow a_{41} = -\frac{v}{c^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (3.37)$$

Conhecidos todos os coeficientes das relações lineares definidas em (3.6), segue-se

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} x - \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} t \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = -\frac{v}{c^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} x + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} t \end{cases} \quad (3.38)$$

e usando a abreviatura

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma, \quad (3.39)$$

obtemos, finalmente, as chamadas transformações de Lorentz

$$\begin{cases} x' = \gamma (x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x \right) \end{cases}. \quad (3.40)$$

Tendo em conta a equivalência entre os referenciais S e S' e o facto de S se deslocar relativamente a S' com uma velocidade $-v$, podemos escrever as coordenadas de um corpo $(x,$

y, z, t), em S , relativamente às coordenadas do mesmo corpo em S' , (x', y', z', t') , através das transformações

$$\begin{cases} x = \gamma(x' + vt') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right) \end{cases} . \quad (3.41)$$

As transformações (3.41) designam-se por transformações inversas de Lorentz.

3.2. Relatividade Restrita

Na *Teoria da Relatividade Restrita* podemos admitir que o espaço possui uma estrutura euclidiana, tal como sucedia na Mecânica Clássica de Newton, tal significando que em todos os pontos do espaço as propriedades são as mesmas e em todas as direcções (homogeneidade e isotropia do espaço, respetivamente). Por outro lado, verificamos que as transformações de Lorentz asseguram que todas as leis da Física sejam covariantes, quando passamos de um referencial inercial para outro, no entanto constatamos, a partir da transformação do tempo, que este não é absoluto, como acontecia na Física Clássica. Assim sendo, a noção clássica de que o espaço e o tempo não dependem do sistema de referência, daí serem tidos como grandezas absolutas, não pode ser mais válida. Como tal, temos de definir uma forma de relacionar o tempo, focando, nomeadamente, o aspeto do sincronismo de relógios.

Para a sincronização de dois relógios situados em pontos distintos do espaço, A e B , é imperioso estabelecer um mecanismo que permita transmitir informação entre esses mesmos pontos. Como tal, vamos considerar um feixe luminoso que transmita informação do ponto A para o ponto B e vice-versa. Dizemos, então, que os relógios estão em sincronia se ao emitirmos um sinal luminoso de A para B , no instante t_A , e o mesmo for refletido de B para A , no instante t_B , e chegar de novo a A , no instante t'_A , se verificar que

$$t_B - t_A = t'_A - t_B, \quad (3.42)$$

ou seja, o intervalo de tempo que o sinal luminoso demora a ir de A a B é igual, por hipótese, ao intervalo de tempo que o sinal luminoso demora a ir de B a A , depois de refletido em B .

Da definição anterior, e considerando d_{AB} a distância espacial entre os pontos A e B , obtemos

$$\Delta t = t_B - t_A = \frac{d_{AB}}{c}. \quad (3.43)$$

Esta definição de sincronismo pode ser aplicada a um número arbitrário de pontos, isto é, se o relógio em A é síncrono com o relógio em B e este, por sua vez, é síncrono com um relógio em C , então os relógios A e C são síncronos entre si, e assim sucessivamente.

A partir da noção de sincronismo de dois relógios, resulta que dois acontecimentos distintos de um mesmo referencial são simultâneos quando os tempos destes dois acontecimentos, marcados em relógios síncronos, forem os mesmos. Atendendo a estas definições de sincronismo e simultaneidade, constata-se que não é possível sincronizar relógios pertencentes a diferentes referenciais de inércia, pelo que o tempo de dois referenciais não pode ser o mesmo.

Como se podem, então, sincronizar relógios situados em pontos diferentes de um mesmo referencial? Uma possibilidade consiste em fazer corresponder a um determinado instante a referência $t = 0$ e neste mesmo instante disparar um feixe luminoso com proveniência na origem do referencial escolhido. Os restantes observadores do feixe luminoso, acertam os seus relógios no instante em que observam a luz, marcando no seu relógio não $t = 0$, mas sim $t = \frac{d}{c}$, sendo d a distância entre a origem do referencial e o ponto onde cada um dos observadores se encontra, no instante em que o feixe os atinge. Desta forma todos os relógios indicarão, simultaneamente, a mesma leitura, de acordo com a noção de simultaneidade definida anteriormente.

A Teoria da Relatividade Restrita baseia-se, portanto, em dois postulados, propostos por Einstein, ao contrário do que se verificava com a teoria clássica da relatividade que assentava apenas um.

1.º Postulado: *Princípio da relatividade*: As leis da física são as mesmas em todos os referenciais inerciais;

2.º Postulado: *Princípio da constância da velocidade da luz*: A luz propaga-se isotropicamente no espaço e a sua velocidade é constante no vácuo, independentemente do referencial inercial em que é medida e da respetiva fonte emissora.

Uma consequência da *Teoria da Relatividade Restrita* é a que as noções de espaço e tempo deixam de ser independentes e os acontecimentos passam a ser descritos não num espaço de três dimensões espaciais mais uma dimensão temporal, mas sim num *espaço-tempo* quadrimensional no qual o tempo é visto como a quarta dimensão de um acontecimento. Ao espaço-tempo quadrimensional onde se desenvolve toda a teoria da relatividade restrita chama-se *espaço* ou *universo de Minkowski*.

3.2.1. Universo de Minkowski

“Meus senhores: As considerações sobre espaço e tempo que desejo expor-vos brotaram do terreno da Física Experimental. Aí reside a sua força. A sua tendência é radical. Daqui em diante os conceitos de espaço e de tempo, considerados como autónomos, vão desvanecer-se como sombras e somente se reconhecerá existência independente a uma espécie de união entre os dois.” (Minkowski, 1908)

Hermann Minkowski (1864 – 1909), em 1908, numa conferência realizada no octogésimo congresso dos naturalistas e médicos alemães de Colónia, intitulada *Espaço e Tempo*, apresentou com base nos trabalhos de Einstein, seu antigo aluno, o trabalho que havia desenvolvido no conceito de espaço e tempo, tendo considerado que estas duas entidades não poderiam ser apresentadas de forma separada, mas sim de forma interligada, ou seja, que qualquer fenómeno natural não pode ser descrito num espaço e num tempo independentes, respetivamente a três e a uma dimensão, mas num espaço-tempo a quatro dimensões.

A partir desta perspetiva todo e qualquer ponto do espaço-tempo é um acontecimento físico que fica bem definido através de quatro coordenadas (x, y, z, t) , no referencial inercial S , em que as três primeiras são coordenadas espaciais euclidianas, que nos dão a localização do

acontecimento, e a quarta coordenada é uma coordenada temporal, que nos dá o instante em que o mesmo ocorre, reciprocamente, as coordenadas do mesmo acontecimento em relação ao referencial inercial S' seriam $(x', y', z' e t')$. A este espaço quadrimensional contínuo, chama-se hoje de espaço-tempo ou universo de Minkowski.

O conjunto de todos os acontecimentos da vida de um observador, ou de uma partícula formam uma trajetória do espaço-tempo que se designa por *linha do Universo* deste observador ou desta partícula.

3.2.2. Métrica de Minkowski

Vimos anteriormente, aquando da dedução das transformações de Lorentz, que para qualquer intervalo do “tipo luz” se verifica

$$s^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = s'^2, \quad (3.44)$$

onde, (x, y, z, t) e (x', y', z', t') são as coordenadas de um mesmo acontecimento visto para um observador inercial de S e de S' , respetivamente.

À semelhança do que acontece num espaço euclidiano, onde a generalização do teorema de Pitágoras permite-nos afirmar que

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 \quad (3.45)$$

é um comprimento invariante, independentemente, da transformação geométrica, também o espaço-tempo é caracterizado pelo invariante fundamental

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - c^2 \Delta t^2 \text{ ou } \Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 \quad (3.46)$$

que traduz a invariância da velocidade da luz no vácuo e que, também, é interpretado como a “distância” entre dois acontecimentos no espaço-tempo e, por isso, é designado de *intervalo do universo* ou *intervalo relativista*. Esta métrica por ter assinatura $(+, +, +, -)$, também poderia ter assinatura oposta $(-, +, +, +)$, diz-se uma métrica *pseudo-euclidiana* e, ao contrário do que acontece para a métrica euclidiana, poderá levar a resultados negativos.

Consequentemente, para um deslocamento infinitesimal da frente da onda luminosa temos que

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 = 0 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 - c^2 dt'^2 = ds'^2, \quad (3.47)$$

sendo ds^2 o quadrado do intervalo elementar entre dois acontecimentos definidos, respetivamente, por (x, y, z, t) e $(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt)$. Assim, sempre que dois acontecimentos muito próximos correspondam à passagem de uma mesma frente de onda luminosa que se propaga no vácuo, o intervalo entre eles é nulo, independentemente do referencial inercial que se considere e, portanto, este intervalo “tipo luz” é invariante. Esta invariância também se mantém para acontecimentos de outro tipo, como se demonstrará mais adiante.

Introduzindo no espaço-tempo a métrica definida em (3.46), e atendendo à invariância do quadrado do intervalo relativista, obtemos um espaço métrico que se designa por universo de Minkowski.

3.2.3. Intervalo relativista

Como já foi visto, todo e qualquer acontecimento fica completamente definido à custa do seu vetor posição \vec{r} , de componentes x, y e z e pelo instante t , em que esse acontecimento se deu. Sendo assim, fica definido pelo quadri vetor de componentes (x, y, z, t) ou (t, x, y, z) . Para além disso, vimos para intervalos do tipo luz ($s = s' = 0$) que o quadrado da distância entre dois quaisquer acontecimentos, no espaço-tempo quadrimensional ou universo de Minkowski é dado por,

$$s^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 \quad (3.48)$$

e que este é invariante face às transformações de Lorentz, pelo que

$$s^2 = s'^2. \quad (3.49)$$

Estas conclusões são válidas, como visto anteriormente, para uma onda luminosa ligando dois acontecimentos (“emissão” e “recepção” num ponto dessa onda). Verifiquemos, agora, que a invariância se mantém para qualquer tipo de intervalo entre dois acontecimentos quaisquer.

Consideremos, portanto, o quadrivetor de componentes (x, y, z, t) . A sua norma quadrada no referencial inercial S é-nos dada por

$$s^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2, \quad (3.50)$$

e no referencial inercial S' por

$$s'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2. \quad (3.51)$$

Verifiquemos que s^2 e s'^2 se mantêm invariantes, atendendo às transformações de Lorentz, ou seja, que tomam o mesmo valor.

Substituindo em (3.51) x', y', z' e t' pelas igualdades das transformações de Lorentz (3.40), segue que

$$s'^2 = \left[\gamma(x - vt) \right]^2 + y^2 + z^2 - c^2 \left[\gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x \right) \right]^2, \quad (3.52)$$

desenvolvendo os quadrados de (3.52) e simplificando, obtemos

$$s'^2 = \gamma^2 x^2 + \gamma^2 v^2 t^2 - \gamma^2 c^2 t^2 - \gamma^2 \frac{v^2}{c^2} x^2 + y^2 + z^2, \quad (3.53)$$

por sua vez, colocando em evidência $c^2 \gamma^2$, de modo conveniente, e os fatores comuns em (3.53) ficamos com

$$s'^2 = c^2 \gamma^2 \left[\frac{x^2}{c^2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) - t^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \right] + y^2 + z^2. \quad (3.54)$$

Atendendo a que

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = (\gamma^{-1})^2, \quad (3.55)$$

de (3.54) e (3.55) somos levados à igualdade

$$s'^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 \Leftrightarrow s'^2 = s^2, \quad (3.56)$$

ficando, conseqüentemente, demonstrada a invariância do intervalo relativista entre dois acontecimentos quaisquer, independentemente dos referenciais inerciais onde as suas coordenadas estão e são medidas.

3.2.4. Diagramas de Minkowski

Os *diagramas espaço-tempo*, também conhecidos por *diagramas de Minkowski*, são diagramas no espaço-tempo que sobrepõem as coordenadas de dois referenciais inerciais, S e S' , em que o segundo referencial se desloca em relação ao primeiro com uma velocidade constante e que nos fornecem uma ilustração das propriedades do espaço e do tempo na *Teoria da Relatividade Restrita*. Estes diagramas, normalmente, apresentam apenas uma dimensão espacial para facilidade de desenho (uma vez que seria impossível fazê-lo com três dimensões espaciais), tendo como principal objetivo permitir que as coordenadas de espaço e tempo, x e t , relativas ao referencial inercial S , tenham o seu valor correspondente x' e t' , relativas ao referencial inercial S' . As coordenadas espaciais y e z , em S , e y' e z' , em S' , não são tidas em conta, uma vez que se mantêm invariantes de um referencial inercial para o outro.

A qualquer acontecimento físico corresponderá um ponto no universo de Minkowski e a sua evolução no tempo descreve uma trajetória que se designa por *linha do universo*.

Considere-se, agora, uma partícula que se move ao longo do eixo das abcissas, Ox , com uma velocidade constante de módulo v , conseqüentemente, a sua linha do universo é-nos dada por,

$$x = vt = \frac{v}{c}(ct) \Leftrightarrow x = \beta ct \Leftrightarrow ct = \frac{1}{\beta}x, \text{ com } \beta = \frac{v}{c} \quad (3.57)$$

que é uma reta oblíqua relativamente a Ox . Esta partícula poderá ser associada a um sistema inercial S' que se desloca relativamente a S com uma velocidade constante e uniforme de módulo v .

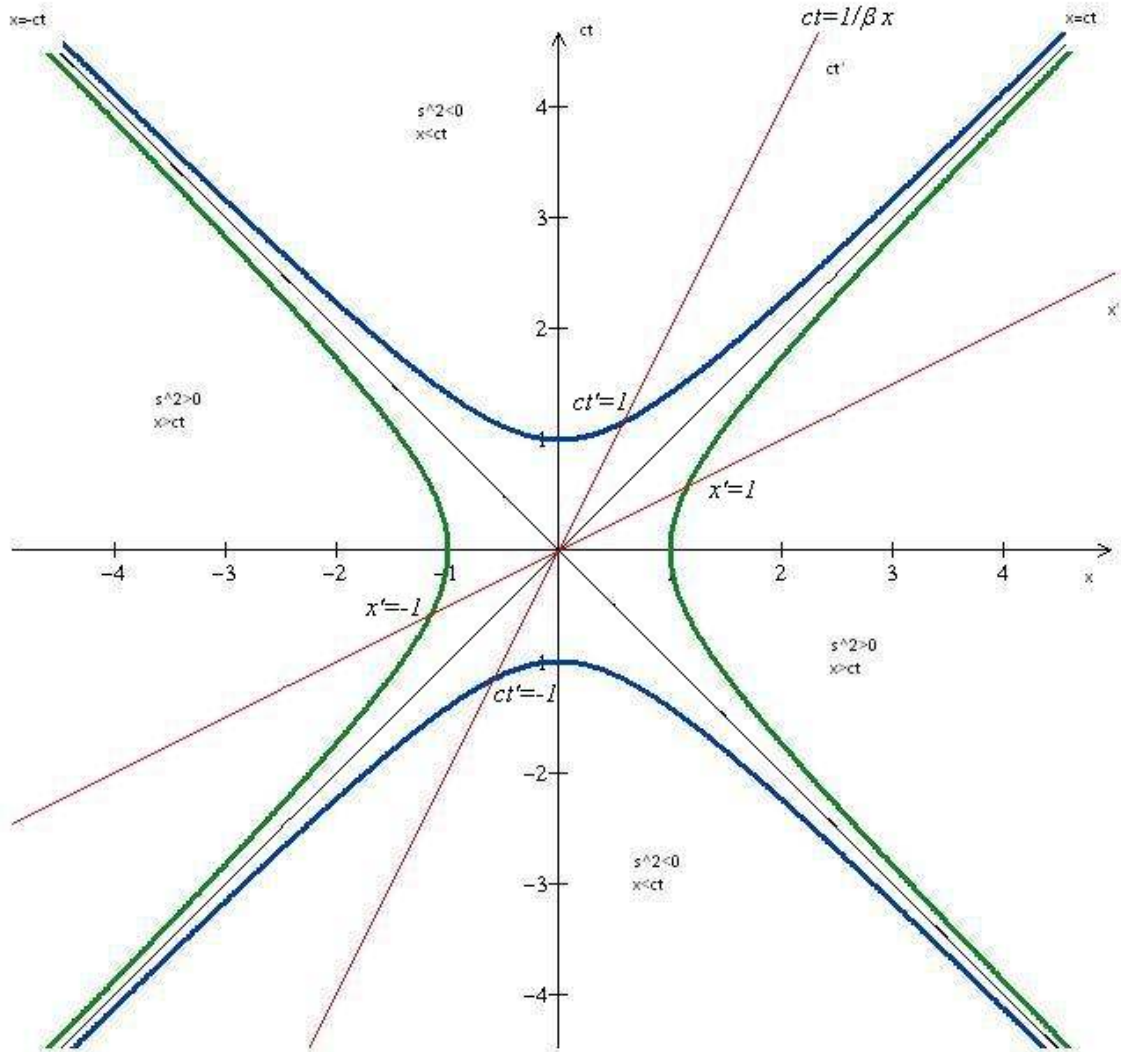


Figura 4: Diagrama de Minkowski para dois referenciais.

A reta de equação $ct = \frac{1}{\beta}x$, que se observa na figura anterior, representa a linha do universo da partícula dada por um relógio do observador da mesma, em S' . Consideremos que todos os acontecimentos sobre esta linha ocorrem para $x' = 0$ e, conseqüentemente, a mesma representa o eixo $O'ct'$. Para calibrar este eixo desenhemos a hipérbole definida por $x^2 - c^2t^2 = 1$. Uma vez que o intervalo relativista é invariante, todos os pontos pertencentes a esta verificam a condição $x'^2 - c^2t'^2 = 1$. Da interseção do ramo positivo da hipérbole com o eixo $O'ct'$, resulta o ponto de coordenadas $x' = 0$ e $ct' = 1$. Por sua vez, para

traçarmos o eixo $O'x'$, temos de determinar os pontos onde os acontecimentos têm $t' = 0$. A partir das transformações de Lorentz sabemos que

$$t' = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x \right) \quad (3.58)$$

e, assim sendo, segue que

$$\gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x \right) = 0 \Leftrightarrow t - \frac{v}{c^2} x = 0 \Leftrightarrow c^2 t = vx \Leftrightarrow ct = \frac{v}{c} x \Leftrightarrow ct = \beta x \quad (3.59)$$

que é a equação do eixo $O'x'$. Desenhando, agora, a hipérbole de equação $x^2 - c^2 t^2 = -1$, calibra-se o eixo $O'x'$, procedendo de modo análogo ao descrito anteriormente. Atendendo a que o declive do eixo $O'ct'$ é $\frac{1}{\beta}$ e que o do eixo $O'x'$ é β , conclui-se que o ângulo entre Ox e $O'x'$ é congruente ao ângulo entre $O'ct'$ e Oct .

Note-se que todos os acontecimentos simultâneos em S , isto é que ocorrem ao mesmo tempo, estão sobre retas paralelas ao eixo Ox , por sua vez acontecimentos simultâneos em S' deverão estar sobre retas paralelas a $O'x'$.

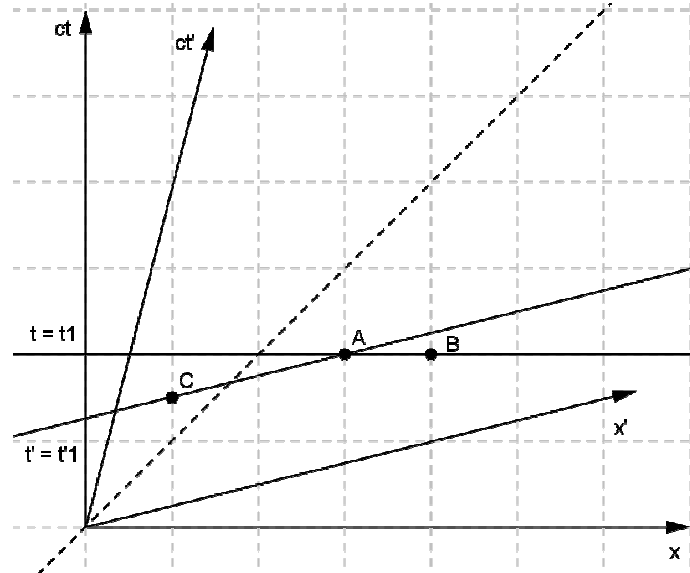


Figura 5: Os acontecimentos A e B são simultâneos em S , pois ocorrem no mesmo instante t_1 , contudo não são simultâneos em S' . Por sua vez, os acontecimentos A e C são simultâneos em S' , pois ocorrem no mesmo instante t'_1 , mas não são simultâneos em S . A reta AB designa-se linha de simultaneidade em S e a reta AC chama-se linha de simultaneidade em S' .

Os acontecimentos que se encontram sobre retas paralelas a Oct estão sobre a mesma linha do universo, relativamente, a S , enquanto acontecimentos sobre a mesma reta paralela a $O'ct'$ se encontram na mesma linha do universo face a S' .

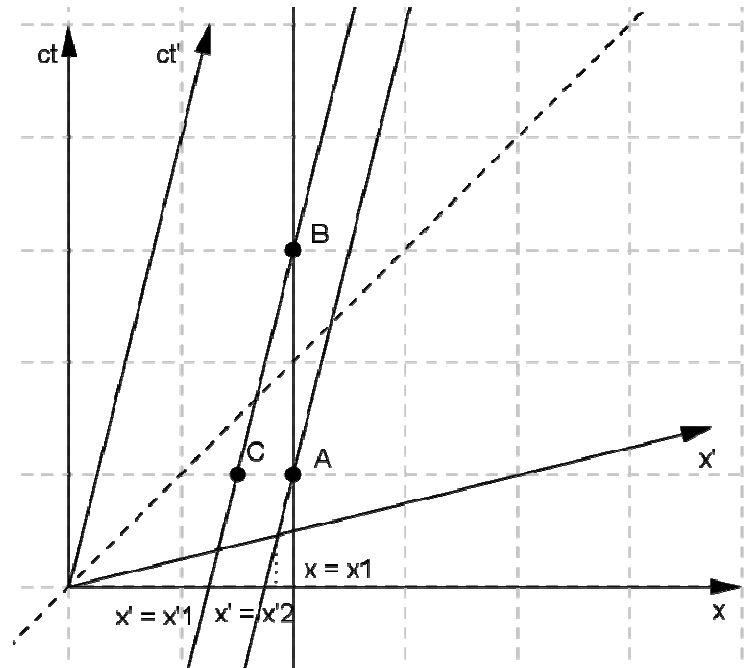


Figura 7: Os acontecimentos A e B estão sobre a mesma linha do universo em S , $x = x_1$ (reta paralela a Ot), no entanto não se encontram na mesma linha do universo em S' . Os acontecimentos B e C encontram-se na mesma linha do universo em S' , $x' = x'_1$ (reta paralela a $O't'$), mas, por sua vez, tal não se verifica em S .

Por sua vez, um observador de S' observa comprimentos superiores aos que observa um observador de S , fenómeno designado por *contração do espaço* como se pode observar no diagrama de Minkowski seguinte.

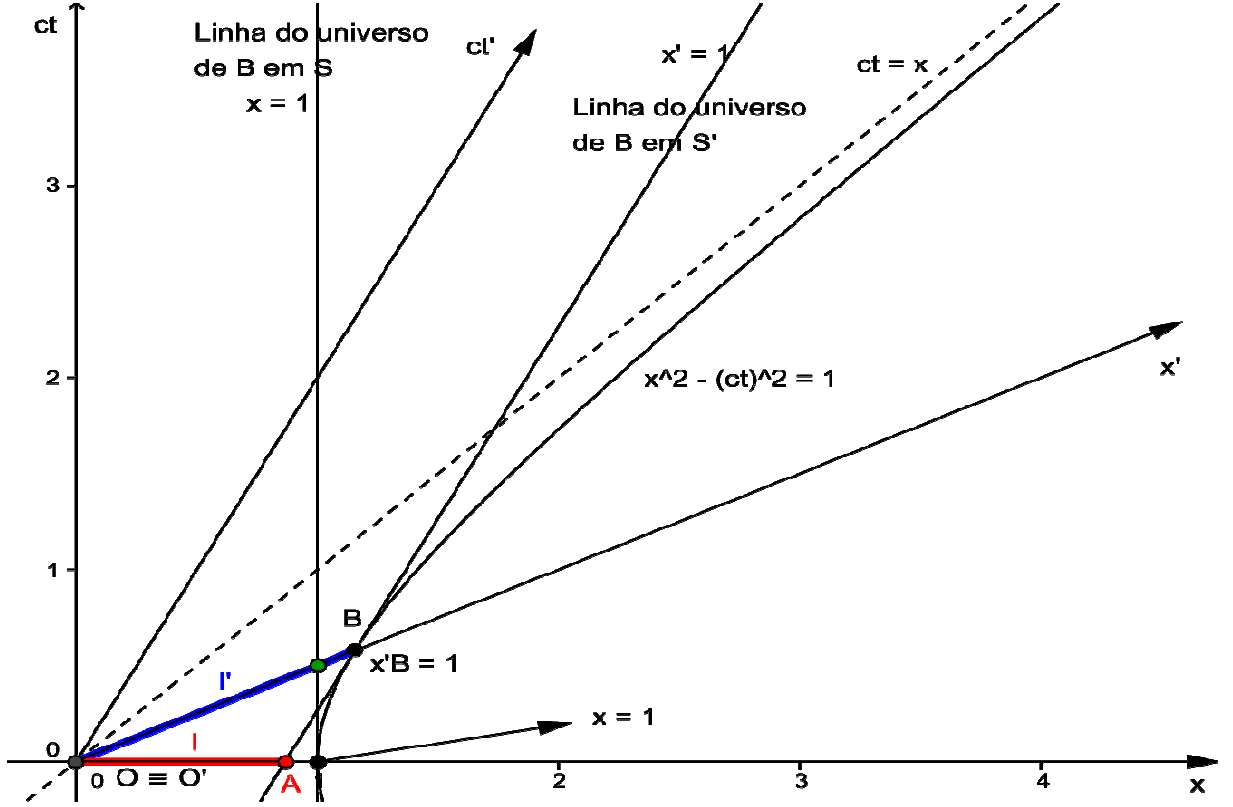


Figura 8: Fenómeno da contração do espaço observado num diagrama de Minkowski.

O acontecimento B , do ponto de vista de S' , ocorreu numa posição $x'_B = 1$, sendo que do ponto de vista geométrico este acontecimento pertence à hipérbole de equação $x^2 - (ct)^2 = 1$, logo também pertence à hipérbole de equação $x'^2 - (ct')^2 = 1$, pois o intervalo relativista é invariante. Contudo, como se pode verificar na figura 8, para um observador em S o acontecimento ocorreu numa posição inferior a 1, $x_A < 1$, pelo que se conclui que o espaço apresenta-se contraído para um observador de S , relativamente, ao que presencia um observador de S' .

Em jeito de conclusão, é necessário ter em atenção que a medição do comprimento exige a localização simultânea dos dois extremos da “régua”. Assim, em S , $l = \overline{OA}$ e, em S' , $l' = \overline{OB} = 1 = x'_B$, e tendo em conta a invariância do intervalo relativista, concluímos que $x_A = x_A - 0 = l < 1$, ou seja, em S' a “régua” mede uma unidade de medida de comprimento e em S mede menos do que uma unidade de medida de comprimento.

3.2.5. Cone de Luz

Consideremos um acontecimento A no espaço-tempo. Convém introduzir o conceito de *cone de luz* relativo a este acontecimento, imaginando que do mesmo emanam raios de luz ou nele convergem (aqui a uma só dimensão espacial, x) e como a velocidade da luz no vácuo é a maior velocidade que fisicamente se pode obter, o cone de luz divide o espaço-tempo em três regiões que se designam por passado de A , futuro de A e algures absoluto, como se pode observar na figura 10. O passado de A encontra-se no semi-cone inferior e, consequentemente, lá se encontram todos os acontecimentos que o podem influenciar. Por sua vez, o futuro de A encontra-se no semi-cone superior e, obviamente, lá se encontram todos os acontecimentos que podem ser influenciados por A . Na região fora dos semi-cones referidos, algures absoluto, encontram-se os acontecimentos que não têm qualquer conexão com A e que, como tal, não podem influenciar, nem ser influenciados por A , pois não existem sinais superluminais que os possam ligar.

Em consequência da velocidade da luz no vácuo ser a máxima possível, podemos ter três tipos de intervalos que se apresentam na tabela seguinte.

Sinal do quadrado do intervalo relativista	Velocidade do acontecimento	Tipo de intervalo	Região do espaço-tempo onde ocorre
$\Delta s^2 = 0$ (A distância entre os dois acontecimentos é exatamente percorrida pela luz no intervalo de tempo que os separa.)	$v = c$	Tipo luz	Fronteira do Cone de Luz
$\Delta s^2 < 0$ (A distância entre os dois acontecimentos é menor que o espaço percorrido pela luz no intervalo de tempo que os separa.)	$v < c$	Tipo tempo	Interior do Cone de Luz

$\Delta s^2 > 0$ (No intervalo de tempo que separa os dois acontecimentos a luz não pode percorrer a distância que os separa.)	$v > c$	Tipo espaço	Exterior do Cone de Luz
---	---------	-------------	-------------------------

Figura 9: Classificação dos intervalos no universo de Minkowski.

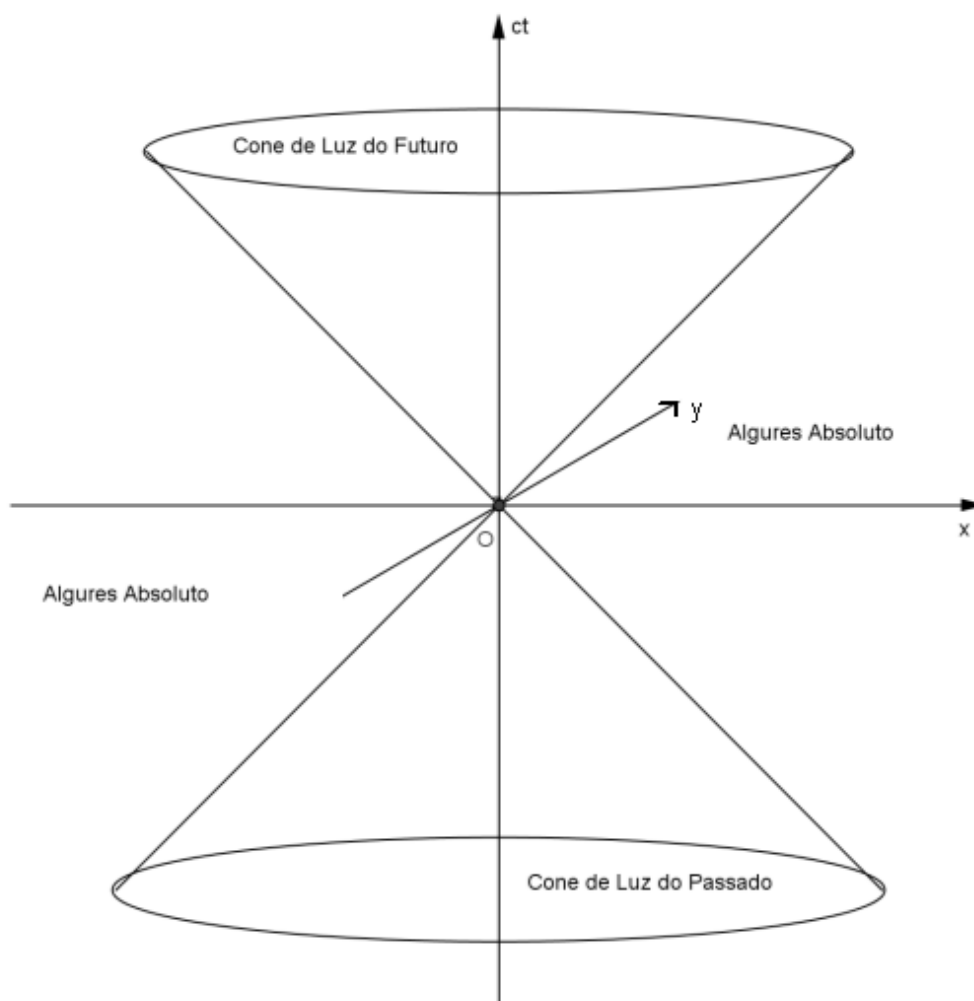


Figura 10: Cone de luz de um acontecimento O, origem das coordenadas onde o cone de luz está definido.

3.3. Dilatação do tempo

Como é do nosso conhecimento, o tempo em relatividade restrita não é absoluto, como se considerava na Física Clássica, mas sim relativo, uma vez que o mesmo é medido relativamente a referenciais inerciais distintos.

Demonstremos o que acabamos de enunciar, com base numa experiência muito simples e de fácil percepção.

Consideremos um autocarro com um espelho no teto. Consideremos, também, uma lâmpada no chão do mesmo autocarro. Vamos, ainda, considerar dois observadores, um no interior do autocarro, junto à lâmpada, e outro no exterior do autocarro, que representaremos por O' e O , respetivamente.

Consideremos que o autocarro se desloca, relativamente ao referencial do observador do exterior, O , com uma velocidade \vec{v} de módulo $v = \|\vec{v}\|$. Admitamos que quando os dois observadores O e O' se encontram um à frente do outro a lâmpada emite um raio luminoso em direção ao teto do autocarro, perpendicularmente ao movimento deste, e que o referido raio é refletido até atingir novamente o plano do chão, onde se encontra a lâmpada. Admitamos que a distância da lâmpada ao teto no seu referencial próprio, o autocarro, é h .

Determinemos o tempo necessário para que a luz faça a viagem de ida e volta, após a reflexão do espelho, no referencial do autocarro, S' , tempo este medido pelo observador O' , e representemo-lo por $\Delta t'$.

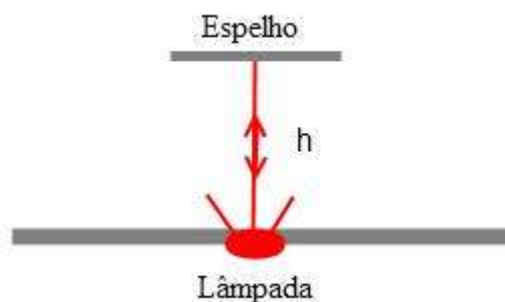


Figura 11: Trajeto do raio luminoso visto pelo observador O' .

Facilmente se conclui que

$$\Delta t' = \frac{2h}{c}, \quad (3.60)$$

pois o raio luminoso percorre caminhos idênticos na ida e na volta de comprimento h .

Determinemos, por sua vez, o tempo necessário para que a luz faça a viagem de ida e volta, após a reflexão do espelho, no referencial do observador O , isto é no referencial do exterior do autocarro, S , tempo este medido pelo observador O , e representemos este tempo por Δt . Ora, para este observador a situação é diferente da observada pelo observador O' , pois ele observará os momentos de emissão e receção do raio luminoso em pontos diferentes distanciados um do outro $d = v\Delta t$, como se pode observar na figura 12.

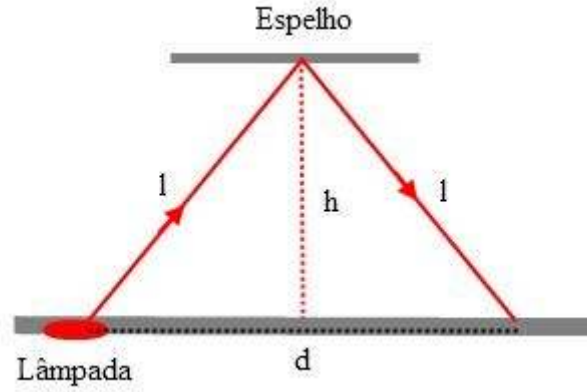


Figura 12: Trajeto do raio luminoso visto pelo observador O .

Calculemos, então, a distância percorrida pelo raio luminoso, s , do ponto de vista do observador O . Assim sendo,

$$s = 2l = 2\sqrt{h^2 + \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2}, \quad (3.61)$$

pois,

$$l^2 = h^2 + \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2 \quad (3.62)$$

e o tempo necessário para o raio luminoso percorrer esta distância é-nos dado por

$$\Delta t = \frac{2\sqrt{h^2 + \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2}}{c}, \quad (3.63)$$

uma vez que, de acordo com os postulados de Einstein, a luz percorre aquelas duas hipotenusas à velocidade c (que é comum a todos os referenciais).

Eliminando o radical quadrático da equação (3.63) vem

$$\frac{c\Delta t}{2} = \sqrt{h^2 + \frac{v^2\Delta t^2}{4}} \Rightarrow c^2\Delta t^2 = 4h^2 + v^2\Delta t^2 \quad (3.64)$$

e, consequentemente, de (3.64)

$$\Delta t^2(c^2 - v^2) = 4h^2 \Rightarrow \Delta t = \frac{2h}{\sqrt{c^2 - v^2}}. \quad (3.65)$$

Dividindo por c , ambos os termos da fração presente no segundo membro da equação (3.65), e tendo por base (3.60), vem

$$\Delta t = \frac{\frac{2h}{c}}{\sqrt{\frac{c^2 - v^2}{c^2}}} \Leftrightarrow \Delta t = \frac{2h}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Leftrightarrow \Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (3.66)$$

Atendendo a que $v < c$, segue que $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} < 1$ e em consequência disso $\Delta t > \Delta t'$, isto significa que o intervalo de tempo $\Delta t'$, medido no referencial próprio S' e observado por um observador O' , que decorre entre o instante de emissão e o instante de receção do raio luminoso, e que se designa por tempo próprio, é inferior ao intervalo de tempo Δt , necessário para a ocorrência deste mesmo fenómeno, para um observador O que se encontre num referencial inercial S que vê o referencial S' deslocar-se em relação a si por uma velocidade de módulo v . Em jeito de conclusão, podemos dizer que a diferença temporal entre dois acontecimentos que ocorrem num determinado referencial inercial, num mesmo ponto, é inferior à que ocorre noutro referencial inercial que se mova relativamente ao primeiro e no qual, em consequência desse movimento, os dois acontecimentos ocorrem em pontos distintos.

3.4. Contração do espaço

Consideremos uma régua de comprimento $\Delta l'$, comprimento próprio, medido no seu referencial próprio S' . Seja S um referencial em relação ao qual a régua se desloca com uma velocidade constante de módulo v , portanto estamos a admitir que S' se desloca em relação a S com velocidade \vec{v} . Calculemos, então, o comprimento da régua relativamente ao referencial S .

Para tal, realizemos a experiência que consiste em colocar uma fonte luminosa numa extremidade da régua e um espelho na outra extremidade e medir o tempo necessário para que o feixe luminoso vá da fonte até ao espelho e regresse à fonte, como se pode observar na figura 13.

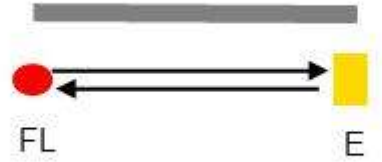


Figura 13: Trajeto do raio luminoso entre a fonte, o espelho e novamente a fonte, no referencial próprio da régua.

No referencial próprio da régua, obviamente, esse tempo é-nos dado por

$$\Delta t' = \frac{2\Delta l'}{c} \Leftrightarrow \Delta l' = \frac{c\Delta t'}{2}. \quad (3.67)$$

Relativamente ao referencial S em repouso, que se desloca relativamente à régua com uma velocidade $-\vec{v}$, o tempo Δt_A necessário para o raio luminoso ir da fonte luminosa, que se encontra numa extremidade da régua, até ao espelho, que se encontra na outra extremidade da mesma é

$$\Delta t_A = \frac{\Delta l + v\Delta t_A}{c} \Leftrightarrow \Delta t_A = \frac{\Delta l}{c - v}, \quad (3.68)$$

sendo Δl o comprimento da régua no referencial S . Por sua vez, o tempo necessário para o raio luminoso regressar, após a reflexão no espelho, à extremidade onde se encontra a fonte luminosa Δt_B é

$$\Delta t_B = \frac{\Delta l - v\Delta t_B}{c} \Leftrightarrow \Delta t_B = \frac{\Delta l}{c + v}. \quad (3.69)$$

Em consequência dos dois resultados obtidos em (3.68) e (3.69), segue que o tempo Δt , necessário para o raio luminoso realizar o percurso definido anteriormente, relativamente ao referencial S , ser-nos-á dado por

$$\Delta t = \Delta t_A + \Delta t_B = \frac{\Delta l}{c - v} + \frac{\Delta l}{c + v} = \frac{2c\Delta l}{c^2 - v^2} \quad (3.70)$$

e resolvendo (3.70) em ordem a Δl obtemos

$$\Delta l = \frac{\Delta t(c^2 - v^2)}{2c} \Leftrightarrow \Delta l = \frac{c\Delta t}{2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right). \quad (3.71)$$

Tendo em conta (3.66), (3.67) e (3.71) segue que

$$\Delta l = \frac{c\Delta t' \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Leftrightarrow \Delta l = \Delta l' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (3.72)$$

e, consequentemente, $\Delta l < \Delta l'$, pois se $v < c$ então $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} < 1$. A esta contração do espaço chamamos contração de Lorentz – Fitzgerald, de acordo com a qual os comprimentos “observados” são máximos no referencial próprio dos corpos.

O fenómeno da contração de um corpo em movimento na direção em que esse se desloca, significa que o corpo diminui de tamanho. No entanto, é necessário tomar atenção à forma de medir o seu comprimento em cada referencial, pois os espaços-tempos relativos ao observador e ao corpo em movimento não são os mesmos, isto é o corpo não tem um só tamanho, mas sim tamanhos, um em cada referencial, incluindo o próprio onde será maior que nos outros.

3.5. A transformação das velocidades

À semelhança do que se fez para a transformação das velocidades face às transformações de Galileu, vamos proceder da mesma forma utilizando, contudo, as transformações de Lorentz.

Vamos considerar um corpo em movimento com velocidade $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$, relativamente ao referencial S e velocidade $\vec{u}' = (u'_x, u'_y, u'_z)$, relativamente a S' , sendo que S' se desloca, relativamente a S , com velocidade retilínea e uniforme $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$. Vejamos então como escrever \vec{u}' em função de \vec{u} . Para tal, comecemos por diferenciar as transformações de Lorentz,

$$\begin{cases} dx' = \gamma(dx - vdt) \\ dy' = dy \\ dz' = dz \\ dt' = \gamma\left(dt - \frac{v}{c^2} dx\right) \end{cases} . \quad (3.73)$$

De acordo com a definição de velocidade e com (3.73), resultam as leis de transformação da velocidade,

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma(dx - vdt)}{\gamma\left(dt - \frac{v}{c^2} dx\right)} = \frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} u_x} \quad (3.75)$$

$$u'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma\left(dt - \frac{v}{c^2} dx\right)} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\gamma\left(1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}\right)} = \frac{u_y}{\gamma\left(1 - \frac{v}{c^2} u_x\right)} \quad (3.76)$$

$$u'_z = \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{\gamma\left(dt - \frac{v}{c^2} dx\right)} = \frac{\frac{dz}{dt}}{\gamma\left(1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}\right)} = \frac{u_z}{\gamma\left(1 - \frac{v}{c^2} u_x\right)} . \quad (3.77)$$

Pelo que a lei de composição das velocidades, segundo a relatividade restrita, é-nos dada por

$$\begin{cases} u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2}u_x} \\ u'_y = \frac{u_y}{\gamma \left(1 - \frac{v}{c^2}u_x\right)} \\ u'_z = \frac{u_z}{\gamma \left(1 - \frac{v}{c^2}u_x\right)} \end{cases} \quad (3.77)$$

Como consequência do resultado anterior, e resolvendo as equações do sistema em ordem a u_x , u_y e u_z , obtém-se a transformação inversa para as velocidades, em relação às transformações de Lorentz.

Comecemos, assim, por determinar a transformação inversa para a componente u_x . De (3.77) temos que

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2}u_x} \quad (3.78)$$

e resolvendo a equação anterior em ordem a u_x obtém-se

$$\begin{aligned} u'_x \left(1 - \frac{v}{c^2}u_x\right) &= u_x - v \Leftrightarrow u_x \left(1 + \frac{v}{c^2}u'_x\right) = u'_x + v \\ \Leftrightarrow u_x &= \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2}u'_x} \end{aligned} \quad (3.79)$$

Por sua vez, de (3.77) temos, também, que

$$u'_y = \frac{u_y}{\gamma \left(1 - \frac{v}{c^2}u_x\right)} \quad (3.80)$$

e resolvendo esta equação em ordem a u_y , considerando de (3.79) que

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x}, \quad (3.81)$$

obtemos,

$$u'_y \left(1 - \frac{v}{c^2} u_x \right) = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} u_y \Leftrightarrow u_y = \frac{u'_y \left(\frac{c^2 - v^2}{c^2 + v u'_x} \right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (3.82)$$

$$\Leftrightarrow u_y = u'_y \left(\frac{c \sqrt{c^2 - v^2}}{c^2 + v u'_x} \right)$$

dividindo ambos os termos da fração do segundo membro da equação (3.82) por c^2 e fazendo alguns cálculos deduz-se que

$$u_y = \frac{u'_y}{\gamma \left(1 + \frac{v}{c^2} u'_x \right)}. \quad (3.83)$$

De forma análoga, conclui-se

$$u_z = \frac{u'_z}{\gamma \left(1 + \frac{v}{c^2} u'_x \right)}. \quad (3.84)$$

Donde

$$\left\{ \begin{array}{l} u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x} \\ u_y = \frac{u'_y}{\gamma \left(1 + \frac{v}{c^2} u'_x \right)} \\ u_z = \frac{u'_z}{\gamma \left(1 + \frac{v}{c^2} u'_x \right)} \end{array} \right. \quad (3.85)$$

é a transformação inversa do vetor velocidade, tendo por base as transformações de Lorentz.

As expressões (3.77) traduzem o teorema da composição das velocidades proposto pela *Teoria da Relatividade Restrita* de Einstein e facilmente se constata que a composição das velocidades não obedece à adição vetorial, tal como acontecia na Física Clássica, não sendo possível obterem-se velocidades infinitas, como se irá constatar facilmente.

De facto, ainda a partir da transformação das velocidades, prova-se que o módulo da velocidade \vec{u} (supondo que a mesma é paralela a \vec{v} entre os dois referenciais) composta a partir das velocidades $\vec{u'}$ e \vec{v} , é sempre inferior a c , a não ser que uma delas ($\vec{u'}$ ou \vec{v}) seja em módulo igual a c e, conseqüentemente, a composição das velocidades vai ser igual a c . Provemos tal afirmação.

i) Considerando $u' < c$ e $v < c$

$$\text{Se } u' < c \text{ e } v < c \text{ então } \frac{u'}{c} < 1 \wedge \frac{v}{c} < 1 \text{ e, conseqüentemente,}$$

$$\frac{u'}{c} - 1 < 0 \wedge \frac{v}{c} - 1 < 0, \text{ donde } \left(\frac{u'}{c} - 1\right)\left(\frac{v}{c} - 1\right) > 0 \Leftrightarrow \frac{u'v}{c^2} + 1 > \frac{u'}{c} + \frac{v}{c} \Leftrightarrow \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}} < c$$

ii) Considerando $u' = c$ e $v < c$ (ou $u' < c$ e $v = c$)

$$u = \frac{c + v}{1 + \frac{v}{c^2}c} = \frac{c(c + v)}{c + v} = c$$

Vejamos um exemplo concreto do que acabamos de dizer.

Consideremos uma nave espacial que se desloca com velocidade constante igual a quatro quintos da velocidade da luz, relativamente ao referencial inercial Terra. Consideremos que esta mesma nave dispara uma munição na direção e sentido do movimento da nave com uma velocidade, também, de quatro quintos da velocidade da luz, relativamente à nave. Determinemos a velocidade da munição relativamente à Terra, não considerando qualquer movimento desta última.

Da análise da questão, verificamos que os referenciais inerciais em questão são a Terra e a nave espacial. Consideremos a Terra como S e a nave como S' . Seja, ainda, v a velocidade

da nave espacial face à Terra e u' a velocidade da munição relativamente à nave, como se pode observar na figura 14.

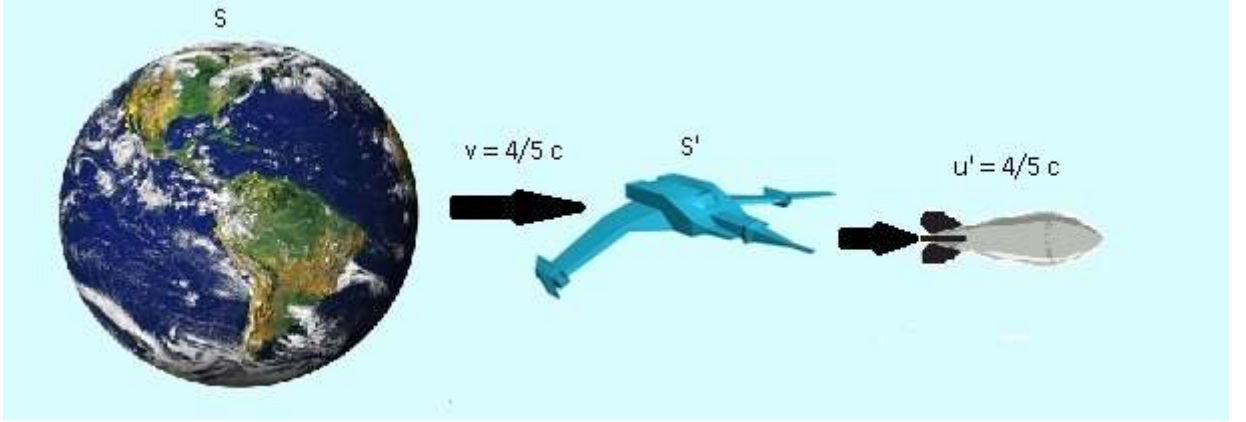


Figura 14: Nave espacial que se desloca face à Terra com uma velocidade constante e dispara uma munição que se desloca relativamente a ela, na mesma direção e sentido, também, com uma velocidade constante e uniforme.

A partir da transformação inversa das velocidades (3.85), temos que a velocidade da munição face à Terra, u , é-nos dada por

$$u = \frac{\frac{4}{5}c + \frac{4}{5}c}{1 + \frac{\frac{4}{5}c}{c^2} \times \frac{4}{5}c} = \frac{\frac{8}{5}c}{1 + \frac{16}{25}} = \frac{40}{41}c < c.$$

3.6. A transformação do momento e da energia

A partir da invariância do intervalo relativista s , tal que $s^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$, podemos definir um quadrivetor, particularmente, importante, o quadrivetor elementar $(ct, \vec{r}) = (ct, x, y, z)$ cuja norma quadrática é dada por $\|ct, \vec{r}\|^2 = c^2t^2 - \|\vec{r}\|^2$. O deslocamento infinitesimal no espaço-tempo, $(cdt, d\vec{r})$, também será um quadrivetor. A

partir deste, construa-se o quadrivetor $\left(m_0 c^2 \frac{dt}{d\tau}, c m_0 \frac{d\vec{r}}{d\tau} \right)$, sendo m_0 a massa de um corpo em repouso e $d\tau$ o diferencial do tempo no referencial próprio do corpo. Podemos garantir que este último é um quadrivetor, pois foi obtido através do anterior multiplicando-se cada componente pela grandeza invariante $\frac{m_0 c}{d\tau}$. Sabemos que o escalar anterior é uma invariante porque a massa de um corpo em repouso é invariante, os lapsos de tempo no referencial próprio do corpo são invariantes e, ainda, como proclama o segundo postulado da *Teoria da Relatividade Restrita* de Einstein, a velocidade da luz é constante no vácuo.

Definamos, agora, as grandezas energia própria, E , e momento linear, \vec{p} , de um corpo em movimento e massa em repouso, m_0 , através das igualdades

$$E = m_0 c^2 \frac{dt}{d\tau} \quad \wedge \quad c \vec{p} = c m_0 \frac{d\vec{r}}{d\tau}. \quad (3.86)$$

Podemos admiti-lo, pois $m_0 c^2 \frac{dt}{d\tau}$ tem dimensão de energia (visto termos um produto entre a massa de um corpo e o quadrado de uma velocidade) e $m_0 \frac{d\vec{r}}{d\tau}$ tem dimensão de momento, uma vez que se tem um produto entre a massa de um corpo e uma velocidade. Sendo assim, fica definido o quadrivetor $(\vec{E}, c \vec{p})$, e, conseqüentemente, o quadrado da sua norma é invariante e dado por

$$\left\| (\vec{E}, c \vec{p}) \right\|^2 = E^2 - c p^2 \quad (3.87)$$

no referencial S , onde o corpo se move. Atendendo à sua invariância e ao facto de no seu referencial próprio, S' , ser $dt' = d\tau$ e $d\vec{r}' = \vec{0}$, pois para um observador do referencial próprio do corpo este estará em repouso e o tempo que mede é o seu tempo próprio, obtém-se a partir de (3.86)

$$E' = m_0 c^2 \quad \wedge \quad c \vec{p}' = \vec{0} \quad (3.88)$$

donde se conclui que

$$\left\| (E', c\vec{p}') \right\|^2 = (m_0 c^2)^2 - 0^2 = m_0^2 c^4 = E'^2 = E_0^2, \quad (3.89)$$

pois $E' = E_0 = m_0 c^2$, sendo $E_0 = m_0 c^2$ a energia própria em repouso de um corpo de massa m_0 .

Por outro lado, e atendendo a (3.86), podemos considerar que

$$E = m_0 c^2 \left(\frac{dt}{d\tau} \right) = mc^2, \quad (3.90)$$

se definirmos a massa m por

$$m = m_0 \frac{dt}{d\tau} = \gamma m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (3.91)$$

pois, no referencial próprio do corpo, S' , $dx' = 0$ e assim das transformações de Lorentz tem-se

$$dt = \gamma \left(d\tau + \frac{v}{c^2} dx' \right) \Rightarrow \gamma = \frac{dt}{d\tau}. \quad (3.92)$$

A m chama-se massa relativista do corpo, não sendo esta constante, (ao contrário da massa própria do corpo m_0) dependendo, como tal, do módulo da velocidade de S' relativamente a S , v .

De (3.90) e (3.91) podemos escrever

$$E = mc^2 = \gamma m_0 c^2 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} c^2. \quad (3.93)$$

Expandindo (3.93) em série de Taylor fica

$$\begin{aligned} E &= m_0 c^2 + c^2 \frac{1}{2} m_0 \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{4} m_0 \frac{v^4}{c^2} + \dots \\ &= m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + \frac{3}{4} m_0 \frac{v^4}{c^2} + \dots \end{aligned} \quad (3.94)$$

em que a segunda parcela da expansão (3.94) é a energia cinética tradicional e as restantes parcelas dão-nos a correção relativista desta mesma energia.

Fazendo, em (3.94), $v = 0$, vem

$$E = m_0 c^2. \quad (3.95)$$

Atendendo a que $(E, c\vec{p})$ é um quadrivetor, o mesmo satisfaz as transformações de Lorentz, pelo que se obtêm as seguintes transformações, como iremos demonstrar, considerando que E funciona como a componente temporal, e $c\vec{p}$ como a componente espacial do *quadrivetor energia – momento*.

Assim, multiplicando o quadrivetor fundamental (cdt, dx, dy, dz) por $\frac{m_0 c}{d\tau}$, vem de

$$(3.86) \quad (E, c\vec{p}) = \left(\frac{m_0 c}{d\tau} cdt, \frac{m_0 c}{d\tau} dx, \frac{m_0 c}{d\tau} dy, \frac{m_0 c}{d\tau} dz \right), \text{ donde se obtém}$$

$$\begin{cases} E = m_0 c^2 \frac{dt}{d\tau} \\ p_x = m_0 \frac{dx}{d\tau} \\ p_y = m_0 \frac{dy}{d\tau} \\ p_z = m_0 \frac{dz}{d\tau} \end{cases}. \quad (3.96)$$

De (3.40) temos, também, que

$$\begin{cases} dt' = \gamma \left(dt - \frac{v}{c^2} dx \right) \\ dx' = \gamma (dx - v dt) \\ dy' = dy \\ dz' = dz \end{cases}. \quad (3.97)$$

Multiplicando ambos os membros da primeira equação do sistema (3.97) por c e multiplicando e dividindo por c o termo $v dt$ da segunda equação do mesmo sistema, segue

$$\begin{cases} cdt' = \gamma \left(cdt - \frac{v}{c} dx \right) \\ dx' = \gamma \left(dx - \frac{v}{c} cdt \right), \\ dy' = dy \\ dz' = dz \end{cases} \quad (3.98)$$

multiplicando, agora, ambos os termos das equações do sistema (3.98) por $\frac{m_0 c}{d\tau}$, ficamos com

$$\begin{cases} \frac{m_0 c}{d\tau} cdt' = \gamma \left(\frac{m_0 c}{d\tau} cdt - \frac{m_0 c}{d\tau} \frac{v}{c} dx \right) \\ \frac{m_0 c}{d\tau} dx' = \gamma \left(\frac{m_0 c}{d\tau} dx - \frac{v}{c} \frac{m_0 c}{d\tau} cdt \right) \\ \frac{m_0 c}{d\tau} dy' = \frac{m_0 c}{d\tau} dy \\ \frac{m_0 c}{d\tau} dz' = \frac{m_0 c}{d\tau} dz \end{cases} \quad (3.99)$$

Atendendo a (3.96) obtemos de (3.99) que

$$\begin{cases} E' = \gamma (E - vp_x) \\ cp'_x = \gamma \left(cp_x - \frac{v}{c} E \right) \\ cp'_y = cp_y \\ cp'_z = cp_z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} E' = \gamma (E - vp_x) \\ p'_x = \gamma \left(p_x - \frac{v}{c^2} E \right) \\ p'_y = p_y \\ p'_z = p_z \end{cases} \quad (3.100)$$

que se designa por transformação do momento e energia. Consequentemente, resolvendo as equações do sistema (3.100) em ordem a E , p_x , p_y e p_z , respetivamente, vem

$$\begin{cases} E' = \gamma (E - vp_x) \\ p'_x = \gamma \left(p_x - \frac{v}{c^2} E \right) \\ p'_y = p_y \\ p'_z = p_z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} E = \frac{E'}{\gamma} + vp_x \\ p'_x = \gamma \left[p_x - \frac{v}{c^2} \left(\frac{E'}{\gamma} + vp_x \right) \right] \\ p_y = p'_y \\ p_z = p'_z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} E = \frac{E'}{\gamma} + v p_x \\ p_x = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{p'_x + \frac{v}{c^2} E'}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right) \\ p_y = p'_y \\ p_z = p'_z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} E = \gamma E' \left(\gamma^{-2} + \frac{v^2}{c^2} \right) + \gamma v p'_x \\ p_x = \gamma \left(p'_x + \frac{v}{c^2} E' \right) \\ p_y = p'_y \\ p_z = p'_z \end{cases} \quad (3.101)$$

obtendo-se, assim, a transformação inversa do momento e energia

$$\begin{cases} E = \gamma \left(E' + v p'_x \right) \\ p_x = \gamma \left(p'_x + \frac{v}{c^2} E' \right) \\ p_y = p'_y \\ p_z = p'_z \end{cases} \quad (3.102)$$

3.7. A transformação da força

Vimos no capítulo 2 que a força, classicamente, é definida por

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\vec{a}, \quad (3.103)$$

mantendo-se esta relação covariante em relação às transformações de Galileu. Contudo, apesar da relatividade de Einstein, definida com base nas transformações de Lorentz, estabelecer a invariância do *intervalo relativista* s^2 e tornar as equações de Maxwell covariantes, como demonstraremos no capítulo 4, não mantinha as leis da Dinâmica de Newton covariantes. Consequentemente, para Einstein estas mesmas leis tinham de ser “retocadas”, por exemplo no que à admissão da invariância da massa de um corpo em movimento diz respeito.

Mostremos, então, que a segunda lei de Newton, tal como a conhecemos, não é covariante face às transformações de Lorentz. Como é do nosso conhecimento, no referencial inercial S' , o vetor força é-nos dado por

$$\vec{F}' = (F'_x, F'_y, F'_z) = \left(m \frac{d^2 x'}{dt'^2}, m \frac{d^2 y'}{dt'^2}, m \frac{d^2 z'}{dt'^2} \right), \quad (3.104)$$

pelo que de (3.104)

$$F'_x = m \frac{d^2 x'}{dt'^2} = \frac{d}{dt'} \left(m \frac{dx'}{dt'} \right) = \frac{d}{dt'} (mu'_x) = \frac{dp'_x}{dt'} \quad (3.105)$$

e, do mesmo modo,

$$F'_y = \frac{dp'_y}{dt'} \quad \wedge \quad F'_z = \frac{dp'_z}{dt'}. \quad (3.106)$$

Atendendo a que (E, cp_x, cp_y, cp_z) é um quadrivetor, sendo E a energia e p_x, p_y e p_z as componentes do momento linear, e, consequentemente, obedecer à transformação de Lorentz, e classicamente ser, também,

$$\frac{dE}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{u}, \quad (3.107)$$

onde \vec{F} será a força aplicada a um corpo que se move à velocidade \vec{u} e $\frac{dE}{dt}$ a sua taxa temporal de variação de energia. De facto, o elemento de trabalho de uma força \vec{F} deslocando um corpo de uma distância elementar $d\vec{l}$, à velocidade instantânea \vec{u} , é dado pelo produto interno

$$dw = \vec{F} \cdot d\vec{l} = \vec{F} \cdot (\vec{u} dt) = \vec{F} \cdot \vec{u} dt, \quad (3.108)$$

e, consequentemente, de (3.108) vem

$$\frac{dw}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{u}, \quad (3.109)$$

como escrevemos atrás. Além disso, $dw = dE$, por conservação de energia, uma vez que o trabalho dw realizado é convertido na energia dE .

De (3.40), (3.100), (3.105) e (3.107) chegamos a

$$\begin{aligned}
 F'_x &= \frac{dp'_x}{dt'} = \frac{d\left[\gamma\left(p_x - \frac{v}{c^2}E\right)\right]}{d\left[\gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)\right]} = \frac{dp_x - \frac{v}{c^2}dE}{dt - \frac{v}{c^2}dx} \\
 &= \frac{\frac{dp_x}{dt} - \frac{v}{c^2}\frac{dE}{dt}}{\frac{dt}{dt} - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}} = \frac{F_x - \frac{v}{c^2}(\vec{F} \cdot \vec{u})}{1 - \frac{v}{c^2}u_x}
 \end{aligned} \tag{3.110}$$

e, do mesmo modo, a

$$F'_y = \frac{dp'_y}{dt'} = \frac{dp_y}{\gamma\left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right)} = \frac{\frac{dp_y}{dt}}{\gamma\left(\frac{dt}{dt} - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}\right)} = \frac{F_y}{\gamma\left(1 - \frac{v}{c^2}u_x\right)} \tag{3.111}$$

e a

$$F'_z = \frac{dp'_z}{dt'} = \frac{dp_z}{\gamma\left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right)} = \frac{\frac{dp_z}{dt}}{\gamma\left(\frac{dt}{dt} - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}\right)} = \frac{F_z}{\gamma\left(1 - \frac{v}{c^2}u_x\right)}. \tag{3.112}$$

Estas serão, então, as regras da transformação relativista das componentes de uma força \vec{F} , medidas num referencial inercial S' . Consequentemente, a segunda lei de Newton, em Relatividade Restrita, não é covariante face às transformações de Lorentz, uma vez que sendo

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \text{ não se verifica } \vec{F}' = \frac{d\vec{p}'}{dt'}.$$

Vejamos, agora, como se transformam as componentes de uma força na passagem de S' para S , isto é, quais as transformações inversas das que acabamos de concluir.

De (3.41), (3.102) e (3.107) vem que

$$\vec{F} \cdot \vec{u} = \frac{dE}{dt} = \frac{\gamma d(E' + vp'_x)}{\gamma d\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right)} = \frac{\frac{dE'}{dt'} + v \frac{dp'_x}{dt'}}{\frac{dt'}{dt'} + \frac{v}{c^2} \frac{dx'}{dt'}} = \frac{(\vec{F}', \vec{u}') + vF'_x}{1 + \frac{v}{c^2}u'_x}, \quad (3.113)$$

por sua vez, substituindo (3.81) e (3.113) em (3.110), vem

$$F'_x = \frac{F_x - \frac{v}{c^2} \left[\frac{(\vec{F}', \vec{u}') + vF'_x}{1 + \frac{v}{c^2}u'_x} \right]}{1 - \frac{v}{c^2} \left(\frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2}u'_x} \right)}. \quad (3.114)$$

Reduzindo ao mesmo denominador os termos do segundo membro da equação anterior, e

atendendo a que $1 + \frac{v}{c^2}u'_x \neq 0$, obtemos

$$F'_x = \frac{\left(1 + \frac{v}{c^2}u'_x\right)F_x - \frac{v}{c^2}[(\vec{F}', \vec{u}') + vF'_x]}{\left(1 + \frac{v}{c^2}u'_x\right) - \frac{v}{c^2}(u'_x + v)}, \quad (3.115)$$

$$\Leftrightarrow F'_x = \frac{\left(1 + \frac{v}{c^2}u'_x\right)F_x - \frac{v}{c^2}(\vec{F}', \vec{u}') - \frac{v^2}{c^2}F'_x}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

pelo que

$$F'_x = \frac{F'_x + \frac{v}{c^2}(\vec{F}', \vec{u}')}{1 + \frac{v}{c^2}u'_x}. \quad (3.116)$$

Por sua vez, substituindo (3.81) em (3.111) vem

$$F'_y = \frac{F_y}{\gamma \left[1 - \frac{v}{c^2} \left(\frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x} \right) \right]} \Leftrightarrow F'_y \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = \frac{F_y \left(1 + \frac{v}{c^2} u'_x \right)}{\gamma} \quad (3.117)$$

$$\Leftrightarrow F_y = \frac{F'_y}{\gamma \left(1 + \frac{v}{c^2} u'_x \right)}$$

E, do mesmo modo, se conclui que

$$F_z = \frac{F'_z}{\gamma \left(1 + \frac{v}{c^2} u'_x \right)}. \quad (3.118)$$

Ao contrário do que acontecia face às transformações de Galileu, onde $\vec{F}' = \vec{F}$, constata-se, a partir dos resultados anteriores, que face às transformações de Lorentz a força não é uma grandeza invariante.

O quando abaixo apresenta-nos, de uma forma sintetizada, as transformações das grandezas da mecânica relativamente às transformações de Lorentz.

Grandezas	Transformações	
	S para S'	S' para S
Coordenadas	$x' = \gamma(x - vt)$ $y' = y$ $z' = z$ $t' = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x \right)$	$x = \gamma(x' + vt')$ $y = y'$ $z = z'$ $t = \gamma \left(t' + \frac{v}{c^2} x' \right)$

Velocidade	$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2}u_x}$ $u'_y = \frac{u_y}{\gamma\left(1 - \frac{v}{c^2}u_x\right)}$ $u'_z = \frac{u_z}{\gamma\left(1 - \frac{v}{c^2}u_x\right)}$	$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2}u'_x}$ $u_y = \frac{u'_y}{\gamma\left(1 + \frac{v}{c^2}u'_x\right)}$ $u_z = \frac{u'_z}{\gamma\left(1 + \frac{v}{c^2}u'_x\right)}$
Momento e energia	$p'_x = \gamma\left(p_x - \frac{v}{c^2}E\right)$ $p'_y = p_y$ $p'_z = p_z$ $E' = \gamma(E - vp_x)$	$p_x = \gamma\left(p'_x + \frac{v}{c^2}E'\right)$ $p_y = p'_y$ $p_z = p'_z$ $E = \gamma(E' + vp'_x)$
Força	$F'_x = \frac{F_x - \frac{v}{c^2}(\vec{F} \cdot \vec{u})}{1 - \frac{v}{c^2}u_x}$ $F'_y = \frac{F_y}{\gamma\left(1 - \frac{v}{c^2}u_x\right)}$ $F'_z = \frac{F_z}{\gamma\left(1 - \frac{v}{c^2}u_x\right)}$	$F_x = \frac{F'_x + \frac{v}{c^2}(\vec{F}' \cdot \vec{u}')}{1 + \frac{v}{c^2}u'_x}$ $F_y = \frac{F'_y}{\gamma\left(1 + \frac{v}{c^2}u'_x\right)}$ $F_z = \frac{F'_z}{\gamma\left(1 + \frac{v}{c^2}u'_x\right)}$

Figura 15: Transformações das grandezas da Mecânica, relativamente às *transformações de Lorentz*.

3.8. “Paradoxo” dos Gémeos

A *Teoria da Relatividade Restrita* contribuiu de forma decisiva para a forma como se passou a entender o funcionamento do nosso Universo, contudo, nela se encerravam (e

encerram) vários paradoxos, alguns deles permanecendo até aos nossos dias. Um dos mais conhecidos e controversos ficou conhecido por “*Paradoxo dos Gémeos*”, sendo apresentado pelo físico francês Paul Langevin (1872 – 1946) e discutido pela primeira vez na *Primeira Conferência Solvay*, realizada em Bruxelas em 1911. Langevin baseou-se numa simples experiência de pensamento, onde dois gémeos se separam num determinado instante, sincronizados os seus relógios, realizando um deles uma viagem numa nave, que se desloca a uma velocidade próxima da luz de forma retilínea e uniforme até uma determinada estrela, regressando, logo em seguida, à Terra, onde reencontra o gémeo que não efetuou a viagem. A questão que se colocava era qual as idades relativas dos dois gémeos, após o reencontro.

Ora atendendo à dilatação temporal, o gémeo que permaneceu na Terra considera que o tempo para o gémeo viajante passa de forma mais lenta, pelo que concluirá que tem uma idade mais elevada, contudo o gémeo que embarcou na nave, encontrando-se, por isso, em repouso no seu referencial próprio, vê o gémeo que ficou na Terra a afastar-se de si, pelo que, pela mesma razão, considera que o tempo passa mais rapidamente para si, estando, assim, mais velho que o gémeo que ficou na Terra. Verificando-se, portanto, uma contradição.

Todavia, na realidade, após a chegada à Terra o gémeo viajante constata, tal como iremos verificar a seguir, que se encontra mais jovem que o seu irmão, significando, portanto, que o tempo anda mais lentamente para o gémeo que realiza a viagem. Assim sendo, o gémeo viajante perceberá que foi ele que efetuou a viagem identificando, claramente, em que referencial se encontrava, o que contraria, claramente, os princípios da relatividade restrita, uma vez que o seu primeiro postulado afirma que todos os referenciais inerciais são equivalentes e, portanto, indistinguíveis.

Passemos a esclarecer duas situações: em primeiro lugar, não estamos perante um paradoxo da *Teoria da Relatividade Restrita* e, em segundo, não é necessário recorrer à generalização desta teoria para resolver esta questão.

As contradições causadas por esta experiência de pensamento eram justificadas com base no argumento de que sendo o movimento um conceito relativo, cada gémeo poderia admitir que estava em repouso relativamente ao outro, como explicado anteriormente, e, portanto, não se percebia a assimetria do resultado. Na verdade, não se verifica uma simetria entre os gémeos, uma vez que o que ficou na Terra se encontra num referencial inercial, mas o que realizou a viagem não, pois sofreu acelerações/desacelerações instantâneas nos momentos

em que iniciou e terminou a viagem, acontecimentos A e C , respetivamente, e no momento de inversão da mesma, acontecimento B , só assim foi possível que os dois gémeos se reencontrassem. Caso ambos estivessem em referenciais inerciais eles jamais se poderiam reencontrar. Assim sendo, não estamos realmente perante um paradoxo.

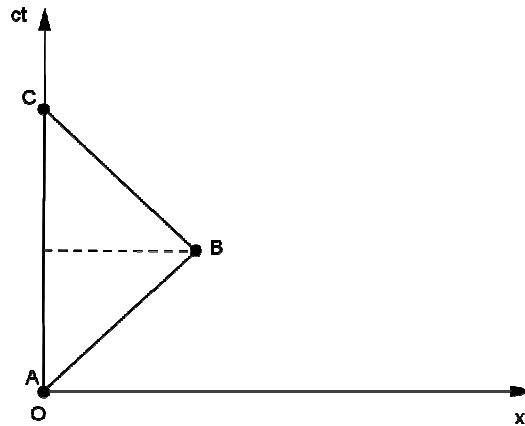


Figura 16: Linha do universo do gêmeo viajante, atingindo instantaneamente uma velocidade uniforme, em A , continuando a sua viagem até B onde inverte instantaneamente o sentido da mesma e regressa à Terra com a mesma velocidade uniforme até parar instantaneamente em C . O gêmeo que permaneceu na Terra tem a sua linha do universo coincidente com o eixo dos tempos.

O gêmeo que ficou na Terra constata, assim, que entre os acontecimentos A e B ir-se-á passar um tempo t e, por isso, considera que entre A e B e entre B e C o tempo será de $\frac{t}{2}$.

Consequentemente, considerará que para o gêmeo viajante o tempo total da viagem será

$$t' = \frac{t}{\gamma}.$$

Mesmo familiarizados com a *Teoria da Relatividade Restrita* pode parecer-nos um pouco estranho que dois relógios inicialmente síncronos, após se afastarem um do outro, a grande velocidade, apresentem uma dessincronização após se reencontrarem, até porque o intervalo relativista entre os dois acontecimentos, de separação e de união entre os relógios, é um invariante, apesar de as linhas do universo dos dois relógios serem diferentes. Assim, a soma dos intervalos ds não é a mesma ao longo das linhas AC e ABC , quando vistas do

referencial em repouso. Ao longo da linha AC , tem-se que $x = 0$, qualquer que seja o instante, pelo que

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 = c dt^2, \quad (3.119)$$

pelo que se obtém de (3.119)

$$\int_A^C ds = \int_A^C c dt = c \int_A^C dt = c(t_C - t_A) = ct. \quad (3.120)$$

Por sua vez, ao longo da linha AB , tem-se que $dx = v dt$, donde

$$\begin{aligned} \int_A^B ds &= \int_A^B \sqrt{c^2 dt^2 - v^2 dt^2} = \int_A^B \sqrt{c^2 - v^2} dt = \sqrt{c^2 - v^2} \int_A^B dt \\ &= \sqrt{c^2 - v^2} \frac{t}{2} = \sqrt{c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \frac{t}{2} = \frac{c}{\gamma} \frac{t}{2} \end{aligned} \quad (3.121)$$

e, ao longo de BC , tem-se que $dx = -v dt$, pelo que

$$\int_B^C ds = \int_B^C \sqrt{c^2 dt^2 - (-v dt)^2} = \sqrt{c^2 - v^2} \int_B^C dt = \frac{c}{\gamma} \frac{t}{2}. \quad (3.122)$$

Portanto, de (3.121) e (3.122) vem

$$\int_A^B ds + \int_B^C ds = 2 \left(\frac{c}{\gamma} \frac{t}{2} \right) = \frac{c}{\gamma} t. \quad (3.123)$$

De (3.123) conclui-se que o comprimento da linha do universo do gémeo viajante é menor que o comprimento da linha do universo do gémeo que ficou na Terra, por um fator de $\frac{1}{\gamma}$, quando ambas as trajetórias são observadas da Terra.

Vamos, agora, concretizar o que foi dito a partir de um exemplo. Admitamos que o gémeo viajante parte em direção a uma estrela distante a uma velocidade $v = 0,8c$. Se este gémeo se afasta da Terra durante 6 anos, no seu tempo próprio, $\Delta t'$, então, do ponto de vista do gémeo que permaneceu na Terra, a viagem de ida ocorre num tempo Δt , dado por

$$\Delta t = \frac{6}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{6}{\sqrt{1 - 0,8^2}} = 10 \text{ anos.}$$

Assim, para o gêmeo que permaneceu na Terra, o gêmeo viajante demorou 10 anos a executar o percurso de ida até à estrela em questão, tendo percorrido uma distância de 8 anos-luz. Note-se, também, que para o gêmeo viajante o espaço por si percorrido é uma contração do espaço medido pelo gêmeo da Terra, tendo sido este

$$\Delta x' = \sqrt{1 - \frac{0,8^2 c^2}{c^2}} \times 8 = 0,6 \times 8 = 4,8 \text{ anos-luz.}$$

O que está de acordo com o tempo medido pelo relógio do gêmeo viajante, pois

$$\Delta t' = \frac{\Delta x'}{v} = \frac{4,8}{0,8} = 6 \text{ anos.}$$

Admitindo que o gêmeo volta imediatamente à Terra, com a mesma velocidade (em módulo), considerando que a desaceleração e aceleração para a inversão do sentido se fazem de forma instantâneas e, portanto, desprezíveis para o cálculo, os dois gêmeos voltam a encontrar-se, do ponto de vista do gêmeo terrestre, 20 anos depois, tempo medido pelo seu relógio, enquanto para o gêmeo viajante este reencontro deu-se passados apenas 12 anos medidos pelo seu relógio. Assim sendo, os dois gêmeos têm uma diferença de 8 anos.

A diferença de idades verificada entre os gêmeos irá diminuir tanto quanto menor for a velocidade do gêmeo viajante e para velocidades muito baixas pode-se considerar que a diferença de idades entre os dois não se verifica. Por sua vez, quanto maior for a velocidade do gêmeo viajante maior será a diferença de idades verificada entre eles.

4. Eletromagnetismo relativista

“Nada é tão maravilhoso que não possa existir, se admitido pelas leis.”

Michael Faraday

Como já foi dito no capítulo anterior, a relatividade restrita surgiu do facto de ser necessário compatibilizar a teoria da Mecânica Clássica com o Eletromagnetismo, admitindo o axioma da covariância de todas as leis da Física. Tal compatibilidade só se mostrou eficaz com recurso às transformações de Lorentz, pois estas possibilitavam a covariância das equações do Eletromagnetismo. Contudo foi necessário reformular as leis da Mecânica, tendo em conta estas mesmas transformações. Neste capítulo, iremos debruçar-nos na demonstração da covariância destas equações, nomeadamente na covariância das equações de Maxwell.

4.1. Equações de Maxwell

O campo eletromagnético provocado por uma distribuição de cargas elétricas em movimento com uma densidade ρ e velocidade \vec{u} , face a um referencial inercial S , num determinado ponto do espaço de coordenadas (x, y, z) e num determinado instante de tempo t , é descrito pelas chamadas equações de Maxwell (no sistema internacional de unidades),

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (4.1)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (4.3)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4.4)$$

sendo que \vec{E} e \vec{B} representam, respetivamente, o campo elétrico e o campo magnético, μ_0 e ε_0 a permeabilidade magnética do vácuo e a permitividade elétrica e $\vec{J} = \rho \vec{u}$ a densidade de corrente. A primeira equação, divergência do campo elétrico, é conhecida por *Lei de Gauss*, a segunda equação (contendo o rotacional do campo elétrico) é conhecida por *Lei de Faraday* e a quarta por *Lei de Ampère generalizada*, ou *Lei de Ampère-Maxwell*.

4.2. Quadri vetor densidade de corrente

Consideremos um corpo com cargas elétricas, figura 17, com a forma cilíndrica, com um determinado volume, V , contendo uma determinada carga total, q , que se desloca a uma velocidade \vec{u} . Para um observador em S , referencial próprio do corpo (de corrente), a densidade de carga elétrica, ρ , é dada por

$$\rho = \frac{q}{V} \quad (4.5)$$

e a densidade de corrente, \vec{J} , é dada, onde existirem cargas, por

$$\vec{J} = \rho \vec{u} . \quad (4.6)$$

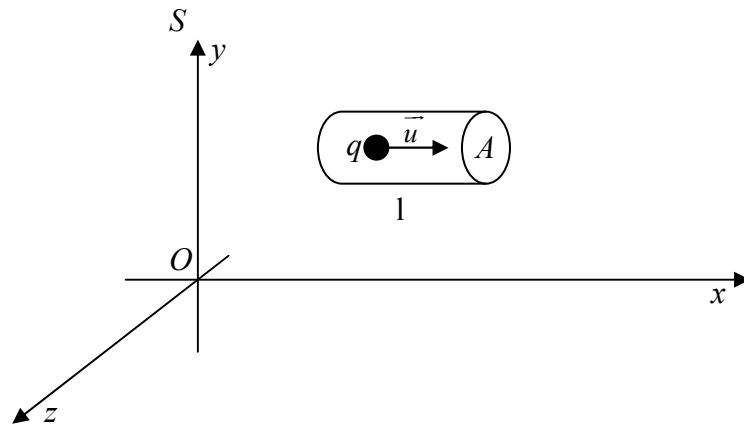


Figura 17: Corpo eletrificado. q é a carga, A a área da base do corpo e l o comprimento do corpo.

Por sua vez, para um observador de S' , que se desloca relativamente a S com uma velocidade constante e uniforme \vec{v} paralelamente ao eixo Ox , a densidade de carga elétrica, ρ' , e a densidade de corrente, \vec{J}' , serão dadas, respetivamente, por

$$\rho' = \frac{q'}{V'} \quad \wedge \quad \vec{J}' = \rho' \vec{u}' . \quad (4.7)$$

Atendendo a que a experiência nos indica que a carga da partícula se mantém invariante para os dois observadores, ou seja, que a carga elétrica é um invariante relativista, temos que

$$q = q' \quad (4.8)$$

e, consequentemente, de (4.5), (4.7) e (4.8), vem

$$\rho V = \rho' V' \Leftrightarrow \rho A l = \rho' A' l' . \quad (4.9)$$

De acordo com as transformações de Lorentz, de (4.9), segue que

$$\rho' = \frac{\rho l}{l'} , \quad (4.10)$$

pois, como $y = y'$ e $z = z'$, então, $A = A'$. Atendendo a que se dá uma contração do espaço no sentido do deslocamento, de (4.10) somos levados a escrever

$$\rho' = \frac{\rho}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} , \quad (4.11)$$

$$\text{pois } l' = l \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} .$$

Imaginemos, agora, um corpo isolante carregado eletricamente com carga q_0 e com volume próprio V_0 . A sua densidade de carga elétrica, tal como já foi visto, no seu próprio referencial será $\rho_0 = \frac{q_0}{V_0}$. Mas se considerarmos dois outros referenciais inerciais, S e S' , onde esse corpo se desloca com velocidades \vec{u} e \vec{u}' ao longo dos eixos Ox e $O'x'$, respetivamente,

como se pode visualizar na figura 18, vem que a densidade de carga elétrica desse mesmo corpo vista de S será

$$\rho = \frac{q_0}{V_0 \left(\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \right)} = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad (4.12)$$

visto que o volume do corpo diminui por contração da sua dimensão paralela ao movimento. Por sua vez, visto de S' também temos

$$\rho' = \frac{q_0}{V_0 \left(\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}} \right)} = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}}}, \quad (4.13)$$

pela mesma razão.

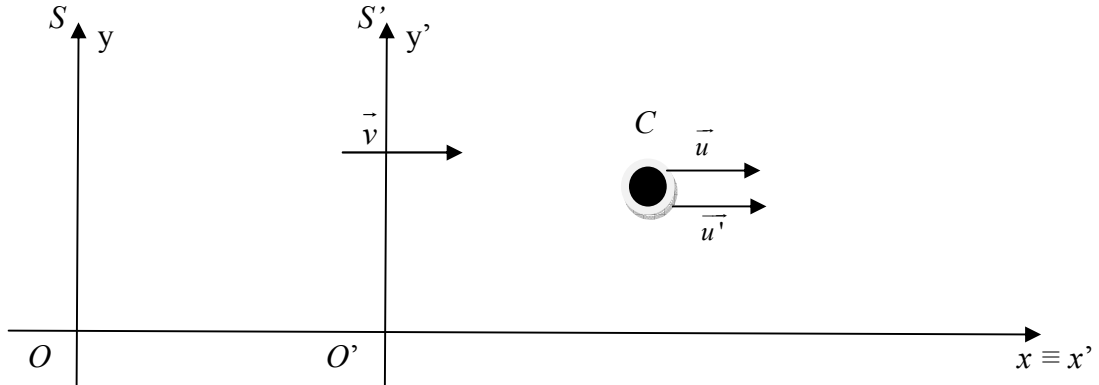


Figura 18: Corpo C de carga q_0 e volume V_0 deslocando-se com velocidade \vec{u} e \vec{u}' relativamente a S e a S' , respetivamente.

De (4.12) e (4.13) temos

$$\frac{\rho'}{\rho} = \sqrt{\frac{1 - \frac{u^2}{c^2}}{1 - \frac{u'^2}{c^2}}}. \quad (4.14)$$

Para além disso,

$$u'^2 = \vec{u}' \cdot \vec{u}' = (u'_x)^2 + (u'_y)^2 + (u'_z)^2. \quad (4.15)$$

Atendendo à transformação das velocidades (3.77), de (4.15) vem

$$\begin{aligned} \vec{u}' \cdot \vec{u}' &= \left(\frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} u_x} \right)^2 + \left[\frac{u_y}{\gamma \left(1 - \frac{v}{c^2} u_x \right)} \right]^2 + \left[\frac{u_z}{\gamma \left(1 - \frac{v}{c^2} u_x \right)} \right]^2 \\ &= \frac{\gamma^2 \left[u_x - v + \gamma^{-2} (u_y^2 + u_z^2) \right]}{\left(1 - \frac{v}{c^2} u_x \right)^2}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\frac{(u_x - v)^2 + (u_y^2 + u_z^2) \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)}{\left(1 - \frac{v}{c^2} u_x \right)^2}$$

Sabemos, ainda, de (4.15) que

$$u_y^2 + u_z^2 = u^2 - u_x^2, \quad (4.17)$$

logo, substituindo (4.17) em (4.16) obtemos

$$\vec{u}' \cdot \vec{u}' = \frac{(u_x - v)^2 + (u^2 - u_x^2) \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)}{\left(1 - \frac{v}{c^2} u_x \right)^2}. \quad (4.18)$$

De (4.18) podemos escrever

$$1 - \frac{u'^2}{c^2} = 1 - \frac{\left(\frac{u_x - v}{c} \right)^2 + \left(\frac{u^2 - u_x^2}{c^2} \right) \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)}{\left(1 - \frac{v}{c^2} u_x \right)^2} \quad (4.19)$$

e, por intermédio de alguns cálculos de (4.19) deduzimos que

$$1 - \frac{u'^2}{c^2} = \frac{1 - \frac{v^2}{c^2} - \frac{u^2}{c^2} + \frac{u^2 v^2}{c^4}}{\left(1 - \frac{v}{c^2} u_x\right)^2} \Leftrightarrow 1 - \frac{u'^2}{c^2} = \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{v}{c^2} u_x\right)^2}. \quad (4.20)$$

Podemos, assim, escrever (4.14) na forma

$$\frac{\rho'}{\rho} = \sqrt{\frac{1 - \frac{u^2}{c^2}}{\frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{v}{c^2} u_x\right)^2}}} = \frac{\left(1 - \frac{v}{c^2} u_x\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (4.21)$$

e, portanto, de (4.6) e (4.21) deduzimos

$$\begin{aligned} \rho' &= \rho \frac{\left(1 - \frac{v}{c^2} u_x\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Leftrightarrow \rho' = \rho \gamma \left(1 - \frac{v}{c^2} u_x\right) \\ \Leftrightarrow \rho' &= \gamma \left(\rho - \frac{v}{c^2} J_x\right) \end{aligned} \quad (4.22)$$

com $J_x = \rho u_x$.

De (4.7) podemos verificar que as componentes do vetor \bar{J}' são-nos dadas, respetivamente, por

$$J'_x = \rho' u'_x \quad \wedge \quad J'_y = \rho' u'_y \quad \wedge \quad J'_z = \rho' u'_z \quad (4.23)$$

e assim, de (4.22) e da transformação das velocidades (3.77) podemos escrever

$$J'_x = \gamma \left(\rho - \frac{v}{c^2} J_x\right) \left(\frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} u_x}\right). \quad (4.24)$$

Aplicando a (4.24) a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, atendendo

a que $\frac{J_x}{u_x} = \rho$ e colocando em evidência fatores comuns, deduzimos que

$$\begin{aligned}
 J'_x &= \gamma \left(\frac{\rho u_x - \rho v}{1 - \frac{v}{c^2} u_x} - \frac{\frac{v}{c^2} J_x u_x + \frac{v^2}{c^2} J_x}{1 - \frac{v}{c^2} u_x} \right) \\
 &= \gamma \left(\frac{J_x - \frac{J_x}{u_x} v - \frac{v}{c^2} J_x (u_x - v)}{1 - \frac{v}{c^2} u_x} \right) \\
 &= \frac{\gamma \left[J_x \left(\frac{v^2}{c^2} - \frac{v}{c^2} u_x + 1 - \frac{v}{u_x} \right) \right]}{1 - \frac{v}{c^2} u_x}
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

De (4.25) vem

$$J'_x = \gamma \frac{J_x \left(1 - \frac{v}{c^2} u_x \right)}{1 - \frac{v}{c^2} u_x} - \gamma \frac{\frac{J_x}{u_x} v \left(1 - \frac{v}{c^2} u_x \right)}{1 - \frac{v}{c^2} u_x} \tag{4.26}$$

e, portanto, de (4.26) concluímos que

$$J'_x = \gamma \left(J_x - \frac{J_x}{u_x} v \right) \Leftrightarrow J'_x = \gamma (J_x - \rho v). \tag{4.27}$$

Sabemos, também, de (4.22), (4.23) e da transformação das velocidades (3.77) que

$$J'_y = \gamma \left(\rho - \frac{v}{c^2} J_x \right) \left[\frac{u_y}{\gamma \left(1 - \frac{v}{c^2} u_x \right)} \right]. \tag{4.28}$$

Colocando em evidência o fator ρu_y e atendendo a que $\frac{J_x}{u_x} = \rho \wedge \frac{J_y}{u_y} = \rho$, vem

$$J'_y = \frac{\rho u_y \left(1 - \frac{v}{c^2} u_x\right)}{1 - \frac{v}{c^2} u_x} \Leftrightarrow J'_y = J_y. \quad (4.29)$$

De forma análoga conclui-se que

$$J'_z = J_z. \quad (4.30)$$

De (4.22), (4.27), (4.29) e (4.30) concluímos que $(c\rho, \vec{J})$ é o quadrivetor densidade de corrente, pois as suas componentes transformam-se de acordo com as transformações de Lorentz, sendo que \vec{J} e $c\rho$ comportam-se como componentes de espaço e de tempo, respetivamente. Por sua vez, a transformação inversa das componentes deste quadrivetor obtêm-se resolvendo as equações citadas em ordem a ρ , J_x , J_y e J_z , respetivamente, e são-nos dadas por

$$\begin{cases} J_x = \gamma(J'_x + v\rho') \\ J_y = J'_y \\ J_z = J'_z \\ \rho = \gamma\left(\rho' + \frac{v}{c^2} J'_x\right) \end{cases}. \quad (4.31)$$

4.3. Transformação dos campos

Sabe-se que uma partícula, de carga q e massa m , move-se com velocidade \vec{u} na presença de um campo elétrico \vec{E} e de um campo magnético \vec{B} . Com base nas transformações do momento e da energia que ocorrem de um referencial inercial S para outro referencial inercial S' , vamos deduzir as transformações das componentes que formam cada um dos campos acima referidos.

Recordemos que as transformações para o momento e energia são-nos dadas como vimos anteriormente por

$$\begin{cases} p'_x = \gamma \left(p_x - \frac{v}{c^2} E \right) \\ p'_y = p_y \\ p'_z = p_z \\ E' = \gamma (E - vp_x) \end{cases} \quad (4.32)$$

No referencial inercial S , o momento e a Força de Lorentz, que atua sobre uma partícula, relacionam-se através da seguinte equação

$$\overline{F} = \frac{d\overline{p}}{dt} = q\overline{E} + q(\overline{u} \times \overline{B}). \quad (4.33)$$

Onde, como vimos, \overline{p} é o momento linear, q a carga da partícula, \overline{u} a sua velocidade e \overline{E} e \overline{B} os campos elétrico e magnético, respetivamente, que sobre ela atuam. A sua componente na direção do eixo Ox é-nos dada por

$$\frac{dp_x}{dt} = qE_x + q(u_y B_z - u_z B_y). \quad (4.34)$$

Para além disso, sendo E a energia da partícula, $\frac{dE}{dt} = \overline{F} \cdot \overline{u}$ conduz, a partir de (4.33), a

$$\frac{dE}{dt} = q(\overline{E} \cdot \overline{u}) = q(E_x u_x + E_y u_y + E_z u_z). \quad (4.35)$$

Derivando a primeira equação de (4.32) em ordem ao intervalo relativista, que como já vimos é invariante, vem

$$\frac{dp'_x}{ds} = \gamma \left(\frac{dp_x}{dt} - \frac{v}{c^2} \frac{dE}{dt} \right) \frac{dt}{ds}. \quad (4.36)$$

Substituindo em (4.36) as expressões dadas por (4.34) e (4.35), obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{dp'_x}{ds} \\ &= \gamma \left[qE_x + q \left(u_y B_z - u_z B_y \right) - \frac{v}{c^2} q \left(E_x u_x + E_y u_y + E_z u_z \right) \right] \frac{dt}{ds} \end{aligned} \quad (4.37)$$

colocando em evidência os fatores comuns em (4.37), podemos escrever

$$\begin{aligned} & \frac{dp'_x}{ds} \\ &= \gamma q \left[E_x \left(1 - \frac{v}{c^2} u_x \right) + u_y \left(B_z - \frac{v}{c^2} E_y \right) - u_z \left(B_y + \frac{v}{c^2} E_z \right) \right] \frac{dt}{ds} \end{aligned} \quad (4.38)$$

Temos, ainda, que

$$u_x \frac{dt}{ds} = \frac{dx}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{dx}{ds} \quad (4.39)$$

$$u_y \frac{dt}{ds} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{dy}{ds} \quad (4.40)$$

$$u_z \frac{dt}{ds} = \frac{dz}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{dz}{ds}. \quad (4.41)$$

Assim, de (4.38) e tendo em conta (4.39), (4.40) e (4.41), concluímos

$$\begin{aligned} & \frac{dp'_x}{ds} \\ &= \gamma q \left[E_x \frac{dt}{ds} - E_x \frac{v}{c^2} \frac{dx}{ds} + \left(B_z - \frac{v}{c^2} E_y \right) \frac{dy}{ds} - \left(B_y + \frac{v}{c^2} E_z \right) \frac{dz}{ds} \right]. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Sabemos, também, que a transformação de Lorentz para o tempo é

$$t' = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x \right) \quad (4.43)$$

e, portanto, derivando (4.43) em ordem ao intervalo relativista segue

$$\frac{dt'}{ds} = \gamma \left(\frac{dt}{ds} - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{ds} \right), \quad (4.44)$$

pelo que

$$\gamma \frac{dt}{ds} = \frac{dt'}{ds} + \gamma \frac{v}{c^2} \frac{dx}{ds} \Leftrightarrow \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\gamma} \frac{dt'}{ds} + \frac{v}{c^2} \frac{dx}{ds}. \quad (4.45)$$

Consequentemente, de (4.42) obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{dp'_x}{ds} \\ &= \gamma q \left[E_x \left(\frac{1}{\gamma} \frac{dt'}{ds} + \frac{v}{c^2} \frac{dx}{ds} \right) - E_x \frac{v}{c^2} \frac{dx}{ds} + \left(B_z - \frac{v}{c^2} E_y \right) \frac{dy}{ds} - \left(B_y + \frac{v}{c^2} E_z \right) \frac{dz}{ds} \right] \\ &= \gamma q \left[E_x \frac{1}{\gamma} \frac{dt'}{ds} + \left(B_z - \frac{v}{c^2} E_y \right) \frac{dy}{ds} - \left(B_y + \frac{v}{c^2} E_z \right) \frac{dz}{ds} \right] \end{aligned} \quad (4.46)$$

Sabemos, ainda, a partir das transformações de Lorentz, que $y = y'$ e que $z = z'$, então, podemos também afirmar que

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy'}{ds} \wedge \frac{dz}{ds} = \frac{dz'}{ds}, \quad (4.47)$$

donde substituindo as condições dadas por (4.47) em (4.46), temos

$$\frac{dp'_x}{ds} = q \left[E_x \frac{dt'}{ds} + \gamma \left(B_z - \frac{v}{c^2} E_y \right) \frac{dy'}{ds} - \gamma \left(B_y + \frac{v}{c^2} E_z \right) \frac{dz'}{ds} \right]. \quad (4.48)$$

Por outro lado, no referencial S' , queremos ter a igualdade

$$\frac{dp'_x}{dt'} = q \left(E'_x + u'_y B'_z - u'_z B'_y \right). \quad (4.49)$$

Para além disso,

$$\frac{dp'_x}{ds} = \frac{dp'_x}{dt'} \frac{dt'}{ds}, \quad (4.50)$$

donde de (4.49) e tendo em conta (4.50), vem

$$\begin{aligned} \frac{dp'_x}{ds} &= q \left(E'_x + u'_y B'_z - u'_z B'_y \right) \frac{dt'}{ds} \\ \Leftrightarrow \frac{dp'_x}{ds} &= q \left(E'_x \frac{dt'}{ds} + u'_y \frac{dt'}{ds} B'_z - u'_z \frac{dt'}{ds} B'_y \right) \end{aligned} \quad (4.51)$$

Sabemos, ainda, que

$$u'_x \frac{dt'}{ds} = \frac{dx'}{dt'} \frac{dt'}{ds} = \frac{dx'}{ds} \quad (4.52)$$

$$u'_y \frac{dt'}{ds} = \frac{dy'}{dt'} \frac{dt'}{ds} = \frac{dy'}{ds} \quad (4.53)$$

$$u'_z \frac{dt'}{ds} = \frac{dz'}{dt'} \frac{dt'}{ds} = \frac{dz'}{ds}, \quad (4.54)$$

pelo que de (4.51), tendo em conta (4.53) e (4.54), segue

$$\frac{dp'_x}{ds} = q \left(E'_x \frac{dt'}{ds} + B'_z \frac{dy'}{ds} - B'_y \frac{dz'}{ds} \right). \quad (4.55)$$

Comparando os resultados obtidos em (4.48) e em (4.55), podemos concluir que

$$E'_x = E_x \quad (4.56)$$

$$B'_z = \gamma \left(B_z - \frac{v}{c^2} E_y \right) \quad (4.57)$$

$$B'_y = \gamma \left(B_y + \frac{v}{c^2} E_z \right). \quad (4.58)$$

Do mesmo modo, sabemos que

$$\frac{dp_y}{dt} = qE_y + q \left(u_z B_x - u_x B_z \right). \quad (4.59)$$

Derivando a segunda equação de (4.32) relativamente ao intervalo relativista obtemos

$$\frac{dp'_y}{ds} = \frac{dp_y}{ds} \quad (4.60)$$

e substituindo em (4.60) a igualdade dada por (4.59), vem

$$\begin{aligned}\frac{dp'_y}{ds} &= q \left(E_y + u_z B_x - u_x B_z \right) \frac{dt}{ds} \\ &= q \left(E_y \frac{dt}{ds} + u_z \frac{dt}{ds} B_x - u_x \frac{dt}{ds} B_z \right)\end{aligned}\quad (4.61)$$

Considerando as igualdades (4.39) e (4.41), podemos escrever (4.61) na forma

$$\frac{dp'_y}{ds} = q \left(E_y \frac{dt}{ds} + \frac{dz}{ds} B_x - \frac{dx}{ds} B_z \right). \quad (4.62)$$

Para além disso, sabemos, através das transformações inversas de Lorentz, que

$$x = \gamma(x' + vt') \wedge t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right) \quad (4.63)$$

e, conseqüentemente, derivando cada uma das igualdades anteriores em ordem ao intervalo relativista obtém-se

$$\frac{dx}{ds} = \gamma\left(\frac{dx'}{ds} + v\frac{dt'}{ds}\right) \wedge \frac{dt}{ds} = \gamma\left(\frac{dt'}{ds} + \frac{v}{c^2}\frac{dx'}{ds}\right). \quad (4.64)$$

Atendendo a (4.47) e a (4.64) e substituindo em (4.62), vem

$$\begin{aligned}\frac{dp'_y}{ds} &= q \left[E_y \gamma\left(\frac{dt'}{ds} + \frac{v}{c^2}\frac{dx'}{ds}\right) + \frac{dz'}{ds} B_x - B_z \gamma\left(\frac{dx'}{ds} + v\frac{dt'}{ds}\right) \right] \\ &= q \left[\gamma\left(E_y - vB_z\right) \frac{dt'}{ds} + B_x \frac{dz'}{ds} - \gamma\left(B_z - \frac{v}{c^2}E_y\right) \frac{dx'}{ds} \right]\end{aligned}\quad (4.65)$$

A suposta covariância das equações do eletromagnetismo, implicará, também, que seja, em S' ,

$$\frac{dp'_y}{dt'} = q \left(E'_y + u'_z B'_x - u'_x B'_z \right) \quad (4.66)$$

e, como tal

$$\frac{dp'_y}{ds} = q \left(E'_y \frac{dt'}{ds} + u'_z \frac{dt'}{ds} B'_x - u'_x \frac{dt'}{ds} B'_z \right), \quad (4.67)$$

ora, tendo em conta (4.52) e (4.54), podemos obter, a partir de (4.67),

$$\frac{dp'_y}{ds} = q \left(E'_y \frac{dt'}{ds} + B'_x \frac{dz'}{ds} - B'_z \frac{dx'}{ds} \right) \quad (4.68)$$

e assim, a partir de (4.66) e (4.68) deduzimos que

$$B'_x = B_x \quad (4.69)$$

$$E'_y = \gamma \left(E_y - v B_z \right). \quad (4.70)$$

Sabemos, ainda, que a Força de Lorentz, exercida na direção do eixo Oz , é-nos dada por

$$\frac{dp_z}{dt} = q \left(E_z + u_x B_y - u_y B_x \right). \quad (4.71)$$

Para além disso, como deduzido anteriormente, $p_z = p'_z$. Consequentemente,

$$\frac{dp_z}{ds} = \frac{dp'_z}{ds}. \quad (4.72)$$

e como tal,

$$\begin{aligned} \frac{dp'_z}{ds} &= q \left(E_z + u_x B_y - u_y B_x \right) \frac{dt}{ds} \\ \Leftrightarrow \frac{dp'_z}{ds} &= q \left(E_z \frac{dt}{ds} + u_x \frac{dt}{ds} B_y - u_y \frac{dt}{ds} B_x \right) \end{aligned} \quad (4.73)$$

Substituindo (4.39) e (4.40) em (4.73), verifica-se

$$\frac{dp'_z}{ds} = q \left(E_z \frac{dt}{ds} + B_y \frac{dx}{ds} - B_x \frac{dy}{ds} \right) \quad (4.74)$$

e, tendo em consideração as igualdades dadas por (4.47) e (4.64), deduzimos de (4.74) que

$$\begin{aligned}\frac{dp'_z}{ds} &= q \left[\gamma E_z \left(\frac{dt'}{ds} + \frac{v}{c^2} \frac{dx'}{ds} \right) + \gamma B_y \left(\frac{dx'}{ds} + v \frac{dt'}{ds} \right) - B_x \frac{dy'}{ds} \right] \\ &= q \left[\gamma \left(E_z + v B_y \right) \frac{dt'}{ds} + \gamma \left(B_y + \frac{v}{c^2} E_z \right) \frac{dx'}{ds} - B_x \frac{dy'}{ds} \right]\end{aligned}\quad (4.75)$$

De igual forma, requeremos que se verifique

$$\frac{dp'_x}{dt'} = q \left(E'_x + u'_y B'_z - u'_z B'_y \right) \quad (4.76)$$

e, assim sendo,

$$\frac{dp'_z}{ds} = q \left(E'_z \frac{dt'}{ds} + u'_x \frac{dt'}{ds} B'_y - u'_y \frac{dt'}{ds} B'_x \right) \quad (4.77)$$

donde de (4.77), e tendo por base (4.52) e (4.53), vem

$$\frac{dp'_z}{ds} = q \left(E'_z \frac{dt'}{ds} + B'_y \frac{dx'}{ds} - B'_x \frac{dy'}{ds} \right). \quad (4.78)$$

Considerando os resultados obtidos em (4.75) e em (4.78), constatamos que

$$E'_z = \gamma \left(E_z + v B_y \right). \quad (4.79)$$

Do explanado anteriormente temos que a transformação das componentes dos campos elétrico e magnético, respetivamente \vec{E} e \vec{B} , do referencial inercial S para o referencial inercial S' , faz-se de acordo com as seguintes equações

$$\begin{cases} E'_x = E_x \\ E'_y = \gamma \left(E_y - v B_z \right) \\ E'_z = \gamma \left(E_z + v B_y \right) \end{cases} \wedge \begin{cases} B'_x = B_x \\ B'_y = \gamma \left(B_y + \frac{v}{c^2} E_z \right) \\ B'_z = \gamma \left(B_z - \frac{v}{c^2} E_y \right) \end{cases}. \quad (4.80)$$

De forma análoga, pode-se demonstrar que a transformação inversa das componentes destes mesmos campos é dada por

$$\begin{cases} E_x = E'_x \\ E_y = \gamma \left(E'_y + v B'_z \right) \\ E_z = \gamma \left(E'_z - v B'_y \right) \end{cases} \wedge \begin{cases} B_x = B'_x \\ B_y = \gamma \left(B'_y - \frac{v}{c^2} E'_z \right) \\ B_z = \gamma \left(B'_z + \frac{v}{c^2} E'_y \right) \end{cases}. \quad (4.81)$$

4.4. Covariância das equações de Maxwell.

Vamos demonstrar a covariância das equações de Maxwell.

Das transformações de Lorentz sabemos que

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x \right) \end{cases}, \quad (4.82)$$

portanto, de (4.82) concluímos que

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t'} = \gamma \left(\frac{\partial}{\partial x'} - \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial t'} \right) \quad (4.83)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y'} \quad (4.84)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z'} \quad (4.85)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t'} + \frac{\partial x'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x'} = \gamma \left(\frac{\partial}{\partial t'} - v \frac{\partial}{\partial x'} \right). \quad (4.86)$$

Por outro lado, sabemos que a divergência de um determinado campo vetorial

$\vec{V} = (V_x, V_y, V_z)$ é o escalar dado por

$$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \quad (4.87)$$

e o rotacional, do mesmo campo vetorial, é o vetor

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{V} &= \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} \\ &= \hat{e}_x \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) + \hat{e}_y \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) + \hat{e}_z \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (4.88)$$

De (4.2) e de (4.88) vem que

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t} \quad (4.89)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \quad (4.90)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \quad (4.91)$$

Assim sendo, de (4.84), (4.85) e (4.86) chegamos a

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t} \quad (4.92)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial y'} E_z - \frac{\partial}{\partial z'} E_y = - \left[\gamma \left(\frac{\partial}{\partial t'} - v \frac{\partial}{\partial x'} \right) \right] B_x$$

Utilizando as equações (4.83 a 4.86) e substituindo-as em (4.81), transformação inversa dos campos, de acordo com as necessidades, obtemos a igualdade

$$\frac{\partial}{\partial y'} \gamma (E'_z - v B'_y) - \frac{\partial}{\partial z'} \gamma (E'_y + v B'_z) = -\gamma \frac{\partial}{\partial t'} B'_x + \gamma \frac{\partial}{\partial x'} B'_x \quad (4.93)$$

agrupando os termos que nos interessam em (4.93), e atendendo à covariância das equações de Maxwell, segue

$$\left(\frac{\partial E'_z}{\partial y'} - \frac{\partial E'_y}{\partial z'} \right) - v \left(\frac{\partial B'_x}{\partial x'} + \frac{\partial B'_y}{\partial y'} + \frac{\partial B'_z}{\partial z'} \right) = - \frac{\partial B'_x}{\partial t'}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial E'_z}{\partial y'} - \frac{\partial E'_y}{\partial z'} = - \frac{\partial B'_x}{\partial t'}$$
(4.94)

De forma análoga, substituindo em (4.90) as derivadas parciais por (4.83), (4.85) e (4.86) temos

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = - \frac{\partial B_y}{\partial t}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial E_x}{\partial z'} - \gamma \left(\frac{\partial}{\partial x'} - \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial t'} \right) E_z = - \gamma \left(\frac{\partial}{\partial t'} - v \frac{\partial}{\partial x'} \right) B_y$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial E_x}{\partial z'} - \gamma \frac{\partial E_z}{\partial x'} - \gamma v \frac{\partial B_y}{\partial x'} = - \gamma \frac{\partial B_y}{\partial t'} - \gamma \frac{v}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial t'}$$
(4.95)

Para além disso, tendo em conta (4.81) e (4.95), vem

$$\frac{\partial E'_x}{\partial z'} - \frac{\partial}{\partial x'} \left[\gamma (E_z + v B_y) \right] = - \frac{\partial}{\partial t'} \left[\gamma \left(B_y + \frac{v}{c^2} E_z \right) \right]$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial E'_x}{\partial z'} - \frac{\partial}{\partial x'} E'_z = - \frac{\partial}{\partial t'} B'_y$$
(4.96)

Da mesma forma se demonstra que

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = - \frac{\partial B_z}{\partial t} \Leftrightarrow \frac{\partial E'_y}{\partial x'} - \frac{\partial E'_x}{\partial y'} = - \frac{\partial B'_z}{\partial t'}$$
(4.97)

Das deduções (4.94), (4.96) e (4.97) fica demonstrado que se $\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ então

$\nabla' \times \vec{E}' = - \frac{\partial \vec{B}'}{\partial t'}$ e, consequentemente, a covariância da lei de Faraday.

Demonstremos, agora, a covariância da equação (4.3).

De (4.87) sabemos que

$$\nabla' \cdot \vec{B}' = \frac{\partial B'_x}{\partial x'} + \frac{\partial B'_y}{\partial y'} + \frac{\partial B'_z}{\partial z'}. \quad (4.98)$$

Deduzimos, também, de (4.82) que

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial x}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial t} = \gamma \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right), \quad (4.99)$$

assim, com base em (4.84), (4.85), (4.98) e (4.99) obtemos

$$\nabla' \cdot \vec{B}' = \gamma \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) B'_x + \frac{\partial}{\partial y} B'_y + \frac{\partial}{\partial z} B'_z. \quad (4.100)$$

Substituindo em (4.100) as componentes dos campos elétrico e magnético pela transformação (4.80), chegamos a

$$\begin{aligned} \nabla' \cdot \vec{B}' &= \gamma \frac{\partial}{\partial x} B_x + \gamma \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} B_x + \frac{\partial}{\partial y} \left[\gamma \left(B_y + \frac{v}{c^2} E_z \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\gamma \left(B_z - \frac{v}{c^2} E_y \right) \right] \end{aligned} \quad (4.101)$$

e agrupando os termos da igualdade (4.101), segue que

$$\nabla' \cdot \vec{B}' = \gamma \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \right) + \gamma \frac{v}{c^2} \left(\frac{\partial B_x}{\partial t} + \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right). \quad (4.102)$$

De (4.3) e (4.87) sabemos que

$$\nabla \cdot \vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad (4.103)$$

e com o conhecimento que possuímos de (4.103) e (4.89), vem de (4.102) que

$$\nabla' \cdot \vec{B}' = \gamma \frac{v}{c^2} \left(\frac{\partial B_x}{\partial t} - \frac{\partial B_x}{\partial t} \right) = 0 \quad (4.104)$$

ficando, conseqüentemente, provada a covariância da equação (4.3).

De seguida, iremos provar a covariância da equação (4.1), lei de Gauss.

De (4.1) e (4.87) podemos afirmar que

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho. \quad (4.105)$$

Atendendo a (4.83), (4.84) e (4.85), transformação das derivadas parciais, e a (4.81), transformação inversa dos campos, a partir de (4.105), chegamos à igualdade

$$\gamma \frac{\partial E'_x}{\partial x'} - \gamma \frac{v}{c^2} \frac{\partial E'_x}{\partial t'} + \gamma \frac{\partial E'_y}{\partial y'} + \gamma v \frac{\partial B'_z}{\partial y'} + \gamma \frac{\partial E'_z}{\partial z'} - \gamma v \frac{\partial B'_y}{\partial z'} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (4.106)$$

agrupando os termos convenientes de (4.106) podemos escrever

$$\gamma \nabla' \cdot \vec{E}' - \gamma \frac{v}{c^2} \frac{\partial E'_x}{\partial t'} + \gamma v \left(\frac{\partial B'_z}{\partial y'} - \frac{\partial B'_y}{\partial z'} \right) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho. \quad (4.107)$$

Calculando o rotacional do campo magnético \vec{B} , e com base na equação de Maxwell (4.4), somos levados às seguintes igualdades

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \mu_0 J_x + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} \quad (4.108)$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = \mu_0 J_y + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \quad (4.109)$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = \mu_0 J_z + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t}. \quad (4.110)$$

Admitindo a covariância das equações de Maxwell, obtemos as transformações inversas de (4.108), (4.109) e (4.110), como demonstraremos mais adiante, sendo estas

$$\frac{\partial B'_z}{\partial y'} - \frac{\partial B'_y}{\partial z'} = \mu_0 J'_x + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E'_x}{\partial t'} \quad (4.111)$$

$$\frac{\partial B'_x}{\partial z'} - \frac{\partial B'_z}{\partial x'} = \mu_0 J'_y + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E'_y}{\partial t'} \quad (4.112)$$

$$\frac{\partial B'_y}{\partial x'} - \frac{\partial B'_x}{\partial y'} = \mu_0 J'_z + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E'_z}{\partial t'}. \quad (4.113)$$

Deste modo, substituindo em (4.107) o resultado de (4.111) vem

$$\gamma \nabla' \cdot \overline{E'} - \gamma \frac{v}{c^2} \frac{\partial E'_x}{\partial t'} + \gamma v \left(\mu_0 J'_x + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E'_x}{\partial t'} \right) = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \quad (4.114)$$

e simplificando a igualdade (4.114), atendendo a que $\mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$, chegamos a

$$\gamma \nabla' \cdot \overline{E'} + \gamma v \mu_0 J'_x = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho. \quad (4.115)$$

Atendendo à transformação de ρ , em (4.31), a partir de (4.115), podemos escrever

$$\gamma \nabla' \cdot \overline{E'} + \gamma v \mu_0 J'_x - \gamma \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{v}{c^2} J'_x = \frac{1}{\varepsilon_0} \gamma \rho', \quad (4.116)$$

pois $\mu_0 = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}$ e, portanto, de (4.116) concluímos que

$$\nabla' \cdot \overline{E'} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho', \quad (4.117)$$

ficando, assim demonstrada a covariância da lei de Gauss.

Para finalizar a demonstração da covariância das equações de Maxwell, provaremos, de seguida, a covariância da equação (4.4), lei de Ampère-Maxwell.

Com base em (4.83), (4.85), (4.86), na transformação das componentes dos campos elétrico e magnético e (4.31), temos de (4.109) que se $\frac{\partial B'_x}{\partial z} - \frac{\partial B'_z}{\partial x} = \mu_0 J'_y + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E'_y}{\partial t}$, então

$$\frac{\partial}{\partial z'} B'_x - \gamma \left(\frac{\partial}{\partial x'} - \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial t'} \right) B'_z = \mu_0 J'_y + \mu_0 \varepsilon_0 \gamma \left(\frac{\partial}{\partial t'} - v \frac{\partial}{\partial x'} \right) E'_y \quad (4.118)$$

aplicando em (4.118) a propriedade distributiva e pondo em evidências os fatores comuns segue

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial z'} B'_x - \frac{\partial}{\partial x'} \left[\gamma (B_z - \mu_0 \varepsilon_0 v E_y) \right] \\ &= \mu_0 J'_y + \frac{\partial}{\partial t'} \left[\mu_0 \varepsilon_0 \gamma \left(E_y - \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \frac{v}{c^2} B_z \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.119)$$

Por outro lado,

$$\mu_0 = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \quad (4.120)$$

e, consequentemente,

$$\frac{1}{c^2} = \mu_0 \varepsilon_0 v \wedge c^2 = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}. \quad (4.121)$$

Substituindo em (4.119) a condição (4.121), obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial z'} B'_x - \frac{\partial}{\partial x'} \left[\gamma \left(B_z - \frac{v}{c^2} E_y \right) \right] \\ &= \mu_0 J'_y + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t'} \left[\gamma (E_y - v B_z) \right], \end{aligned} \quad (4.122)$$

donde, a partir de (4.80), concluímos que

$$\frac{\partial}{\partial z'} B'_x - \frac{\partial}{\partial x'} B'_z = \mu_0 J'_y + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t'} E'_y, \quad (4.123)$$

ficando assim demonstrada a equação (4.112).

De modo análogo, a partir de (4.83), (4.84), (4.86), na transformação das componentes dos campos elétrico e magnético e (4.31), temos de (4.110) que se

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = \mu_0 J_z + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t}, \text{ então}$$

$$\gamma \left(\frac{\partial}{\partial x'} - \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial t'} \right) B_y - \frac{\partial}{\partial y'} B'_x \quad (4.124)$$

$$= \mu_0 J'_z + \mu_0 \varepsilon_0 \gamma \left(\frac{\partial}{\partial t'} - v \frac{\partial}{\partial x'} \right) E_z$$

Aplicando em (4.124) a propriedade distributiva, pondo em evidência os fatores comuns e tendo em conta (4.121) segue

$$\frac{\partial}{\partial x'} \left[\gamma \left(B_y + \frac{v}{c^2} E_z \right) \right] - \frac{\partial}{\partial y'} B'_x \quad (4.125)$$

$$= \mu_0 J'_y + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t'} \left[\gamma (E_z + v B_y) \right]$$

Donde, a partir de (4.80) concluímos que

$$\frac{\partial}{\partial x'} B'_y - \frac{\partial}{\partial y'} B'_x = \mu_0 J'_z + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t'} E'_z, \quad (4.126)$$

ficando, assim, demonstrada a equação (4.113).

Sabemos, também, de (4.108) que $\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \mu_0 J_x + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}$ e tendo em conta (4.31), (4.84), (4.85) e (4.86) vem

$$\frac{\partial}{\partial y'} B_z - \frac{\partial}{\partial z'} B_y \quad (4.127)$$

$$= \mu_0 \gamma (J'_x + v \rho') + \mu_0 \varepsilon_0 \gamma \left(\frac{\partial}{\partial t'} - v \frac{\partial}{\partial x'} \right) E_x$$

e, substituindo em (4.127) as transformações inversas dos campos necessárias, (4.81), passamos a ter

$$\frac{\partial}{\partial y'} \gamma \left(B'_z + \frac{v}{c^2} E'_y \right) - \frac{\partial}{\partial z'} \gamma \left(B'_y - \frac{v}{c^2} E'_z \right) \quad (4.128)$$

$$= \mu_0 \gamma (J'_x + v \rho') + \mu_0 \varepsilon_0 \gamma \left(\frac{\partial}{\partial t'} - v \frac{\partial}{\partial x'} \right) E'_x$$

e, assim, vem que

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial y'} B'_z - \frac{\partial}{\partial z'} B'_y + \frac{v}{c^2} \left(\frac{\partial}{\partial x'} E'_x + \frac{\partial}{\partial y'} E'_y + \frac{\partial}{\partial z'} E'_z \right) - \mu_0 v \rho' \\ & = \mu_0 J'_x + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t'} E'_x \end{aligned} \quad (4.129)$$

pois $\mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$.

Atendendo a (4.87) segue que

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial y'} B'_z - \frac{\partial}{\partial z'} B'_y + \frac{v}{c^2} (\nabla' \cdot \vec{E}') - \mu_0 v \rho' \\ & = \mu_0 J'_x + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t'} E'_x \end{aligned} \quad (4.130)$$

e tendo em conta (4.117) e (4.120) obtemos

$$\frac{\partial}{\partial y'} B'_z - \frac{\partial}{\partial z'} B'_y = \mu_0 J'_x + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t'} E'_x \quad (4.131)$$

ficando, assim, demonstrada a igualdade (4.111).

De (4.123), (4.126) e (4.131), concluímos que

$$\nabla' \times \vec{B}' = \mu_0 \vec{J}' + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}'}{\partial t'} \quad (4.132)$$

e, portanto, fica demonstrada a covariância da lei de Ampère-Maxwell. Em consequência dos resultados deduzidos, verificamos que as equações de Maxwell se mantêm covariantes face às transformações de Lorentz.

4.5. Força de Lorentz

Uma partícula de carga q que se movimenta a uma velocidade \vec{u} sob influência de um campo eletromagnético num referencial inercial S , é submetida a uma força que nos é dada pela equação

$$\vec{F} = q\vec{E} + q(\vec{u} \times \vec{B}) \quad (4.133)$$

a nossa já conhecida *Força de Lorentz*, \vec{F} , onde q é a carga da partícula, \vec{u} é a velocidade da partícula e \vec{E} e \vec{B} são, respetivamente, os campos elétrico e magnético que atuam sobre a partícula (recordar (4.33), página 74).

As componentes do vetor força de Lorentz são-nos dadas por

$$F_x = qE_x + q(u_y B_z - u_z B_y) \quad 4.134)$$

$$F_y = qE_y + q(u_z B_x - u_x B_z) \quad (4.135)$$

$$F_z = qE_z + q(u_x B_y - u_y B_x). \quad (4.136)$$

Iremos, de seguida, confirmar a covariância desta força, isto é, iremos provar que relativamente a um referencial inercial S' , que se desloca em relação a S com uma velocidade constante e uniforme de módulo v , se tem

$$\vec{F}' = q\vec{E}' + q(\vec{u}' \times \vec{B}'), \quad (4.137)$$

em coerência com o pressuposto atrás, § 4.3.

Em primeiro lugar, comecemos por lembrar que a carga q da partícula em relatividade, tal como se considerava na Física Clássica, é invariante e, como tal, a velocidade da partícula não provoca qualquer alteração na sua carga elétrica. Se assim não fosse e a carga dependesse da velocidade da partícula, por exemplo um átomo de hidrogénio poderia ter uma carga elétrica total diferente de zero e variável, dependendo do nível de energia do seu eletrão e, como sabemos, isto não acontece, pelo que a carga elétrica não pode depender da velocidade do eletrão.

Atendendo à transformação das componentes da força (3.116), da velocidade (3.85) e dos campos elétrico e magnético (4.81), podemos, a partir de (4.134), escrever

$$\begin{aligned} & \frac{F'_x + \frac{v}{c^2}(\vec{F}' \cdot \vec{u}')}{1 + \frac{v}{c^2}u'_x} \\ &= qE'_x + q \left[\frac{u'_y}{\gamma \left(1 + \frac{v}{c^2}u'_x\right)} \gamma \left(B'_z + \frac{v}{c^2}E'_y\right) - \frac{u'_z}{\gamma \left(1 + \frac{v}{c^2}u'_x\right)} \gamma \left(B'_y - \frac{v}{c^2}E'_z\right) \right] \end{aligned} \quad (4.138)$$

e procedendo a alguns cálculos, em (4.138), concluímos que

$$\begin{aligned} & F'_x - qE'_x - q(u'_y B'_z - u'_z B'_y) \\ &= q \frac{v}{c^2} \left[u'_x E'_x + u'_y E'_y + u'_z E'_z - (\vec{F}' \cdot \vec{u}') \right] \end{aligned} \quad (4.139)$$

Atendendo a que

$$\vec{F}' \cdot \vec{u}' = (q\vec{E}' + q\vec{u}' \times \vec{B}') \cdot \vec{u}' = q\vec{E}' \cdot \vec{u}' + (q\vec{u}' \times \vec{B}') \cdot \vec{u}' = q\vec{E}' \cdot \vec{u}', \quad (4.140)$$

pois a força magnética não provoca trabalho, ou seja, $(\vec{u}' \times \vec{B}') \cdot \vec{u}' = 0$. Assim, de (4.139) e (4.140), obtemos que

$$F'_x = qE'_x + q(u'_y B'_z - u'_z B'_y), \quad (4.141)$$

ficando, assim demonstrada a covariância da força para a sua componente segundo a direção do eixo $O'x'$.

De igual modo, atendendo à transformação das componentes da força, da velocidade e dos campos elétrico e magnético, podemos escrever

$$\begin{aligned} & \frac{F'_y}{\gamma \left(1 + \frac{v}{c^2} u'_x\right)} \\ &= q\gamma \left(E'_y + vB'_z\right) + q \left[\frac{u'_z}{\gamma \left(1 + \frac{v}{c^2} u'_x\right)} B'_x - \left(\frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x} \right) \gamma \left(B'_z + \frac{v}{c^2} E'_y \right) \right] \end{aligned} \quad (4.142)$$

e a partir de alguns cálculos realizados em (4.142), obtemos

$$F'_y = q\gamma^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) E'_y + q \left[u'_z B'_x - \gamma^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) u'_x B'_z \right]. \quad (4.143)$$

Sabendo, ainda, que

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{\gamma^2}, \quad (4.144)$$

deduz-se de (4.143) que

$$F'_y = qE'_y + q(u'_z B'_x - u'_x B'_z) \quad (4.145)$$

e, consequentemente, fica confirmada a covariância da componente segundo a direção do eixo $O'y'$, para a Força de Lorentz.

De forma análoga à anterior verifica-se que

$$F'_z = qE'_z + q(u'_x B'_y - u'_y B'_x). \quad (4.146)$$

De (4.141), (4.145) e (4.146) conclui-se (4.137) e, portanto, a covariância da Força de Lorentz, tendo por base as transformações de Lorentz.

No quadro seguinte, apresentam-se as transformações diretas e inversas das componentes do quadrivetor densidade de corrente e dos campos elétrico e magnético face às transformações de Lorentz.

Grandezas	Transformações	
	S para S'	S' para S
Densidade de carga e densidade de corrente	$J'_x = \gamma(J_x - v\rho)$ $J'_y = J_y$ $J'_z = J_z$ $\rho' = \gamma\left(\rho - \frac{v}{c^2}J_x\right)$	$J_x = \gamma(J'_x + v\rho')$ $J_y = J'_y$ $J_z = J'_z$ $\rho = \gamma\left(\rho' + \frac{v}{c^2}J'_x\right)$
Campos elétrico e magnético	$E'_x = E_x$ $E'_y = \gamma\left(E_y - vB_z\right)$ $E'_z = \gamma\left(E_z + vB_y\right)$ $B'_x = B_x$ $B'_y = \gamma\left(B_y + \frac{v}{c^2}E_z\right)$ $B'_z = \gamma\left(B_z - \frac{v}{c^2}E_y\right)$	$E_x = E'_x$ $E_y = \gamma\left(E'_y + vB'_z\right)$ $E_z = \gamma\left(E'_z - vB'_y\right)$ $B_x = B'_x$ $B_y = \gamma\left(B'_y - \frac{v}{c^2}E'_z\right)$ $B_z = \gamma\left(B'_z + \frac{v}{c^2}E'_y\right)$

Figura 19: Transformações do quadri vetor densidade de corrente e dos campos elétrico e magnético, face às transformações de Lorentz.

5. “Relatividade fraca”

“Tu pensas que eu olho para o trabalho da minha vida com uma calma e satisfação. Mas de perto a coisa parece bem diferente. Não existe um só conceito que eu esteja convencido de que possa resistir estavelmente.”

Albert Einstein

A *Teoria da Relatividade Restrita*, tal como preconizou Einstein, baseia-se em dois princípios ou postulados, o princípio da relatividade e o princípio da constância da velocidade da luz no vácuo.

Para o físico teórico italiano Franco Selleri o primeiro postulado poderá revelar-se demasiado exigente considerando-o como a formulação forte de toda a teoria. Numa formulação mais fraca da relatividade do movimento, seria, somente, impossível revelar movimentos absolutos relativamente a um hipotético referencial privilegiado. Já o segundo postulado encerra em si muitas incertezas, uma vez que a constância da velocidade da luz no vácuo só foi provada experimentalmente em percursos de ida e volta (tendo por base um processo de sincronização de relógios), nunca tendo sido medida em apenas percursos de ida. Tal impossibilidade deve-se a obstáculos de natureza conceptual ligados ao velho problema da sincronização dos relógios. Colocar em causa o segundo postulado terá grandes implicações para a *Teoria da Relatividade Restrita*, como veremos no desenvolvimento deste capítulo. É, neste momento, importante realçar que é possível distinguir, de acordo com Selleri, pelo menos duas formulações do princípio da relatividade a que chamaremos relatividade forte e “relatividade fraca” e que se enunciam da seguinte forma:

- “*Relatividade forte*, segundo o qual as leis da física devem ser as mesmas em todos os referenciais inerciais. Deste postulado, passando pelas equações de Maxwell, chega-se necessariamente à constância da velocidade da luz e às transformações de Lorentz.” (Selleri, 2004, p. 121).

- “*Relatividade fraca*, que afirma somente a impossibilidade de, experimentalmente, pôr em evidência a existência de um eventual movimento absoluto da Terra. Este princípio não precisa necessariamente da validade das transformações de Lorentz e abre espaço a novas considerações.” (Selleri, 2004, p. 121).

Contudo, e atendendo ao facto de a luz ir de um ponto ao outro do espaço de forma bem definida, é crível que o possa fazer com uma velocidade precisa. Na tentativa de esclarecer este assunto introduziram-se, recentemente, um novo conjunto de transformações, designadas de *equivalentes*, cujos elementos diferem uns dos outros apenas com base no método de sincronização dos relógios.

5.1. Transformações gerais

O objetivo deste tópico é estudar as leis mais gerais de transformação das coordenadas espaciais e da componente temporal de um determinado acontecimento, relativamente a dois referenciais inerciais em que um se desloca face ao outro de forma retilínea e uniforme. Para procedermos a tal estudo, é necessário ter em atenção que o espaço vazio é homogéneo, isto é, tem as mesmas propriedades em todos os seus pontos, e é isótropo, ou seja, todas as suas direções são equivalentes e, para além disso, o tempo é homogéneo, isto é, todas as suas propriedades permanecem inalteráveis com o passar do tempo.

Consideremos, tal como até aqui, dois referenciais inerciais S e S' . Todo e qualquer acontecimento de S será definido por (x, y, z, t) e, por sua vez, qualquer acontecimento de S' será definido por (x', y', z', t') . Assim sendo, a relação entre as coordenadas de um acontecimento na passagem do primeiro referencial inercial para o segundo ser-nos-á dada por

$$\begin{cases} x' = f(x, y, z, t) \\ y' = g(x, y, z, t) \\ z' = h(x, y, z, t) \\ t' = i(x, y, z, t) \end{cases} \quad (5.1)$$

sendo f, g, h e i funções das componentes espaciais x, y e z e da componente temporal t de S . As transformações assim obtidas são a forma mais geral de transformações entre os referenciais inerciais S e S' .

Vamos começar por supor que existe, pelo menos, um referencial inercial no qual sejam válidas as equações de Maxwell, sendo este S . Designá-lo-emos por referencial estacionário e imporemos que a velocidade da luz nele é c em todas as direcções, consequência imediata das equações de Maxwell. Suponhamos, agora, que uma régua de comprimento Δx , paralela ao eixo Ox de S , sofre uma variação de posição que tem o mesmo efeito em S' sobre as coordenadas espaciais x', y' e z' e sobre a coordenada temporal t' , quaisquer que sejam os pontos e os instantes em que a régua se encontre em S . Tal consequência, deve-se ao facto do espaço e tempo serem homogéneos. Assim sendo, de (5.1) vem que

$$\begin{cases} x' + \Delta x' = f(x + \Delta x, y, z, t) \\ y' + \Delta y' = g(x + \Delta x, y, z, t) \\ z' + \Delta z' = h(x + \Delta x, y, z, t) \\ t' + \Delta t' = i(x + \Delta x, y, z, t) \end{cases} \quad (5.2)$$

Atendendo a que as variações de x', y', z' e t' só dependerão de Δx , e não de x, y, z e t , da homogeneidade do espaço e do tempo, a partir de (5.1) e (5.2), obtemos

$$\begin{cases} \Delta x' = f(x + \Delta x, y, z, t) - f(x, y, z, t) \\ \Delta y' = g(x + \Delta x, y, z, t) - g(x, y, z, t) \\ \Delta z' = h(x + \Delta x, y, z, t) - h(x, y, z, t) \\ \Delta t' = i(x + \Delta x, y, z, t) - i(x, y, z, t) \end{cases} \quad (5.3)$$

Nas equações (5.3) o primeiro membro não depende de x, y, z e t , implicando que o mesmo acontece com o segundo membro. Assim, se dividirmos ambos os membros por Δx , em todas as equações, e fizermos Δx a tender para zero, continuaremos a obter a independência de x, y, z e t . Consequentemente, temos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial i}{\partial x} \text{ são independentes de } x, y, z \text{ e } t, \quad (5.4)$$

e, portanto, estas derivadas serão constantes.

Podemos tirar conclusões similares para réguas de comprimento Δy e Δz paralelas, respetivamente, aos eixos coordenados Oy e Oz e para a passagem do tempo Δt . A partir de todas estas condições segue que as derivadas parciais das funções f , g , h e i têm de ser constantes, obtendo-se

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{\partial f}{\partial x} ; f_2 = \frac{\partial f}{\partial y} ; f_3 = \frac{\partial f}{\partial z} ; f_4 = \frac{\partial f}{\partial t} \\ g_1 &= \frac{\partial g}{\partial x} ; g_2 = \frac{\partial g}{\partial y} ; g_3 = \frac{\partial g}{\partial z} ; g_4 = \frac{\partial g}{\partial t} \\ h_1 &= \frac{\partial h}{\partial x} ; h_2 = \frac{\partial h}{\partial y} ; h_3 = \frac{\partial h}{\partial z} ; h_4 = \frac{\partial h}{\partial t} \\ i_1 &= \frac{\partial i}{\partial x} ; i_2 = \frac{\partial i}{\partial y} ; i_3 = \frac{\partial i}{\partial z} ; i_4 = \frac{\partial i}{\partial t} \end{aligned} \quad (5.5)$$

Atendendo à constância das derivadas parciais e, por integração, no que se refere à função f , podemos escrever a partir de (5.5)

$$\left\{ \begin{aligned} f_1 &= \frac{\partial f}{\partial x} \Rightarrow x' = f_1 x + \varphi_1(y, z, t) \\ f_2 &= \frac{\partial f}{\partial y} \Rightarrow y' = f_2 y + \varphi_2(x, z, t) \\ f_3 &= \frac{\partial f}{\partial z} \Rightarrow z' = f_3 z + \varphi_3(x, y, t) \\ f_4 &= \frac{\partial f}{\partial t} \Rightarrow t' = f_4 t + \varphi_4(x, y, z) \end{aligned} \right. , \quad (5.6)$$

onde cada uma das quatro equações de (5.6) obtiveram-se integrando sobre x , y , z e t , respetivamente. As funções φ_i , com $i = 1, \dots, 4$, são as constantes de integração em relação à variável sobre a qual se integra. Conclusões idênticas serão obtidas para y' , z' e t' , bastando, para tal, repetir o processo que se efetuou para x' . Atendendo à linearidade das funções f , g , h e i e, conseqüentemente, de x' , y' , z' e t' é-nos permitido concluir que

$$\begin{cases} x' = f_1 x + f_2 y + f_3 z + f_4 t + f_5 \\ y' = g_1 x + g_2 y + g_3 z + g_4 t + g_5 \\ z' = h_1 x + h_2 y + h_3 z + h_4 t + h_5 \\ t' = i_1 x + i_2 y + i_3 z + i_4 t + i_5 \end{cases} \quad (5.7)$$

Em (5.7) temos transformações lineares que contêm 20 coeficientes, constantes em relação às variáveis, mas que podem depender da velocidade \vec{v} do referencial inercial S' em relação a S . Determinemos, a partir deste momento, o valor de cada um destes coeficientes.

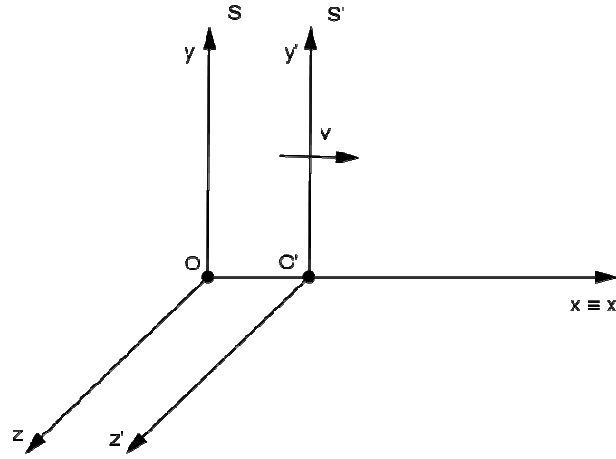


Figura 20: O referencial inercial S' , com coordenadas cartesianas ortogonais, desloca-se paralelamente ao eixo Ox do referencial inercial S com velocidade \vec{v} .

Comecemos por considerar que um observador de S' vê a origem do seu referencial coincidente com a origem de S em $t' = 0$ e que um observador de S vê, da mesma forma, a origem do seu referencial coincidente com a origem de S' em $t = 0$. A partir desta consideração concluímos que

$$\begin{aligned} x = 0 \wedge y = 0 \wedge z = 0 \wedge t = 0 \\ \Rightarrow x' = 0 \wedge y' = 0 \wedge z' = 0 \wedge t' = 0 \end{aligned} \quad (5.8)$$

De (5.8) e (5.7) concluímos, imediatamente, que

$$f_5 = 0 \wedge g_5 = 0 \wedge h_5 = 0 \wedge i_5 = 0. \quad (5.9)$$

Consideremos, também, que o plano xOy , do referencial inercial S , coincide com o plano $x'O'y'$, do referencial inercial S' , qualquer que seja o tempo t , isto é

$$z = 0 \Rightarrow z' = 0. \quad (5.10)$$

Substituindo (5.10) na terceira equação de (5.7) somos levados a escrever

$$h_1 x + h_2 y + h_4 t = 0, \forall x, y, t \quad (5.11)$$

e, conseqüentemente, de (5.11) conclui-se que

$$h_1 = 0 \wedge h_2 = 0 \wedge h_4 = 0. \quad (5.12)$$

Imponhamos, agora, que o plano xOz coincide com o plano $x'O'z'$ para qualquer valor de t , ou seja

$$y = 0 \Rightarrow y' = 0, \quad (5.13)$$

donde se obtém da segunda equação de (5.7) a condição

$$g_1 x + g_3 z + g_4 t = 0, \forall x, z, t \quad (5.14)$$

e, portanto,

$$g_1 = 0 \wedge g_3 = 0 \wedge g_4 = 0. \quad (5.15)$$

Admitamos, ainda, que no instante $t = 0$ o plano yOz coincide com o plano $y'O'z'$, donde se obtém a condição

$$x = 0 \wedge t = 0 \Rightarrow x' = 0, \quad (5.16)$$

pois com o passar do tempo os planos yOz e $y'O'z'$ permanecerão paralelos. Atendendo às condições obtidas em (5.16) e substituindo na primeira equação de (5.7) obtemos

$$f_2 y + f_3 z = 0, \forall y, z \quad (5.17)$$

e, portanto, concluímos que

$$f_2 = 0 \wedge f_3 = 0. \quad (5.18)$$

Vamos impor, também, que a origem de S' se move com velocidade \vec{v} , constante, uniforme e de módulo v , paralelamente ao eixo Ox de S , temos, portanto, que

$$x' = 0 \wedge x = vt \wedge y = 0 \wedge z = 0, \quad (5.19)$$

assim, tendo atenção as condições de (5.19), e substituindo-as na primeira equação de (5.7), obtemos o resultado

$$f_1(vt) + f_4 t = 0 \quad (5.20)$$

concluindo-se, portanto, de (5.20) que

$$f_4 = -f_1 v. \quad (5.21)$$

Podemos, neste momento, reescrever as transformações (5.7), a partir das conclusões obtidas em (5.9), (5.12), (5.15), (5.18) e (5.21), obtendo-se assim as leis de transformação mais gerais entre referenciais inerciais de coordenadas espaciais cartesianas que se sobreponham aos tempos $t = 0$ e $t' = 0$ e cuja velocidade de um sistema em relação ao outro é feita paralelamente aos eixos coordenados Ox e $O'x'$. Essas transformações são-nos dadas por

$$\begin{cases} x' = f_1 x - (f_1 v) t \\ y' = g_2 y \\ z' = h_3 z \\ t' = i_1 x + i_2 y + i_3 z + i_4 t \end{cases}. \quad (5.22)$$

Se considerarmos que os eixos coordenados são ortogonais, algo não imposto até agora, e atendendo a que a velocidade com que o referencial S' se move relativamente a S é paralela ao eixo Ox , então os eixos Oy e Oz são equivalentes, uma vez que são escolhidos arbitrariamente e, como tal, não poderão ser distinguidos fisicamente, uma vez que o espaço é isótropo. Assim sendo, temos que

$$g_2 = h_3 \wedge i_2 = i_3. \quad (5.23)$$

Para além disso, como a velocidade \vec{v} é paralela a Ox , o tempo t' não pode depender de y e de z , teremos

$$i_2 = 0. \quad (5.24)$$

A partir de (5.22), e tendo em conta (5.23) e (5.24), obtêm-se as *transformações gerais* de S para S' , sendo estas

$$\begin{cases} x' = f_1(x - vt) \\ y' = g_2 y \\ z' = g_2 z \\ t' = i_1 x + i_4 t \end{cases}, \quad (5.25)$$

onde os coeficientes f_1 , g_2 , i_1 e i_4 podem depender de v , como veremos mais à frente.

Vamos, agora, determinar as transformações gerais inversas. Facilmente se conclui, resolvendo as segunda e terceira equações de (5.25) em ordem a y e a z , respetivamente, que

$$y = \frac{1}{g_2} y' \wedge z = \frac{1}{g_2} z'. \quad (5.26)$$

Por sua vez, a partir da primeira equação de (5.25) podemos escrever, resolvendo esta equação em ordem a x , que

$$x = \frac{x' + f_1 vt}{f_1}. \quad (5.27)$$

Substituindo x , assim obtido em (5.27), na quarta equação de (5.25) vem que

$$t' = i_1 \left(\frac{x' + f_1 vt}{f_1} \right) + i_4 t. \quad (5.28)$$

Atendendo a questões de cálculo elementares, de (5.28), podemos escrever

$$t(i_1 v + i_4) = t' - \frac{i_1}{f_1} x' \quad (5.29)$$

donde, resolvendo (5.29) em ordem a t , se obtém

$$t = \frac{1}{i_1 v + i_4} \left(t' - \frac{i_1}{f_1} x' \right). \quad (5.30)$$

Substituindo em (5.27) o valor de t obtido em (5.30) somos levados a escrever

$$x = \frac{x'}{f_1} + \frac{v t'}{i_1 v + i_4} - \frac{i_1 v x'}{f_1 (i_1 v + i_4)} \quad (5.31)$$

e, em consequência de (5.31), reduzindo todas as frações do segundo membro ao mesmo denominador e eliminando os termos simétricos vem

$$x = \frac{i_4 x' + f_1 v t'}{f_1 (i_1 v + i_4)}. \quad (5.32)$$

Colocando em evidência em (5.32) o fator $\frac{1}{i_1 v + i_4}$ concluímos que

$$x = \frac{1}{i_1 v + i_4} \left(\frac{i_4}{f_1} x' + v t' \right). \quad (5.33)$$

De (5.26), (5.30) e (5.33) obtemos as transformações gerais inversas, sendo estas

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{i_1 v + i_4} \left(\frac{i_4}{f_1} x' + v t' \right) \\ y = \frac{1}{g_2} y' \\ z = \frac{1}{g_2} z' \\ t = \frac{1}{i_1 v + i_4} \left(t' - \frac{i_1}{f_1} x' \right) \end{array} \right. . \quad (5.34)$$

Como dito anteriormente os coeficientes de (5.25) dependem de v , vamos ver como. Atendendo à escolha efetuada para os eixos (figura 20), um aumento no valor da coordenada x do referencial inercial S num determinado tempo concreto t resulta, também, no aumento da coordenada x' do referencial S' . A título de exemplo, consideremos dois valores distintos de

S' , x'_1 e x'_2 , tais que $x'_2 > x'_1$, extremos de uma régua em repouso relativamente ao referencial inercial S' , de acordo com a primeira equação de (5.25) temos que

$$x'_1 = f_1(x_1 - vt) \wedge x'_2 = f_1(x_2 - vt), \quad (5.35)$$

sendo x_1 e x_2 os seus valores correspondentes em S . Se em (5.35) procedermos à subtração entre x'_2 e x'_1 , obtemos

$$\begin{aligned} x'_2 - x'_1 &= f_1(x_2 - vt) - f_1(x_1 - vt) \\ &= f_1 x_2 - f_1 vt - f_1 x_1 + f_1 vt = f_1(x_2 - x_1). \end{aligned} \quad (5.36)$$

De (5.36) conclui-se que $f_1 > 0$, pois $x'_2 - x'_1$ e $x_2 - x_1$ têm de ter o mesmo sinal, para além de que f_1^{-1} é o fator de contração longitudinal das transformações (5.25).

Do mesmo modo, consideremos y'_1 e y'_2 , coordenadas de S' , como sendo as extremidades de uma régua em repouso sobre o eixo $O'y'$. Atendendo à segunda equação de (5.25), temos que

$$y'_1 = g_2 y_1 \wedge y'_2 = g_2 y_2, \quad (5.37)$$

sendo y_1 e y_2 os valores correspondentes em S , respetivamente de y'_1 e y'_2 . Atendendo a (5.37) vamos subtrair y'_1 a y'_2 , donde se obtém

$$y'_2 - y'_1 = g_2 y_2 - g_2 y_1 = g_2(y_2 - y_1), \quad (5.38)$$

evidentemente $g_2 > 0$ pois $y'_2 - y'_1$ e $y_2 - y_1$ têm o mesmo sinal e g_2^{-1} é o fator de contração transversal de (5.25).

Vamos, ainda, considerar t'_1 e t'_2 como dois instantes distintos de ocorrência, relativamente ao referencial S' , de dois acontecimentos num ponto de coordenada espacial x , sendo que t'_2 ocorre depois de t'_1 . Assim sendo, de (5.25) temos que

$$t'_1 = i_1 x + i_4 t_1 \wedge t'_2 = i_1 x + i_4 t_2 \quad (5.39)$$

em que t_1 e t_2 são os tempos equivalentes a t'_1 e t'_2 , relativamente ao referencial inercial S . De (5.39) concluímos que

$$\begin{aligned} t'_2 - t'_1 &= i_1 x + i_4 t_2 - (i_1 x + i_4 t_1) \\ &= i_1 x + i_4 t_2 - i_1 x - i_4 t_1 = i_4 (t_2 - t_1) \end{aligned} \quad (5.40)$$

Atendendo a que se t'_2 ocorre depois de t'_1 , então, t_2 também ocorre depois de t_1 , pois acontecimentos que têm lugar no mesmo local são vistos pela mesma ordem nos vários referenciais inerciais que se considere. Portanto, e tendo por base o resultado de (5.40), podemos afirmar que i_4 é positivo pois $t_2 - t_1$ e $t'_2 - t'_1$ têm o mesmo sinal. Contudo, e apesar de i_4 ser o fator de atraso de um relógio em repouso no referencial S , visto de S' , tal não significa que i_4^{-1} seja o fator de atraso de um relógio em repouso em S' , visto de S . Para tal, teremos de recorrer às transformações gerais inversas obtidas em (5.34). Atendendo a que a origem do referencial S' em S satisfaz a condição $x = 0$, da primeira equação de (5.34) vem

$$0 = \frac{1}{i_1 v + i_4} \left(\frac{i_4}{f_1} x' + v t' \right) \Rightarrow \frac{i_4}{f_1} x' + v t' = 0 \Leftrightarrow x' = -\frac{v f_1}{i_4} t'. \quad (5.41)$$

Obtendo-se, assim, a equação que nos dá a velocidade da origem de S vista de S' , podendo-se concluir que a velocidade de S relativamente a S' , v^* , é-nos dada por

$$v^* = -\frac{v f_1}{i_4}. \quad (5.42)$$

Como dito anteriormente, a sequência de acontecimentos mantém-se de S para S' e, portanto, dois acontecimentos que ocorram no mesmo local identificados pela coordenada espacial x' devem ser vistos pelos observadores de S e de S' pela mesma ordem. Logo se

$$t_1 = \frac{t'_1 - \left(\frac{i_1}{f_1} \right) x'}{i_4 + i_1 v} \quad \wedge \quad t_2 = \frac{t'_2 - \left(\frac{i_1}{f_1} \right) x'}{i_4 + i_1 v} \quad (5.43)$$

descrevem dois acontecimentos distintos em S , vem por subtração que

$$t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - \left(\frac{i_1}{f_1}\right)x'}{i_4 + i_1 v} - \frac{t'_1 - \left(\frac{i_1}{f_1}\right)x'}{i_4 + i_1 v} \quad (5.44)$$

$$= \frac{t'_2 - t'_1 - \left(\frac{i_1}{f_1}\right)x' + \left(\frac{i_1}{f_1}\right)x'}{i_4 + i_1 v} = \frac{t'_2 - t'_1}{i_4 + i_1 v}$$

e, atendendo a que $t'_2 - t'_1$ e $t_2 - t_1$ têm o mesmo sinal, obtém-se que $i_4 + i_1 v > 0$, sendo que $(i_4 + i_1 v)^{-1}$ é o fator de atraso de um relógio em repouso em S' visto de S .

5.2. Transformações equivalentes

Para determinarmos as expressões que nos dão as *transformações equivalentes* vamos continuar a considerar dois referenciais inerciais S e S' nas condições utilizadas até aqui e considerar que os eixos destes referenciais são ortogonais, tal como se considerou para deduzir as transformações de Lorentz. Assim, de acordo com Selleri (1997), temos de assumir que:

- i) em S a velocidade da luz no vácuo é constante em todas as direções, sendo-nos dada por c e, como tal, os relógios em repouso neste referencial são sincronizados de acordo com o método de Einstein;
- ii) o espaço é homogêneo e isótropo e o tempo é homogêneo, pelo menos para observadores em repouso em S ;
- iii) os eixos de S e S' coincidem na origem dos tempos, isto é quando $t = t' = 0$;
- iv) a origem de S' , quando observada de S , tem uma velocidade $x = vt$, sendo que $v < c$;
- v) a velocidade da luz no vácuo nos percursos de ida e volta, em todas as direções e em todos os referenciais inerciais, é sempre a mesma e vale c ;

vi) o atraso dos relógios em movimento é-nos dado por $\frac{1}{\gamma} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$.

Atendendo às condições impostas i) e vi) e aos resultados obtidos em (5.36), (5.38) e (5.44), concluimos que

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma \quad (5.45)$$

$$g_2 = 1 \quad (5.46)$$

$$i_4 + i_1 v = \frac{1}{\gamma} \Leftrightarrow i_4 = \frac{1}{\gamma} - i_1 v \quad (5.47)$$

e, consequentemente, a partir de (5.25) tendo por base (5.45), (5.46) e (5.47), as transformações de S para S' são-nos dadas por

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = i_1 x + \left(\frac{1}{\gamma} - i_1 v \right) t \Leftrightarrow t' = i_1(x - vt) + \frac{1}{\gamma} t \end{array} \right. , \quad (5.48)$$

as quais se designam por *transformações equivalentes*. O parâmetro i_1 é fixado de acordo com o processo de sincronização de relógios que se adota. No caso da *Teoria da Relatividade Restrita*, de Einstein, i_1 assume o valor

$$i_1 = -\frac{v}{c^2} \gamma. \quad (5.49)$$

Para verificarmos a afirmação feita, vamos substituir (5.49) na quarta equação de (5.48).

$$t' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t + \left[-\frac{v}{c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (x - vt) \right]$$

$$\Leftrightarrow t' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t - \frac{v}{c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} x + \frac{v^2}{c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} t$$

$$\Leftrightarrow t' = \left(\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{v^2}{c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) t - \frac{v}{c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} x, \quad (5.50)$$

reduzindo ao mesmo denominador a expressão entre parêntesis em (5.50) e, atendendo a que $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$, facilmente se constata que $t' = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x \right)$, transformação do tempo para as

transformações de Lorentz. Diferentes valores de i_1 correspondem a diferentes teorias do espaço e do tempo.

Determinemos, agora, as transformações inversas das transformações equivalentes. Para tal comecemos por resolver a primeira equação de (5.48) em ordem a x , donde se obtém, numa primeira instância

$$x = \frac{x'}{\gamma} + vt. \quad (5.51)$$

Por outro lado, da quarta equação de (5.48), podemos escrever que

$$t' - i_1 x = t \left(\frac{1}{\gamma} - i_1 v \right) \quad (5.52)$$

e, assim, segue que

$$t = \frac{t' - i_1 x}{\frac{1}{\gamma} - i_1 v}. \quad (5.53)$$

Substituindo (5.53) em (5.51), podemos concluir que

$$x \left(\frac{1}{\gamma} - i_1 v \right) = \frac{1}{\gamma} x' \left(\frac{1}{\gamma} - i_1 v \right) + v(t' - i_1 x). \quad (5.54)$$

Finalmente, resolvendo (5.54) em ordem a x e atendendo ao facto de existirem dois termos simétricos em (5.54), concluímos que

$$x = \left(\frac{1}{\gamma} - i_1 v \right) x' + \gamma v t. \quad (5.55)$$

Das segunda e terceira equações de (5.48), imediatamente, se conclui que

$$y = y' \wedge z = z'. \quad (5.56)$$

Por sua vez, a partir da quarta equação de (5.48) deduz-se a transformação inversa equivalente da componente temporal de um dado acontecimento. Para tal, comecemos por colocar no primeiro membro da igualdade os termos em t , colocando este fator em evidência, donde se obtém

$$t \left(\frac{1}{\gamma} - i_1 v \right) = t' - i_1 x. \quad (5.57)$$

Substituindo em (5.57) o valor de x obtido em (5.55) somos levados a escrever

$$t \left(\frac{1}{\gamma} - i_1 v \right) = t' - i_1 \left[\left(\frac{1}{\gamma} - i_1 v \right) x' + \gamma v t' \right]. \quad (5.58)$$

Multiplicando todos os termos da equação (5.58) por $\frac{1}{\gamma}$ vem

$$\frac{1}{\gamma} t \left(\frac{1}{\gamma} - i_1 v \right) = \frac{1}{\gamma} t' - i_1 \left[\frac{1}{\gamma} \left(\frac{1}{\gamma} - i_1 v \right) x' + v t' \right], \quad (5.59)$$

donde se conclui que

$$t = \frac{\frac{1}{\gamma} t' - i_1 v t'}{\frac{1}{\gamma} \left(\frac{1}{\gamma} - i_1 v \right)} - i_1 x'. \quad (5.60)$$

Finalmente, colocando em evidência t' , no numerador da fração presente em (5.60), vem

$$t = \gamma t' - i_1 x'. \quad (5.61)$$

Assim de (5.55), (5.56) e (5.61) temos as transformações inversas equivalentes dadas por

$$\begin{cases} x = \left(\frac{1}{\gamma} - i_1 v \right) x' + \gamma v t' \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma t' - i_1 x' \end{cases} . \quad (5.62)$$

Para todas as teorias que se considerem baseadas na escolha de diferentes i_1 assume-se a existência de um referencial inercial privilegiado S , no qual a velocidade da luz é a mesma em todas as direções espaciais. Este é um aspeto muito importante porque nos garante que se uma teoria do nosso “conjunto” descreve a realidade física, tal como ela é, então, deverá existir um referencial inercial concreto, onde as noções de tempo e de simultaneidade deixem de ser convenções e reflitam esta mesma realidade.

5.3. Simultaneidade retardada e simultaneidade avançada

De acordo com Selleri, diz-se que a simultaneidade é retardada quando é observada em relógios do referencial em movimento retilíneo e uniforme S' regulados segundo $i_1 < 0$.

Concluimos, a partir de (5.48), que

$$\begin{aligned} t' - t &= \frac{1}{\gamma} t + i_1 (x - vt) - t \Leftrightarrow t' - t = t \left(\frac{1}{\gamma} - 1 \right) + i_1 \frac{(x - vt)}{\frac{1}{\gamma}} \frac{1}{\gamma} \\ \Leftrightarrow t' - t &= \left(\frac{1}{\gamma} - 1 \right) t + \frac{1}{\gamma} i_1 x' \end{aligned} \quad (5.63)$$

e, portanto, de (5.63) facilmente se deduz

$$t' = \frac{1}{\gamma} (t + i_1 x'). \quad (5.64)$$

Assim sendo, para um determinado tempo t , de S , os relógios fixos nos pontos x'_1 e x'_2 , de S' , deverão indicar

$$t'_1 = \frac{1}{\gamma}(t + i_1 x'_1) \wedge t'_2 = \frac{1}{\gamma}(t + i_1 x'_2) \quad (5.65)$$

e, conseqüentemente, obtemos

$$t'_2 - t'_1 = \frac{1}{\gamma}(t + i_1 x'_2) - \frac{1}{\gamma}(t + i_1 x'_1) \Leftrightarrow t'_2 - t'_1 = \frac{1}{\gamma}i_1(x'_2 - x'_1). \quad (5.66)$$

Neste momento, se considerarmos que para além de $i_1 < 0$, se verifica que $x'_2 > x'_1$, então concluímos que $t'_2 < t'_1$, pois nestas condições $i_1(x'_2 - x'_1) < 0$. Em jeito de conclusão, somos levados a dizer que simultaneidade retardada significa que os relógios de S' mostram um tempo decrescente t' com o aumento do valor espacial x' , para um mesmo tempo t de S . A relatividade restrita de Einstein, na qual, como já foi dito, $i_1 = -\gamma \frac{v}{c^2}$, é o exemplo mais conhecido de simultaneidade retardada.

No instante em que as origens dos referenciais inerciais S e S' se encontram, isto é quando $t = t' = 0$, um sinal parte de O , origem de S , no sentido positivo do eixo Ox e paralelamente a este com uma velocidade de módulo u , sendo, portanto, a sua trajetória dada pela condição

$$x = ut, \quad (5.67)$$

de modo a que $u \leq c$ e $u > v$, sendo v a velocidade do referencial S' face a S , nas condições que temos vindo a considerar. A posição x' do sinal vista de S' é-nos dada por

$$x' = \gamma(u - v)t, \quad (5.68)$$

pois da primeira condição de (5.48) sabemos que $x' = \gamma(x - vt)$ e substituindo nesta condição x por (5.67), facilmente obtemos (5.68). Assim, se considerarmos um valor x'_l , marcado no semieixo positivo de $O'x'$, este é atingido pelo sinal no instante t_l , medido no referencial S , dado por

$$x_1' = \gamma(u - v)t_1 \Leftrightarrow t_1 = \frac{x_1'}{\gamma(u - v)}. \quad (5.69)$$

Neste mesmo instante, o sinal terá em S uma posição x_1 dada por

$$x_1 = \frac{u x_1'}{\gamma(u - v)}, \quad (5.70)$$

pois de (5.67) sabemos que $x_1 = u t_1$ e de (5.69) que $t_1 = \frac{x_1'}{\gamma(u - v)}$, portanto

$$x_1 = u t_1 \Rightarrow x_1 = \frac{u x_1'}{\gamma(u - v)}. \quad (5.71)$$

Por sua vez, o sinal emitido atinge o ponto x_1' no tempo, medido no referencial S' , t_1' dado, de acordo com (5.48) por $t_1' = i_1(x_1 - v t_1) + \frac{1}{\gamma} t_1$. Atendendo a (5.69) e (5.70), somos levados a escrever

$$t_1' = \frac{1}{\gamma} \left\{ \left[\frac{x_1'}{\gamma(u - v)} \right] + i_1 \left(\frac{u x_1'}{u - v} - v \frac{x_1'}{u - v} \right) \right\}, \quad (5.72)$$

reduzindo todos os termos da equação anterior ao mesmo denominador e atendendo a que $u - v \neq 0$, para quaisquer valores de u e v , pois por hipótese $u > v$, temos

$$t_1'(u - v) = \gamma^{-1} \gamma^{-1} x_1' + i_1 \gamma^{-1} u x_1' - i_1 \gamma^{-1} v x_1'. \quad (5.73)$$

Colocando em evidência, no segundo membro de (5.73), o fator comum $\gamma^{-1} x_1'$ vem

$$t_1'(u - v) = \gamma^{-1} x_1' [\gamma^{-1} + i_1(u - v)] \quad (5.74)$$

e dividindo todos os termos de (5.74) por $u - v$ obtém-se

$$t_1' = \frac{1}{\gamma} x_1' \left[\frac{1}{\gamma(u - v)} + i_1 \right]. \quad (5.75)$$

Obviamente que se considerarmos que um observador viaja com o sinal vamos considerar que este não pode observar, nos relógios de S' , um tempo constante ou decrescente, assim t'_1 terá de ser positivo, donde de (5.75) se conclui que

$$t'_1 > 0 \Rightarrow \left[\frac{1}{\gamma(u-v)} + i_1 \right] > 0 \Leftrightarrow i_1 > -\frac{1}{\gamma(u-v)}, \quad (5.76)$$

pois, por convenção $x'_1 > 0$.

De acordo com Selleri, a simultaneidade “avançada” é observada em relógios do referencial em movimento retilíneo e uniforme, S' , regulados segundo $i_1 > 0$.

Consideremos o instante em que se verifica $t = t' = 0$. Neste instante, façamos um sinal localizado em O (coincidente com O') partir na direção definida por

$$x = -ut \quad (5.77)$$

paralelamente ao eixo Ox , com velocidade de módulo u e de modo a que $u \leq c$. A posição x' do sinal, vista do referencial S' , é-nos dada a partir de (4.48) por $x' = \gamma(x - vt)$ e atendendo a (5.77) vem

$$x' = \gamma(-ut - vt) = -\gamma t (u + v). \quad (5.78)$$

Assim um ponto x'_1 colocado no semi-eixo negativo de $O'x'$, $x'_1 < 0$, é atingido pelo sinal no instante t_1 , medido pelos relógios de S , dado por

$$x'_1 = -\gamma t_1 (u + v) \Leftrightarrow t_1 = -\frac{x'_1}{\gamma(u + v)}. \quad (5.79)$$

Neste mesmo instante e atendendo a (5.77), o sinal terá uma posição x_1 , do ponto de vista do referencial S , dada por

$$x_1 = -ut_1 = -u \left(-\frac{x'_1}{\gamma(u + v)} \right) = \frac{u x'_1}{\gamma(u + v)}. \quad (5.80)$$

Quando o ponto x'_1 é atingido pelo sinal, o relógio em repouso em S' marcará um tempo t'_1 que, tendo por base os resultados obtidos em (5.79) e (5.80) e a transformação do tempo dada por (5.48), é-nos dado por

$$\begin{aligned} t'_1 &= \frac{1}{\gamma} t_1 + i_1 (x_1 - vt_1) \\ \Leftrightarrow t'_1 &= \gamma^{-1} \left(-\frac{\gamma^{-1} x'_1}{u+v} \right) + i_1 \left(\frac{\gamma^{-1} u x'_1}{u+v} + \frac{\gamma^{-1} v x'_1}{u+v} \right) \end{aligned} \quad (5.81)$$

e, de modo semelhante ao mostrado para a simultaneidade retardada, conclui-se que

$$t'_1 = \frac{1}{\gamma} x'_1 \left(i_1 - \frac{1}{\gamma(u+v)} \right). \quad (5.82)$$

Tal como para a simultaneidade retardada, também para a simultaneidade avançada faz sentido que um observador que se desloque com o sinal, do ponto de vista do referencial S' , não veja o tempo constante ou de forma decrescente, pelo que $t'_1 > 0$, logo de (5.82) e pelo facto de x'_1 ser negativo concluímos que

$$i_1 - \frac{1}{\gamma(u+v)} < 0 \quad (4.83)$$

e, portanto

$$i_1 < \frac{1}{\gamma(u+v)}. \quad (5.84)$$

Tendo em conta as condições chegadas em (5.76) e (5.84) somos levados a concluir que qualquer que seja o tipo de simultaneidade que se considere vem

$$-\frac{1}{\gamma(u-v)} < i_1 < \frac{1}{\gamma(u+v)}. \quad (5.85)$$

Atendendo a que $\beta = \frac{v}{c} \wedge \frac{1}{\gamma} = \sqrt{1 - \beta^2}$, podemos escrever (5.85) na forma

$$-\frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{u - v} < i_1 < \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{u + v} \quad (5.86)$$

e, portanto,

$$-\sqrt{\frac{(1-\beta)(1+\beta)}{(u-v)^2}} < i_1 < \sqrt{\frac{(1-\beta)(1+\beta)}{(u+v)^2}}. \quad (5.87)$$

Dividindo o numerador e o denominador dos radicandos de (5.87) por c^2 obtemos

$$-\sqrt{\frac{(1-\beta)(1+\beta)}{c^2 \left(\frac{u}{c} - \frac{v}{c}\right)\left(\frac{u}{c} - \frac{v}{c}\right)}} < i_1 < \sqrt{\frac{(1-\beta)(1+\beta)}{c^2 \left(\frac{u}{c} + \frac{v}{c}\right)\left(\frac{u}{c} + \frac{v}{c}\right)}}, \quad (5.88)$$

donde se conclui que as maiores restrições são conseguidas para $u = c$ e, conseqüentemente, vem

$$-\frac{1}{c} \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} < i_1 < \frac{1}{c} \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}. \quad (5.89)$$

Caso se considerasse a existência de sinais superluminais, isto é, $u \rightarrow \infty$, verificar-se-ia que $i_1 = 0$. Mais adiante iremos abordar a problemática relacionada com a hipótese de existirem velocidades superiores à da luz no vácuo.

5.4. Contração do espaço

Verificamos que em relatividade restrita, considerando o processo de sincronização de Einstein em que $i_1 = -\frac{v}{c^2} \gamma$, se verificava a contração de objetos em movimento. Verificaremos, neste tópico, que não se encontram diferenças físicas assinaláveis qualquer que seja o processo de sincronização que se utilize (desde que se considerem velocidades superluminais), ou seja, qualquer que seja o valor de $i_1 \neq 0$ que se considere.

Vamos considerar uma régua em repouso sobre o eixo $O'x'$ do referencial inercial S' , sendo os seus extremos dados pelos pontos x'_1 e x'_2 . Vamos, ainda, considerar que

observadores em S marcam os extremos da régua no eixo Ox , sendo estes x_1 e x_2 num mesmo instante t . De acordo com as transformações equivalentes obtidas em (5.48), podemos escrever

$$x'_1 = \gamma(x_1 - vt) \wedge x'_2 = \gamma(x_2 - vt), \quad (5.90)$$

por subtração vem

$$x'_2 - x'_1 = \gamma(x_2 - vt) - \gamma(x_1 - vt) = \gamma(x_2 - x_1), \quad (5.91)$$

donde

$$x_2 - x_1 = \frac{1}{\gamma}(x'_2 - x'_1). \quad (5.92)$$

De (5.92) constata-se que uma régua em repouso em S' parece mais pequena se observada de S . Atendendo à isotropia do espaço, isto é ao facto de o mesmo ser equivalente em todas as direcções, esta conclusão não depende da direcção do movimento.

Verifiquemos, agora, o que acontece se considerarmos que a régua anterior se encontra em repouso no referencial S . Sejam x_1 e x_2 as extremidades da régua em S . Para os observadores de S' , num mesmo tempo t' , as extremidades da régua, x'_1 e x'_2 são dadas através de (5.62) por

$$x_1 = \left(\frac{1}{\gamma} - i_1 v\right)x'_1 + \gamma vt' \wedge x_2 = \left(\frac{1}{\gamma} - i_1 v\right)x'_2 + \gamma vt', \quad (5.93)$$

subtraindo, tal como se procedeu anteriormente, podemos escrever

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &= \left(\frac{1}{\gamma} - i_1 v\right)x'_2 + \gamma vt' - \left[\left(\frac{1}{\gamma} - i_1 v\right)x'_1 + \gamma vt'\right] \\ &= \left(\frac{1}{\gamma} - i_1 v\right)(x'_2 - x'_1) \end{aligned} \quad (5.94)$$

e resolvendo a condição em ordem a $x'_2 - x'_1$ vem

$$x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - x_1}{\frac{1}{\gamma} - i_1 v}. \quad (5.95)$$

Nesta situação, o comprimento da régua, em repouso no referencial inercial S , para observadores de S' , terá comprimentos muito distintos e dependentes do parâmetro de sincronização i_1 . Se considerarmos que $i_1 = -\frac{v}{c^2}\gamma$, caso da relatividade restrita de Einstein, de (5.95) obtemos

$$x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - x_1}{\frac{1}{\gamma} + \gamma \frac{v^2}{c^2}} = \frac{(x_2 - x_1) \left(\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right) c^2}{c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) + v^2}$$

$$\Leftrightarrow x'_2 - x'_1 = (x_2 - x_1) \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{x_2 - x_1}{\gamma} \quad (5.96)$$

ou seja, a contração espacial da régua em movimento, como era esperado. Por sua vez se em (5.95) considerarmos $i_1 = 0$, sincronização absoluta, como adiante se verá, obtemos

$$x_2 - x_1 = \gamma(x'_2 - x'_1) \quad (5.97)$$

e, neste caso, obtém-se uma dilatação do objeto em movimento. Assim, verifica-se que os métodos de sincronização escolhidos nos levam a resultados incompatíveis e, portanto, será impossível escolher experimentalmente o resultado mais acertado, uma vez que estes resultados dependerão, sempre, do método de sincronização entre relógios selecionado.

5.5. Dilatação do tempo

Vamos considerar um relógio R' em repouso no eixo das abcissas do referencial inercial S' , sendo a abscissa do seu ponto representativo dada por x'_R . Vamos considerar, também, que estão dois observadores em repouso sobre o eixo Ox do referencial inercial S ,

sendo as abscissas dos seus pontos x_1 e x_2 , respetivamente, e que estes marcam os tempos t_1 e t_2 dados pelos seus relógios quando o relógio R' lhes passa imediatamente à frente, mostrando R' os tempos x'_1 e x'_2 . Atendendo a que o relógio R' se mantém imóvel relativamente ao referencial S' e se desloca face a S com uma velocidade constante e uniforme de módulo v , temos, portanto que

$$x_1 = vt_1 \wedge x_2 = vt_2 \quad (5.98)$$

e, consequentemente, de (5.98) obtém-se

$$x_2 - x_1 = v(t_2 - t_1). \quad (5.99)$$

Com base na quarta equação das transformações equivalentes expressas em (5.48), somos levados a escrever que

$$t'_1 = \frac{1}{\gamma}t_1 + i_1(x_1 - vt_1) \wedge t'_2 = \frac{1}{\gamma}t_2 + i_1(x_2 - vt_2), \quad (5.100)$$

donde por subtração vem

$$t'_2 - t'_1 = \frac{1}{\gamma}t_2 + i_1(x_2 - vt_2) - \left[\frac{1}{\gamma}t_1 + i_1(x_1 - vt_1) \right]. \quad (5.101)$$

Pondo em evidência em (5.101) os fatores $\frac{1}{\gamma}$, i_1 e v deduz-se

$$t'_2 - t'_1 = \frac{1}{\gamma}(t_2 - t_1) + i_1[x_2 - x_1 + v(t_2 - t_1)] \quad (5.102)$$

e, com base no resultado obtido em (5.102), conclui-se que

$$t_2 - t_1 = \gamma(t'_2 - t'_1), \quad (5.103)$$

pois atendendo a (5.99) a expressão $x_2 - x_1 + v(t_2 - t_1)$, presente em (5.102), é igual a zero.

Assim sendo, e com base no resultado de (5.103), concluimos que visto de S o relógio R' , fixo em S' , parece atrasado. Como o espaço é isotrópico este resultado não depende da direção do movimento.

Vejam, agora, o que acontece se considerarmos um relógio R fixo sobre o eixo Ox do referencial inercial S num ponto de abscissa x_R . Consideremos, também, dois observadores em repouso relativamente ao referencial S' , nos pontos de abscissa x'_1 e x'_2 , que controlam os tempos t'_1 e t'_2 dos seus relógios, quando o relógio R passa exatamente à sua frente. Deste modo, eles conseguem ver os tempos t_1 e t_2 marcados pelo relógio R quando este lhes passa em frente.

Atendendo a que o relógio R está em repouso relativamente a S e considerando as transformações equivalentes inversas expressas em (5.62), podemos escrever que as posições ocupadas pelo relógio, quando este está em frente aos dois observadores anteriormente citados, são-nos dadas por

$$x_R = \left(\frac{1}{\gamma} - i_1 v \right) x'_1 + \gamma v t'_1 \quad \wedge \quad x_R = \left(\frac{1}{\gamma} - i_1 v \right) x'_2 + \gamma v t'_2. \quad (5.104)$$

Assim, se subtrairmos as duas expressões anteriores concluímos, facilmente, que

$$x'_2 - x'_1 = - \frac{\gamma v (t'_2 - t'_1)}{\left(\frac{1}{\gamma} - i_1 v \right)}, \quad (5.105)$$

expressão esta que nos dá informação sobre a variação da posição do relógio R face ao referencial inercial S' .

Ainda a partir das equações das transformações inversas equivalentes (5.62), podemos escrever que

$$t_1 = \gamma t'_1 - i_1 x'_1 \quad \wedge \quad t_2 = \gamma t'_2 - i_1 x'_2 \quad (5.106)$$

e, consequentemente, subtraindo as duas equações expressas em (5.106) vem que

$$t_2 - t_1 = \gamma (t'_2 - t'_1) - i_1 (x'_2 - x'_1), \quad (5.107)$$

donde, resolvendo (5.107) em ordem a $t'_2 - t'_1$, se obtém

$$t'_2 - t'_1 = \frac{t_2 - t_1 + i_1 (x'_2 - x'_1)}{\gamma}. \quad (5.108)$$

Substituindo em (5.108) a condição (5.105) segue que

$$t'_2 - t'_1 + \frac{i_1 v (t'_2 - t'_1)}{\left(\frac{1}{\gamma} - i_1 v\right)} = \frac{t_2 - t_1}{\gamma} \quad (5.109)$$

e, portanto, reduzindo ao mesmo denominador os termos do primeiro membro da equação (5.109) e colocando em evidência os fatores comuns vem

$$(t'_2 - t'_1) \frac{1}{\gamma} = \left(\frac{1}{\gamma} - i_1 v\right) \frac{t_2 - t_1}{\gamma}. \quad (5.110)$$

Finalmente, conclui-se que

$$t'_2 - t'_1 = \left(\frac{1}{\gamma} - i_1 v\right) (t_2 - t_1), \quad (5.111)$$

e, conseqüentemente, a diferença temporal relativamente aos dois referenciais inerciais depende de i_1 . Mais uma vez se conclui que os resultados dependem do processo de sincronização dos relógios e, como tal, de i_1 (parâmetro de sincronização). Tal não é de estranhar uma vez que o relógio em movimento face a S' , é controlado por dois relógios fixos neste referencial, ocupando posições distintas, sendo necessário sincronizar os mesmos. Constatamos, assim, que se a sincronização em questão for realizada pelo método de Einstein, como na teoria da relatividade restrita, em que $i = -\frac{v}{c^2} \gamma$, substituindo em (5.111) obtém-se

$$t'_2 - t'_1 = \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{v^2}{c^2} \gamma\right) (t_2 - t_1) \quad (5.112)$$

e como $\frac{1}{\gamma} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, de (5.112) conclui-se que

$$t'_2 - t'_1 = \frac{c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) + v^2}{c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (t_2 - t_1), \quad (5.113)$$

pelo que

$$t'_2 - t'_1 = \gamma(t_2 - t_1), \quad (5.114)$$

tal como seria de esperar, uma vez que na teoria da relatividade restrita se verifica a dilatação do tempo para “objetos” em movimento. Por sua vez, se considerarmos que $i_1 = 0$ (sincronização absoluta), constatamos, de (5.111), que

$$t'_2 - t'_1 = \frac{1}{\gamma}(t_2 - t_1) \quad (5.115)$$

e, neste caso, obtém-se o efeito oposto. Tal como aconteceu para o espaço, verifica-se, também, que para o tempo o método de sincronização escolhido pode levar a resultados opostos. De facto, tal como diz Franco Selleri, todas as diferenças observáveis dependem da convenção adotada para a sincronização dos relógios e não têm base física objetiva.

5.6. Transformações inerciais

Vimos, aquando da dedução das transformações equivalentes (5.48), que a transformação do tempo depende do coeficiente de sincronização i_1 , sendo este parâmetro obtido por convenção, uma vez que o mesmo assume diferentes valores consoante o tipo de sincronização estabelecida ou considerada. Para a obtenção das transformações inerciais, vamos considerar que o processo de sincronização utilizado é o absoluto, consistindo na ideia de que todos os relógios em repouso no referencial inercial S' marcam $t' = 0$ quando lhes passa em frente um relógio em repouso em S marcando o tempo $t = 0$. Este método em si garante a sincronização de todos os relógios de S' . Atendendo a esta convenção, somos a levados a escrever na quarta equação de (5.48)

$$i_1(x - v \cdot 0) + \frac{1}{\gamma} \cdot 0 = 0 \Rightarrow i_1 = 0 \quad (5.116)$$

e, portanto, as transformações inerciais são-nos dadas por

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{1}{\gamma}t \end{cases} . \quad (5.117)$$

De acordo com Selleri (1996), de um modo geral, a velocidade da luz relativa ao referencial inercial S' , num percurso apenas de ida, com um ângulo ϕ face à velocidade absoluta v do referencial inercial S é dada por

$$c_1(\phi) = \frac{c}{1 + \left(\beta + i_1 c \frac{1}{\gamma} \right) \cos \phi}, \text{ com } \beta = \frac{v}{c}, \quad (5.118)$$

enquanto, obviamente, a velocidade de ida e volta será c em todas as direções. Se considerarmos o processo de sincronização absoluta (5.118) resume-se a

$$c_1(\phi) = \frac{c}{1 + \beta \cos \phi}. \quad (5.119)$$

Donde se conclui que

$$c_1(0) = \frac{c}{1 + \beta} < c \wedge c_1(\pi) = \frac{c}{1 - \beta} > c, \quad (5.120)$$

sendo, $c_1(0)$ a velocidade de um sinal luminoso a propagar-se na direção contrária à do referencial inercial S , do ponto de vista de um observador em S' , e $c_1(\pi)$ a velocidade de um sinal luminoso que se propaga na direção do referencial inercial S , para um observador que, também, se encontre no referencial inercial S' . Assim, de (5.120), pode-se afirmar que

$$\frac{c}{1 + \beta} \leq c_1(\phi) \leq \frac{c}{1 - \beta}. \quad (5.121)$$

A partir de (5.117), facilmente se conclui que as transformações inerciais inversas são dadas por

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\gamma} x' + \gamma v t' \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma t' \end{cases} . \quad (5.122)$$

De (5.120) constatámos que a origem do referencial inercial S é descrita em S' por $\left(-\frac{v}{1-\beta^2}t', 0, 0\right)$, pois atendendo a que $x = 0$ da primeira equação de (5.122) vem

$$\frac{1}{\gamma} x' + \gamma v t' = 0 \Leftrightarrow x' = -\gamma^2 v t' \Leftrightarrow x' = -\frac{v t'}{1-\beta^2} . \quad (5.123)$$

Assim, a origem de S , do ponto de vista de um observador imóvel em S' , é vista a mover-se com uma velocidade de módulo $\left|-\frac{v}{1-\beta^2}\right| = \frac{\beta c}{1-\beta^2}$ que pode ser maior do que c , pois do ponto de vista de S' um sinal luminoso a propagar-se na mesma direção de S , isto é segundo um ângulo de $\pi \text{ rad}$, terá uma velocidade, tendo por base (5.119), dada por

$$c_1(\pi) = \frac{c}{1-\beta} . \quad (5.124)$$

Atendendo a que

$$\frac{c\beta}{1-\beta^2} = \frac{c}{1-\beta} \left(\frac{\beta}{1+\beta} \right) \wedge \frac{\beta}{1+\beta} < 1, \quad (5.125)$$

conclui-se que a velocidade de deslocamento de S face a S' é sempre inferior à velocidade da luz dada por (5.124), uma vez que

$$c_1(\pi) = \frac{c}{1-\beta} > \frac{c\beta}{1-\beta^2} . \quad (5.126)$$

Assim sendo, apesar de podermos obter velocidades superiores a c , estas, por (5.126), nunca poderão ser superluminais, pois não são superiores à velocidade da luz no referencial em questão.

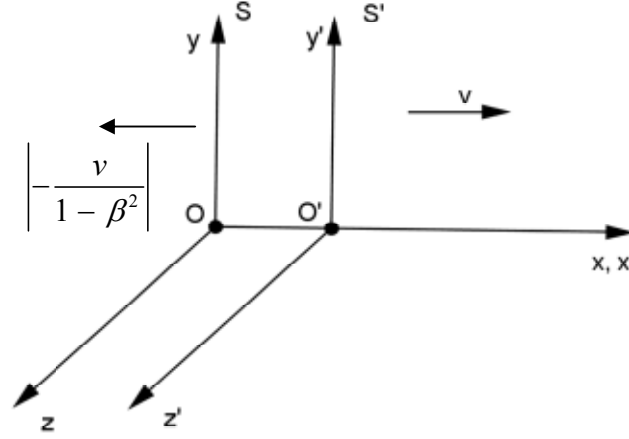


Figura 21: Referencial inerciais S e S' , sendo que S' desloca-se a uma velocidade constante e uniforme $v < c$ face a S e consequentemente, atendendo às transformações inerciais, S' vê S a deslocar-se face a si com uma velocidade uniforme e constante $\frac{c\beta}{1 - \beta^2}$, que pode ser superior a c .

Uma das consequências mais importante das transformações inerciais é que podemos ter velocidades relativas a referenciais em movimento a aumentarem indefinidamente, pois se $v \rightarrow c$, então $\beta \rightarrow 1^-$ e, consequentemente, $\frac{\beta c}{1 - \beta^2} \rightarrow +\infty$. Contudo as velocidades absolutas de objetos materiais não podem nunca superar c .

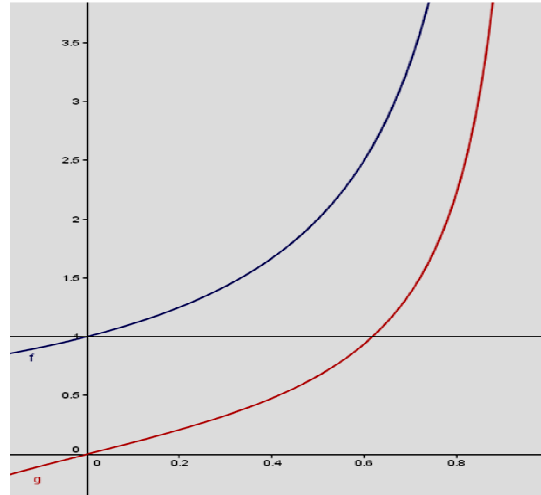


Figura 22: Representação gráfica das funções f e g , definidas por $f(x) = \frac{1}{1-x}$ e $g(x) = \frac{x}{1-x^2}$, que representam, respetivamente, a velocidade do raio de luz visto de S' e a velocidade do referencial S face a S' . Tal como deduzido anteriormente, vê-se que a velocidade de S face a S' , dada por g , pode ser superior a c (pois $c = 1$), mas que não é superluminal, pois nunca ultrapassa a velocidade do raio de luz dada por f .

Uma das diferenças visíveis no que diz respeito às transformações inerciais face às transformações de Lorentz, prende-se com o facto de as primeiras não permitirem a existência de um intervalo relativista de norma invariante, isto é, $c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 \neq c^2 \Delta t'^2 - \Delta x'^2$.

5.6.1. Espaço e tempo para corpos em movimento

Vejamos agora, tendo em conta as transformações inerciais, o que podemos concluir sobre o comprimento de objetos em movimento e sobre o tempo associado a objetos em movimento.

Tal como fizemos para as transformações equivalentes, vamos começar por supor que uma régua se encontra em repouso sobre o eixo $O'x'$, sendo os seus extremos dados por x'_1 e x'_2 , respetivamente. Suponhamos, também, que dois observadores em S marcam os extremos da régua sobre o eixo Ox , sendo estes dados por x_1 e x_2 num mesmo instante t . De (5.117) podemos escrever

$$x'_1 = \gamma(x_1 - vt) \wedge x'_2 = \gamma(x_2 - vt), \quad (5.127)$$

donde, por subtração se obtém

$$x_2 - x_1 = \frac{1}{\gamma}(x'_2 - x'_1) \quad (5.128)$$

e, portanto, concluímos que a régua em repouso em S' do ponto de vista de S parece ter contraído. Conclusão equivalente ao que acontece na relatividade restrita de Einstein.

Vejamos, por sua vez, o que acontece se considerarmos que a régua se encontra em repouso em S . Sejam, portanto, x_1 e x_2 as extremidades da régua marcadas sobre o eixo Ox . Suponhamos que dois observadores fixos em S' marcam os extremos da régua sobre o eixo $O'x'$ num mesmo tempo t' , sendo estes extremos dados, respetivamente, por x'_1 e x'_2 . De acordo com as transformações inerciais inversas constantes em (5.122) temos que

$$x_1 = \frac{1}{\gamma} x'_1 + \gamma v t' \wedge x_2 = \frac{1}{\gamma} x'_2 + \gamma v t', \quad (5.129)$$

donde se conclui que

$$x_2 - x_1 = \frac{1}{\gamma} x'_2 + \gamma v t' - \left(\frac{1}{\gamma} x'_1 + \gamma v t' \right) = \frac{1}{\gamma} (x'_2 - x'_1) \quad (5.130)$$

e, imediatamente, de (5.130) vem

$$x'_2 - x'_1 = \gamma (x_2 - x_1). \quad (5.131)$$

Em consequência de (5.131) conclui-se que, do ponto de vista de S' , a régua em repouso em S parece ter alongado. Em suma, constatamos que, tendo por base as transformações inerciais, uma régua em repouso em S' parece contraída observada de S e, por sua vez, uma régua em repouso em S parece alongada vista de S' . Tais conclusões vêm contrariar a teoria da relatividade restrita, onde a régua apresenta um comprimento máximo no seu referencial próprio. Os observadores quer estejam em S , quer estejam em S' observam que o movimento do referencial privilegiado provoca a diminuição do tamanho da régua e, portanto, o carácter relativo, como preconiza a teoria da relatividade restrita, perde significado.

Consideremos, agora, tal como fizemos para as transformações equivalentes, um relógio R' em repouso sobre o eixo das abcissas do referencial S' , sendo a sua abcissa dada por x'_R . Consideremos, ainda, dois observadores em repouso no eixo Ox do referencial S , representados pelas abcissas x_1 e x_2 , respetivamente, marcando os tempos t_1 e t_2 indicados pelos seus relógios quando o relógio R' lhes passa à frente, mostrando por sua vez o relógio R' , nestes instantes, os tempos x'_1 e x'_2 . Assim sendo, temos que

$$x_2 - x_1 = v(t_2 - t_1). \quad (5.132)$$

Para além disso, a partir da quarta equação das transformações inerciais dadas por (5.117) podemos escrever que

$$t'_1 = \frac{1}{\gamma} t_1 \wedge t'_2 = \frac{1}{\gamma} t_2 \quad (5.133)$$

pelo que

$$t'_2 - t'_1 = \frac{1}{\gamma}(t_2 - t_1) \quad (5.134)$$

e, conseqüentemente, de (5.134) vem

$$t_2 - t_1 = \gamma(t'_2 - t'_1). \quad (5.135)$$

Concluimos assim, que do ponto de vista de S , o relógio R' , em repouso em S' , parece atrasado. Por este motivo, podemos afirmar que um relógio que se move com uma velocidade uniforme e constante face ao referencial inercial privilegiado S sofre um atraso associado ao parâmetro γ , dependente de v , qualquer que seja a direção do seu movimento, uma vez que o espaço é isotrópico.

Vamos, agora, considerar um relógio R fixo sobre o eixo das abcissas do referencial inercial S , no ponto de abscissa x_R . Consideremos, também, dois observadores em repouso no referencial S' na posse, cada um deles, de um relógio e representados pelas abcissas x'_1 e x'_2 , controlando os instantes t'_1 e t'_2 que os seus relógios marcam quando o relógio R lhes passa em frente, marcando por sua vez os tempos t_1 e t_2 , de forma visível aos dois observadores. Obviamente, e tendo por base a primeira equação das transformações inerciais inversas dadas por (5.122), as posições ocupadas pelo relógio R , quando este está em frente aos dois observadores, são definidas por

$$x_R = \frac{1}{\gamma}x'_1 + \gamma vt'_1 \wedge x_R = \frac{1}{\gamma}x'_2 + \gamma vt'_2, \quad (5.136)$$

donde obtemos

$$\frac{1}{\gamma}x'_2 + \gamma vt'_2 - \left(\frac{1}{\gamma}x'_1 + \gamma vt'_1 \right) = 0 \quad (5.137)$$

e por simplificação de (5.137) vem

$$x'_2 - x'_1 = -v\gamma^2(t_2 - t_1). \quad (5.138)$$

A expressão anterior descreve-nos o movimento do relógio R , relativamente ao referencial inercial S' . Para além disso, e atentando à quarta equação das transformações inerciais inversas (5.22), temos que

$$t_1 = \gamma t'_1 \wedge t_2 = \gamma t'_2 \quad (5.139)$$

e assim

$$t_2 - t_1 = \gamma(t'_2 - t'_1) \quad (5.140)$$

e por consequência

$$t'_2 - t'_1 = \frac{1}{\gamma}(t_2 - t_1). \quad (5.141)$$

De (5.141) concluímos que um relógio em repouso no referencial inercial S é visto de S' adiantado. Atendendo às conclusões obtidas em (5.135) e (5.141), dois observadores, cada um em repouso no seu referencial inercial S ou S' , percebem que o movimento relativo do referencial inercial privilegiado faz com que o relógio se atrase, pelo que o fenómeno da dilatação do tempo (atraso dos relógios em movimento) perde o seu carácter relativo, tal como prevê a relatividade restrita, e passa a ser absoluto.

5.7. Dinâmica Alternativa

Tal como se fez para a relatividade restrita de Einstein, vamos a partir das transformações inerciais de Selleri verificar o que acontece para a transformação da velocidade, momento linear e energia e força, com o intuito de verificarmos se existem diferenças significativas ou, se pelo contrário, ambas as teoria nos levam às mesma conclusões. Para tal, consideremos, como até aqui, dois referenciais inerciais S e S' , de modo a que S' se desloque paralelamente ao eixo Ox do referencial S com velocidade constante e uniforme \vec{v} .

5.7.1. Transformação inercial das velocidades

Começemos por considerar que um determinado corpo se encontra em movimento com uma velocidade \vec{u} , de componentes u_x , u_y e u_z , relativamente ao referencial inercial S . Considerando que este mesmo corpo se desloca face a S' com uma velocidade \vec{u}' , de componentes u'_x , u'_y e u'_z e que S' , por sua vez, se desloca face a S com uma velocidade constante e uniforme \vec{v} , com $v_x = v$ e $v_y = v_z = 0$. Determinemos, então, \vec{u}' em função de \vec{u} .

De (5.117) concluímos que

$$\begin{cases} dx' = \gamma(dx - vdt) \\ dy' = dy \\ dz' = dz \\ dt' = \frac{1}{\gamma}dt \end{cases} \quad (5.142)$$

e atendendo à definição física de velocidade, vem

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma(dx - vdt)}{\frac{1}{\gamma}dt} = \gamma^2 \left(\frac{dx}{dt} - v \frac{dt}{dt} \right) = \gamma^2 (u_x - v) \quad (5.143)$$

$$u'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\frac{1}{\gamma}dt} = \gamma \frac{dy}{dt} = \gamma u_y \quad (5.144)$$

$$u'_z = \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{\frac{1}{\gamma}dt} = \gamma \frac{dz}{dt} = \gamma u_z. \quad (5.145)$$

Donde se conclui, a partir de (5.143), (5.144) e (5.145), que a lei da composição de velocidades, segundo as transformações inerciais, é-nos dada por

$$\begin{cases} u'_x = \gamma^2(u_x - v) \\ u'_y = \gamma u_y \\ u'_z = \gamma u_z \end{cases} . \quad (5.146)$$

Para determinarmos as transformações inversas das velocidades, resolvamos as equações dadas por (5.146) em ordem a u_x , u_y e u_z , respetivamente. Assim

$$u'_x = \gamma^2(u_x - v) \Leftrightarrow u_x = \frac{u'_x + \gamma^2 v}{\gamma^2} \Leftrightarrow u_x = \frac{u'_x}{\gamma^2} + v \quad (5.147)$$

$$u_y = \frac{u'_y}{\gamma} \quad (5.148)$$

$$u_z = \frac{u'_z}{\gamma}, \quad (5.149)$$

pelo que as transformações inversas das componentes da velocidade, aplicando as transformações inerciais, são-nos dadas por

$$\begin{cases} u_x = \frac{u'_x}{\gamma^2} + v \\ u_y = \frac{u'_y}{\gamma} \\ u_z = \frac{u'_z}{\gamma} \end{cases} . \quad (5.150)$$

5.7.2. Transformação inercial do momento e da energia

Podemos escrever a transformação inercial inversa das velocidades, obtida em (5.150), na sua forma vetorial por

$$\vec{u} = \frac{1}{\gamma} \vec{u}' + \vec{v} \left[1 + \left(\frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{\vec{u}' \cdot \vec{v}}{v^2} \right] \quad (5.151)$$

pois, se

$$\vec{u} = u_x \vec{e}_1 + u_y \vec{e}_2 + u_z \vec{e}_3 = \frac{1}{\gamma} \vec{u}' + \vec{v} \left[1 + \left(\frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{\vec{u}' \cdot \vec{v}}{v^2} \right] \quad (5.152)$$

com $\vec{v} = (v_x, 0, 0) = (v, 0, 0)$, então,

$$u_x = \frac{1}{\gamma} u'_x + v \left[1 + \left(\frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{u'_x v}{v^2} \right] = \frac{1}{\gamma} u'_x + v + \frac{1}{\gamma^2} u'_x - \frac{1}{\gamma} u'_x \quad (5.153)$$

e, portanto, de (5.153) concluímos que

$$u_x = \frac{1}{\gamma^2} u'_x + v. \quad (5.154)$$

Como o vetor velocidade \vec{v} tem a direção do eixo Ox , as suas componentes segundo as direções de Oy e Oz são nulas, pelo que é fácil constatar que de (5.151) se obtém

$$u_y = \frac{1}{\gamma} u'_y \quad \wedge \quad u_z = \frac{1}{\gamma} u'_z. \quad (5.155)$$

Com base em (5.151), iremos demonstrar que $1 - \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{c^2} = \frac{1}{\gamma^2} \left(1 - \frac{\vec{u}' \cdot \vec{v}}{c^2} \right)$ e que

$$\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = \frac{1}{\gamma} \sqrt{\left(1 - \frac{\vec{u}' \cdot \vec{v}}{c^2} \right)^2 - \frac{u'^2}{c^2}}. \text{ Temos}$$

$$1 - \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{c^2} = 1 - \frac{1}{c^2} (\vec{u} \cdot \vec{v}) \quad (5.156)$$

atendendo a (5.151) podemos escrever (5.156) na forma

$$\begin{aligned}
& 1 - \frac{1}{c^2} (\vec{u} \cdot \vec{v}) \\
&= 1 - \frac{\vec{v}}{c^2} \cdot \left\{ \frac{1}{\gamma} \vec{u}' + \vec{v} \left[1 + \left(\frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{\vec{u}' \cdot \vec{v}}{v^2} \right] \right\} \\
&= 1 - \frac{1}{\gamma} \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}'}{c^2} - \frac{v^2}{c^2} - \frac{v^2}{c^2} \left(\frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{\vec{u}' \cdot \vec{v}}{v^2} \\
&= 1 - \frac{v^2}{c^2} - \frac{1}{\gamma^2} \frac{\vec{u}' \cdot \vec{v}}{c^2} \\
&= \frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{\gamma^2} \frac{\vec{u}' \cdot \vec{v}}{c^2} \\
&= \frac{1}{\gamma^2} \left(1 - \frac{\vec{u}' \cdot \vec{v}}{c^2} \right) \tag{5.157}
\end{aligned}$$

pois $\frac{1}{\gamma^2} = 1 - \frac{v^2}{c^2}$. Assim concluímos de (5.156) e (5.157) que

$$1 - \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{c^2} = \frac{1}{\gamma^2} \left(1 - \frac{\vec{u}' \cdot \vec{v}}{c^2} \right). \tag{5.158}$$

Por outro lado, a partir de (5.151), vem

$$u^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = \left\{ \frac{1}{\gamma} \vec{u}' + \vec{v} \left[1 + \left(\frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{\vec{u}' \cdot \vec{v}}{v^2} \right] \right\}^2 \tag{5.159}$$

e, consequentemente, tendo em conta processos algébricos, podemos escrever

$$\begin{aligned}
u^2 &= \frac{1}{\gamma^2} u'^2 + \frac{2}{\gamma} (\vec{u}' \cdot \vec{v}) \left[\left[1 + \left(\frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{\vec{u}' \cdot \vec{v}}{v^2} \right] \right] + v^2 \left[1 + \left(\frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{\vec{u}' \cdot \vec{v}}{v^2} \right]^2 \\
&= \frac{1}{\gamma^2} u'^2 + \frac{2}{\gamma} (\vec{u}' \cdot \vec{v}) + \frac{2}{\gamma} (\vec{u}' \cdot \vec{v}) \left(\frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{\vec{u}' \cdot \vec{v}}{v^2} + v^2 \left[1 + 2 \left(\frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{\vec{u}' \cdot \vec{v}}{v^2} + \left(\frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{\gamma} \right)^2 \frac{(\vec{u}' \cdot \vec{v})^2}{v^4} \right] \\
&= \frac{1}{\gamma^2} u'^2 + \frac{2}{\gamma} (\vec{u}' \cdot \vec{v}) + \frac{2}{v^2 \gamma} \left(\frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{\gamma} \right) (\vec{u}' \cdot \vec{v})^2 + v^2 + 2 \left(\frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{\gamma} \right) \vec{u}' \cdot \vec{v} + \left(\frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{\gamma} \right)^2 \frac{(\vec{u}' \cdot \vec{v})^2}{v^2} \\
&= \frac{1}{\gamma^2} u'^2 + \left(\frac{2}{\gamma} + \frac{2}{\gamma^2} - \frac{2}{\gamma} \right) (\vec{u}' \cdot \vec{v}) + \left[\frac{2}{\gamma} \left(\frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{\gamma} \right) + \left(\frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{\gamma} \right)^2 \right] \frac{(\vec{u}' \cdot \vec{v})^2}{v^2} + v^2
\end{aligned} \tag{5.160}$$

Para além disso,

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\gamma} \left(\frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{\gamma} \right) + \left(\frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{\gamma} \right)^2 &= \left(\frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{\gamma} \right) \left(\frac{2}{\gamma} + \frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{\gamma} \right) \\
&= \left(\frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{\gamma} \right) \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma^2} \right) = \frac{1}{\gamma^2} \left(\frac{1}{\gamma^2} - 1 \right) = -\frac{1}{\gamma^2} \frac{v^2}{c^2}
\end{aligned} \tag{5.161}$$

Substituindo (5.161) em (5.160) obtemos

$$\begin{aligned}
u^2 &= \frac{1}{\gamma^2} u'^2 + \frac{2}{\gamma^2} (\vec{u}' \cdot \vec{v}) - \frac{v^2}{c^2} \frac{1}{\gamma^2} \frac{(\vec{u}' \cdot \vec{v})^2}{v^2} + v^2 \\
&= \frac{1}{\gamma^2} \left[u'^2 + 2 (\vec{u}' \cdot \vec{v}) - \frac{(\vec{u}' \cdot \vec{v})^2}{c^2} \right] + v^2 \\
&= \frac{1}{\gamma^2} \left\{ u'^2 + c^2 - \left[c^2 - 2 (\vec{u}' \cdot \vec{v}) + \frac{(\vec{u}' \cdot \vec{v})^2}{c^2} \right] \right\} + v^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\gamma^2} \left\{ u'^2 + c^2 - \left[c - \frac{(\vec{u}' \cdot \vec{v})}{c} \right]^2 \right\} + v^2 \\
&= \frac{1}{\gamma^2} \left[u'^2 + c^2 - c^2 \left(1 - \frac{\vec{u}' \cdot \vec{v}}{c^2} \right)^2 \right] + v^2
\end{aligned} \tag{5.162}$$

Como consequência da igualdade obtida em (5.162), deduzimos que

$$\begin{aligned}
1 - \frac{u^2}{c^2} &= 1 - \frac{1}{\gamma^2} \left[\frac{u'^2}{c^2} + 1 - \left(1 - \frac{\vec{u}' \cdot \vec{v}}{c^2} \right)^2 \right] - \frac{v^2}{c^2} \\
&= 1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{1}{\gamma^2} \left[\left(1 - \frac{\vec{u}' \cdot \vec{v}}{c^2} \right)^2 - \frac{u'^2}{c^2} - 1 \right] \\
&= \frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{\gamma^2} \left[\left(1 - \frac{\vec{u}' \cdot \vec{v}}{c^2} \right)^2 - \frac{u'^2}{c^2} \right] - \frac{1}{\gamma^2}
\end{aligned} \tag{5.163}$$

e, portanto, de (5.163) podemos concluir que

$$\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = \frac{1}{\gamma} \sqrt{\left(1 - \frac{\vec{u}' \cdot \vec{v}}{c^2} \right)^2 - \frac{u'^2}{c^2}} \tag{5.164}$$

Consideremos a segunda e terceira equações de (5.150) e multipliquemos ambos os seus membros por m , massa do corpo no referencial inercial privilegiado S , e divida-se, de seguida, ambos os membros por $\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$, assim obtemos

$$\frac{mu_y}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{1}{\gamma} \frac{mu'_y}{\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}}} \wedge \frac{mu_z}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{1}{\gamma} \frac{mu'_z}{\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}}} \tag{5.165}$$

Por outro lado, temos que, no que diz respeito ao referencial inercial privilegiado S , e sendo m a massa em repouso de uma determinada partícula e \vec{u} a sua velocidade, torna-se conveniente definir a massa de um corpo em movimento por

$$m(u) = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad (5.166)$$

consequentemente,

$$\vec{p} = m(u)\vec{u} \quad (5.167)$$

e, ainda,

$$E = m(u)c^2. \quad (5.168)$$

Do mesmo modo, sendo \vec{u}' a velocidade da mesma partícula relativamente ao referencial S' , temos que

$$m(u') = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}}}. \quad (5.169)$$

Sabemos, também, a partir de (5.164) que

$$\frac{1}{\gamma\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \left[\left(1 - \frac{\vec{u}' \cdot \vec{v}}{c^2} \right)^2 - \frac{u'^2}{c^2} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (5.170)$$

e, substituindo (5.170) em (5.165), vem

$$\begin{aligned} \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} u_y &= \frac{mu'_y}{\sqrt{\left(1 - \frac{\vec{u}' \cdot \vec{v}}{c^2} \right)^2 - \frac{u'^2}{c^2}}}, \\ \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} u_z &= \frac{mu'_z}{\sqrt{\left(1 - \frac{\vec{u}' \cdot \vec{v}}{c^2} \right)^2 - \frac{u'^2}{c^2}}}, \end{aligned} \quad (5.171)$$

ou seja,

$$m(u) u_y = \frac{mu'_y}{\sqrt{\left(1 - \frac{\vec{u}' \cdot \vec{v}}{c^2}\right)^2 - \frac{u'^2}{c^2}}} \wedge m(u) u_z = \frac{mu'_z}{\sqrt{\left(1 - \frac{\vec{u}' \cdot \vec{v}}{c^2}\right)^2 - \frac{u'^2}{c^2}}} \quad (4.172)$$

e, portanto,

$$p_y = p'_y \wedge p_z = p'_z, \quad (5.173)$$

pois,

$$p'_y = \frac{m}{\sqrt{\left(1 - \frac{\vec{u}' \cdot \vec{v}}{c^2}\right)^2 - \frac{u'^2}{c^2}}} u'_y \wedge p'_z = \frac{m}{\sqrt{\left(1 - \frac{\vec{u}' \cdot \vec{v}}{c^2}\right)^2 - \frac{u'^2}{c^2}}} u'_z. \quad (5.174)$$

Procedendo do mesmo modo com a primeira equação de (5.150), obtemos

$$\frac{m}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} u_x = \frac{1}{\gamma^2} \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} u'_x + \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} v, \quad (5.175)$$

donde, tendo por base (5.166) e (5.170), vem

$$m(u) u_x = \frac{1}{\gamma} \left[\left(1 - \frac{\vec{u}' \cdot \vec{v}}{c^2} \right)^2 - \frac{u'^2}{c^2} \right]^{-\frac{1}{2}} mu'_x + \frac{v}{c^2} \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad (5.176)$$

e, consequentemente, colocando em (5.176) $\frac{1}{\gamma}$ em evidência, temos

$$m(u) u_x = \frac{1}{\gamma} \left\{ \frac{mu'_x}{\left[\left(1 - \frac{\vec{u}' \cdot \vec{v}}{c^2} \right)^2 - \frac{u'^2}{c^2} \right]^{\frac{1}{2}}} + \frac{\gamma^2 v}{c^2} \frac{1}{\gamma} \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \right\}. \quad (5.177)$$

Por outro lado, por definição

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \wedge \frac{mc^2}{\gamma \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{mc^2}{\left[\left(1 - \frac{\vec{u}' \cdot \vec{v}}{c^2} \right)^2 - \frac{u'^2}{c^2} \right]^{\frac{1}{2}}} = E', \quad (5.178)$$

assim, podemos escrever (5.177) na forma

$$p_x = \frac{1}{\gamma} \left\{ \frac{mu'_x}{\left[\left(1 - \frac{\vec{u}' \cdot \vec{v}}{c^2} \right)^2 - \frac{u'^2}{c^2} \right]^{\frac{1}{2}}} + \frac{\gamma^2 v}{c^2} E' \right\} \quad (5.179)$$

e, atendendo a que por definição

$$p'_x = \frac{mu'_x}{\left[\left(1 - \frac{\vec{u}' \cdot \vec{v}}{c^2} \right)^2 - \frac{u'^2}{c^2} \right]^{\frac{1}{2}}}, \quad (5.180)$$

obtemos, de (5.179) que

$$p_x = \frac{1}{\gamma} \left(p'_x + \gamma^2 \frac{v}{c^2} E' \right). \quad (5.181)$$

Por outro lado, a partir de (5.178), concluímos que

$$\frac{1}{\gamma} E = E' \Leftrightarrow E = \gamma E'. \quad (5.182)$$

Em suma, conclui-se a partir de (5.173), (5.181) e (5.182) que

$$\begin{cases} p_x = \frac{1}{\gamma} \left(p'_x + \gamma^2 \frac{v}{c^2} E' \right) \\ p_y = p'_y \\ p_z = p'_z \\ E = \gamma E' \end{cases}. \quad (5.183)$$

e, resolvendo as equações anteriores em ordem às grandezas medidas no referencial em movimento, S' , vem

$$\begin{cases} p'_x = \gamma \left(p_x - \frac{v}{c^2} E \right) \\ p'_y = p_y \\ p'_z = p_z \\ E' = \frac{1}{\gamma} E \end{cases}, \quad (5.184)$$

que devem ser comparadas com (3.100), página 55.

5.7.3. Transformação inercial da força

Atendendo a que $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ e a que $\frac{dE}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{u}$, obviamente, e considerando a transformação inercial do momento e energia, a componente vetorial da força segundo a direção do eixo Ox , F_x , na passagem de S para S' , é-nos dada por

$$\begin{aligned} F'_x &= \frac{dp'_x}{dt'} = \frac{d \left[\gamma \left(p_x - \frac{v}{c^2} E \right) \right]}{d \left(\frac{1}{\gamma} t \right)} = \gamma^2 \left(\frac{dp_x}{dt} - \frac{v}{c^2} \frac{dE}{dt} \right) \\ &= \gamma^2 \left[F_x - \frac{v}{c^2} (\vec{F} \cdot \vec{u}) \right] \end{aligned} \quad (5.185)$$

por sua vez, as componentes F_y e F_z do vetor força são-nos dadas, respetivamente, por

$$F'_y = \frac{dp'_y}{dt'} = \frac{dp_y}{\frac{1}{\gamma} dt} = \gamma \frac{dp_y}{dt} = \gamma F_y \quad (5.186)$$

e, de forma análoga, por

$$F'_z = \gamma F_z. \quad (5.187)$$

Por outro lado, tendo em conta a transformação inercial inversa da energia e a transformação inercial inversa do tempo, temos que

$$\overline{F} \cdot \overline{u} = \frac{dE}{dt} = \frac{d(\gamma E')}{d(\gamma t')} = \frac{dE'}{dt'} = \overline{F'} \cdot \overline{u'} \quad (5.188)$$

e, portanto, considerando o resultado de (5.188) e resolvendo as equações (5.185), (5.186) e (5.187) em ordem a F_x , F_y e F_z , respetivamente, é fácil constatar que a transformação inercial inversa das componentes do vetor força é-nos dada por

$$F_x = \frac{F'_x}{\gamma^2} + \frac{v}{c^2} (\overline{F'} \cdot \overline{u'}) \quad (5.189)$$

$$F_y = \frac{1}{\gamma} F'_y \quad (5.190)$$

$$F_z = \frac{1}{\gamma} F'_z. \quad (5.191)$$

O quadro abaixo apresenta-nos, de uma forma sintetizada, as transformações das grandezas da mecânica alternativa com base nas transformações inerciais e deve ser comparado com o quadro, correspondente, relativo às conclusões da relatividade restrita (figura 15).

Grandezas	Transformações	
	S para S'	S' para S
Coordenadas	$x' = \gamma(x - vt)$ $y' = y$ $z' = z$ $t' = \frac{1}{\gamma}t$	$x = \frac{1}{\gamma}x' + \gamma vt'$ $y = y'$ $z = z'$ $t = \gamma t'$

Velocidade	$u'_x = \gamma^2(u_x - v)$ $u'_y = \gamma u_y$ $u'_z = \gamma u_z$	$u_x = \frac{u'_x}{\gamma^2} + v$ $u_y = \frac{u'_y}{\gamma}$ $u_z = \frac{u'_z}{\gamma}$
Momento e energia	$p'_x = \gamma\left(p_x - \frac{v}{c^2}E\right)$ $p'_y = p_y$ $p'_z = p_z$ $E' = \frac{1}{\gamma}E$	$p_x = \frac{1}{\gamma}\left(p'_x + \gamma^2 \frac{v}{c^2}E'\right)$ $p_y = p'_y$ $p_z = p'_z$ $E = \gamma E'$
Força	$F'_x = \gamma^2\left[F_x - \frac{v}{c^2}(\vec{F} \cdot \vec{u})\right]$ $F'_y = \gamma F_y$ $F'_z = \gamma F_z$	$F_x = \frac{F'_x}{\gamma^2} + \frac{v}{c^2}(\vec{F}' \cdot \vec{u}')$ $F_y = \frac{1}{\gamma}F'_y$ $F_z = \frac{1}{\gamma}F'_z$

Figura 23: Transformações das grandezas da Mecânica, relativamente, às transformações inerciais.

6. Eletromagnetismo na “relatividade fraca”

Neste capítulo, iremos deduzir as transformações inerciais diretas e inversas dos campos elétrico e magnético e apresentar as equações de Maxwell para o referencial S' , tendo por base os trabalhos de Puccini (2003) e Buonaura (2004).

6.1. Transformação inercial dos campos

Como dito anteriormente, em S assume-se que a força de Lorentz é-nos dada por

$$\vec{F} = q \left[\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B} \right]. \quad (6.1)$$

Atendendo a (5.189) e tendo por base (6.1), podemos concluir que

$$\frac{F'_x}{\gamma^2} + \frac{v}{c^2} (\vec{F}' \cdot \vec{u}') = q \left[E_x + u_y B_z - u_z B_y \right]. \quad (6.2)$$

Resolvendo (6.2) em ordem a F'_x e considerando (5.188) obtemos

$$F'_x = q \gamma^2 \left[E_x + u_y B_z - u_z B_y - \frac{v}{qc^2} (\vec{F} \cdot \vec{u}) \right]. \quad (6.3)$$

De forma análoga, concluímos que

$$F'_y = \gamma q (E_y + u_z B_x - u_x B_z) \quad (6.4)$$

e

$$F'_z = \gamma q (E_z + u_x B_y - u_y B_x). \quad (6.5)$$

Para além do descrito anteriormente, de (6.1) podemos concluir também que

$$\vec{F} \cdot \vec{u} = q \vec{E} \cdot \vec{u}, \quad (6.6)$$

pois $(\vec{u} \times \vec{B}) \cdot \vec{u} = 0$, uma vez que os três vetores envolvidos no produto misto anterior são coplanares, como já vimos. Assim, podemos reescrever (6.3), tendo em conta o resultado de (6.6), na forma

$$F'_x = q\gamma^2 \left[E_x + u_y B_z - u_z B_y - \frac{qv}{c^2} (E_x u_x + E_y u_y + E_z u_z) \right] \quad (6.7)$$

e, conseqüentemente, procedendo a algumas simplificações e colocando em evidência os fatores comuns, podemos concluir a partir de (6.7) que

$$F'_x = q\gamma^2 \left[E_x \left(1 - \frac{v}{c^2} u_x \right) + u_y \left(B_z - \frac{v}{c^2} E_y \right) - u_z \left(B_y + \frac{v}{c^2} E_z \right) \right]. \quad (6.8)$$

Substituindo em (6.8) u_x , u_y e u_z pelas suas transformações inerciais inversas dadas por (5.150) segue que

$$\begin{aligned} F'_x &= q\gamma^2 \left\{ E_x \left[1 - \frac{v}{c^2} \left(\frac{u'_x}{\gamma^2} + v \right) \right] + \frac{u'_y}{\gamma} \left(B_z - \frac{v}{c^2} E_y \right) - \frac{u'_z}{\gamma} \left(B_y + \frac{v}{c^2} E_z \right) \right\} \\ &= q\gamma^2 E_x - q \frac{v}{c^2} E_x u'_x - q\gamma^2 \frac{v^2}{c^2} E_x + q\gamma u'_y B_z - q\gamma \frac{v}{c^2} u'_y E_y - q\gamma u'_z B_y - q\gamma \frac{v}{c^2} u'_z E_z \end{aligned} \quad (6.9)$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} F'_x &= qE_x \left(\gamma^2 - \frac{v}{c^2} u'_x - \gamma^2 \frac{v^2}{c^2} \right) + q\gamma u'_y \left(B_z - \frac{v}{c^2} E_y \right) - q\gamma u'_z \left(B_y + \frac{v}{c^2} E_z \right) \\ &= q \left\{ E_x \left[\gamma^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) - \frac{v}{c^2} u'_x \right] + \gamma u'_y \left(B_z - \frac{v}{c^2} E_y \right) - \gamma u'_z \left(B_y + \frac{v}{c^2} E_z \right) \right\}. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Atendendo a que $1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{\gamma^2}$, podemos reescrever (6.10) na forma

$$F'_x = q \left[E_x \left(1 - \frac{v}{c^2} u'_x \right) + u'_y \gamma \left(B_z - \frac{v}{c^2} E_y \right) - u'_z \gamma \left(B_y + \frac{v}{c^2} E_z \right) \right]. \quad (6.11)$$

Se considerarmos que uma partícula de carga q , pertencente ao referencial inercial S' , se encontra numa posição estática e, portanto, com $\vec{u}' = \vec{0}$, concluímos de (6.11) que

$$F'_x = qE_x. \quad (6.12)$$

Por sua vez, se considerarmos que a mesma partícula se encontra em repouso no seu referencial próprio S' , sabemos que a força de Lorentz por ela sofrida dependerá apenas do campo elétrico em que está inserida e, conseqüentemente,

$$F'_x = qE'_x. \quad (6.13)$$

Logo de (6.12) e (6.13), somos levados a admitir que

$$E'_x = E_x. \quad (6.14)$$

Para além do descrito anteriormente, e para que a componente magnética da força de Lorentz se mantenha invariante, concluímos a partir de (6.11) que

$$B'_z = \gamma \left(B_z - \frac{v}{c^2} E_y \right) \wedge B'_y = \gamma \left(B_y + \frac{v}{c^2} E_z \right) \quad (6.15)$$

e, portanto, podemos reescrever (6.11), tendo em conta (6.14) e (6.15), na forma

$$F'_x = q \left(1 - \frac{v}{c^2} u'_y \right) E'_x + q (u'_y B'_z - u'_z B'_y), \quad (6.16)$$

o que nos mostra que no sistema não privilegiado S' , a força de Lorentz apresenta uma forma mais complexa do que seria à partida esperado, uma vez que a sua componente elétrica, também, depende da velocidade da partícula.

As restantes componentes da força, F'_y e F'_z , do ponto de vista de S' , são obtidas considerando as transformações inerciais inversas das componentes da velocidade, u_x e u_z , dadas por (5.150). Assim, substituindo-as em (6.4) concluímos que

$$F'_y = \gamma q \left(E_y + \frac{1}{\gamma} u'_z B_x - \frac{1}{\gamma^2} u'_x B_z - v B_z \right) \quad (6.17)$$

e, por processos elementares de cálculo podemos reescrever (6.17) na forma

$$F'_y = q \left[\gamma (E_y - v B_z) \right] + q \left(u'_z B_x - \frac{1}{\gamma} u'_x B_z \right). \quad (6.18)$$

Da mesma forma se conclui que

$$F'_z = q \left[\gamma (E_z + v B_y) \right] + q \left(\frac{1}{\gamma} u'_x B_y - u'_y B_x \right). \quad (6.19)$$

Considerando, tal como se fez para a componente segundo a direção de $O'x'$, que a partícula de carga q se encontra estática em S' , somos levados a admitir, a partir de (6.18) e (6.19), que

$$F'_y = qE'_y \quad \wedge \quad F'_z = qE'_z \quad (6.20)$$

e, portanto,

$$E'_y = \gamma (E_y - v B_z) \quad \wedge \quad E'_z = \gamma (E_z + v B_y). \quad (6.21)$$

De (6.20) e (6.21), podemos reescrever (6.18) e (6.19), respetivamente, na forma

$$F'_y = qE'_y + q \left(u'_z B_x - \frac{1}{\gamma} u'_x B_z \right) \quad (6.22)$$

e

$$F'_z = qE'_z + q \left(\frac{1}{\gamma} u'_x B_y - u'_y B_x \right). \quad (6.23)$$

Para cada uma das componentes dos campos elétrico e magnético dadas por (6.15) e (6.21), podemos obter as respetivas componentes inversas, para tal basta resolver cada uma destas equações em ordem às componentes referentes ao referencial inercial S e fazer as substituições convenientes. Assim

$$\frac{B'_z}{\gamma} = B_z - \frac{v}{c^2} E_y \quad \Leftrightarrow \quad B_z = \frac{B'_z}{\gamma} + \frac{v}{c^2} E_y, \quad (6.24)$$

mas por outro lado, de (6.21),

$$E'_y = \gamma (E_y - v B_z) \quad \Leftrightarrow \quad E_y = \frac{E'_y}{\gamma} + v B_z \quad (6.25)$$

e substituindo (6.25) em (6.24) obtemos

$$\begin{aligned}
 B_z &= \frac{B'_z}{\gamma} + \frac{v}{c^2} \left(\frac{E'_y}{\gamma} + v B'_z \right) \\
 \Leftrightarrow B_z - \frac{v^2}{c^2} B_z &= \frac{1}{\gamma} \left(B'_z + \frac{v}{c^2} E'_y \right) \\
 \Leftrightarrow \frac{1}{\gamma^2} B_z &= \frac{1}{\gamma} \left(B'_z + \frac{v}{c^2} E'_y \right) \\
 \Leftrightarrow B_z &= \gamma \left(B'_z + \frac{v}{c^2} E'_y \right)
 \end{aligned} \tag{6.26}$$

Do mesmo modo,

$$B'_y = \gamma \left(B_y + \frac{v}{c^2} E_z \right) \Leftrightarrow B_y = \frac{B'_y}{\gamma} - \frac{v}{c^2} E_z \tag{6.27}$$

e

$$E'_z = \gamma (E_z + v B_y) \Leftrightarrow E_z = \frac{E'_z}{\gamma} - v B_y, \tag{6.28}$$

logo, substituindo (6.28) em (6.27), vem

$$\begin{aligned}
 B_y &= \frac{B'_y}{\gamma} - \frac{v}{c^2} \left(\frac{E'_z}{\gamma} - v B_y \right) \\
 \Leftrightarrow B_y - \frac{v^2}{c^2} B_y &= \frac{1}{\gamma} \left(B'_y - \frac{v}{c^2} E'_z \right) \\
 \Leftrightarrow \frac{1}{\gamma^2} B_y &= \frac{1}{\gamma} \left(B'_y - \frac{v}{c^2} E'_z \right) \\
 \Leftrightarrow B_y &= \gamma \left(B'_y - \frac{v}{c^2} E'_z \right)
 \end{aligned} \tag{6.29}$$

Por outro lado, substituindo em (6.25) a condição dada por (6.26) vem, após alguns cálculos elementares, que

$$E_y = \gamma \left[E'_y \left(\frac{1}{\gamma^2} + \frac{v^2}{c^2} \right) + v B'_z \right]. \tag{6.30}$$

Mas, atendendo a que $\frac{1}{\gamma^2} = 1 - \frac{v^2}{c^2}$, de (6.30) segue que

$$E_y = \gamma(E'_y + vB'_z). \quad (6.31)$$

Do mesmo modo se conclui que

$$E_z = \gamma(E'_z - vB'_y). \quad (6.32)$$

Por sua vez, substituindo em (6.22) a condição deduzida em (6.26), vem

$$F'_y = qE'_y + q\left[u'_z B_x - \frac{1}{\gamma}u'_x \gamma\left(B'_z + \frac{v}{c^2}E'_y\right)\right] \quad (6.33)$$

e, por sua vez,

$$F'_y = q\left(1 - \frac{v}{c^2}u'_x\right)E'_y + q(u'_z B_x - u'_x B'_z). \quad (6.34)$$

De modo análogo, substituindo em (6.23) a expressão dada por (6.29) obtemos

$$F'_z = q\left(1 - \frac{v}{c^2}u'_x\right)E'_z + q(u'_x B'_y - u'_y B_x). \quad (6.35)$$

A estrutura apresentada por (6.34) e (6.35) por comparação com (6.16) sugere-nos que devemos ter

$$B_x = B'_x. \quad (6.36)$$

De tudo o que foi dito e demonstrado anteriormente, temos que as transformações inerciais direta e inversa dos campos elétrico e magnético são-nos dadas, respetivamente, por

$$\left\{ \begin{array}{l} E'_x = E_x \\ E'_y = \gamma(E_y - vB_z) \\ E'_z = \gamma(E_z + vB_y) \\ B'_x = B_x \\ B'_y = \gamma\left(B_y + \frac{v}{c^2}E_z\right) \\ B'_z = \gamma\left(B_z - \frac{v}{c^2}E_y\right) \end{array} \right. . \quad (6.37)$$

e

$$\left\{ \begin{array}{l} E_x = E'_x \\ E_y = \gamma(E'_y + vB'_z) \\ E_z = \gamma(E'_z - vB'_y) \\ B_x = B'_x \\ B_y = \gamma\left(B'_y - \frac{v}{c^2}E'_z\right) \\ B_z = \gamma\left(B'_z + \frac{v}{c^2}E'_y\right) \end{array} \right. . \quad (6.38)$$

Como se poderá verificar, apesar das diferenças entre as transformações das coordenadas espaciais e temporal entre a relatividade restrita e a “relatividade fraca”, o resultado final para as transformações dos campos resultou ser o mesmo (ver páginas 80 e 81). Tal circunstância poder-se-á aceitar, mais facilmente, considerando sistemas eletromagnéticos simples e criadores de campos. No entanto, esse tipo de argumento sai fora do propósito desta dissertação.

6.2. Equações de Maxwell e as transformações inerciais

As equações de Maxwell no referencial privilegiado S são-nos dadas por

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (6.39)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (6.40)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (6.41)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (6.42)$$

sendo a simbologia apresentada a mesma que se apresentou no capítulo do eletromagnetismo relativista.

A partir das transformações inerciais dadas por (5.117), deduzimos que

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} = \gamma \frac{\partial}{\partial x'} \quad (6.43)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y'} \quad (6.44)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z'} \quad (6.45)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial x'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t'} = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial t'} - \gamma v \frac{\partial}{\partial x'}. \quad (6.46)$$

Para além disso, e tendo por base os trabalhos de Buonauro (2004) e Puccini (2003), constata-se que o operador ∇ (nabla), referente ao referencial inercial S , se transforma a partir de ∇' , referente ao referencial inercial S' , por

$$\nabla = \nabla' + (\gamma - 1) \frac{\vec{v}}{v^2} \cdot \nabla' \quad (6.47)$$

e que

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial t'} - \gamma \vec{v} \cdot \nabla'. \quad (6.48)$$

Ainda tendo por base os estudos efetuados pelos autores acima citados, temos que as transformações inversas dos campos são-nos dadas na sua forma vetorial, tendo em

consideração (6.47), (6.48) e as transformações inversas das componentes dos campos dadas por (6.38), por

$$\vec{E} = \gamma(\vec{E}' - \vec{v} \times \vec{B}') - (\gamma - 1) \frac{\vec{v} \cdot \vec{E}'}{v^2} \vec{v} \quad (6.49)$$

$$\vec{B} = \gamma(\vec{B}' + \vec{v} \times \vec{E}') - (\gamma - 1) \frac{\vec{v} \cdot \vec{B}'}{v^2} \vec{v}$$

e, tendo em conta (6.49), definamos os campos \vec{E}^* e \vec{B}^* da forma

$$\vec{E}^* = \vec{E}' - \vec{v} \times \vec{B}' \quad \wedge \quad \vec{B}^* = \vec{B}' + \vec{v} \times \vec{E}'. \quad (6.50)$$

Consequentemente, vem

$$\nabla \cdot \vec{E}^* = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (6.51)$$

$$\nabla \times \vec{E}' = -\frac{\partial \vec{B}^*}{\partial t} \quad (6.52)$$

$$\nabla \cdot \vec{B}^* = 0 \quad (6.53)$$

$$\nabla \times \vec{B}' = \mu_0 \vec{J}' + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}^*}{\partial t}, \quad (6.54)$$

à semelhança (mas não igualdade) das equações de Maxwell, e onde

$$\begin{cases} J'_x = \gamma(J_x - v\rho) \\ J'_y = J_y \\ J'_z = J_z \\ \rho' = \frac{1}{\gamma}\rho \end{cases}, \quad (6.55)$$

que, também, devem ser comparadas com as mesmas transformações face às transformações de Lorentz.

Todas as conclusões apresentadas neste subcapítulo 6.2 foram obtidas por Puccini (2003) e Buonauro (2004) e estão demonstradas em [24] e [3]. Contudo, tais deduções, embora pareçam matematicamente corretas, parecem-nos algo forçadas e parecem carecer, também, de confirmação experimental.

7. Alguns aspetos particulares das diferenças entre a relatividade restrita e a relatividade fraca

“É impossível meditar no tempo e no mistério do processo criativo da natureza sem se ter uma emoção esmagadora sobre as limitações da inteligência humana”

Alfred Whitehead

7.1. Sinais superluminais

A Teoria da Relatividade Restrita fundamenta-se nos seus dois postulados, sendo um deles a constância da velocidade da luz, no vácuo, em todos os referenciais de inércia. Para além disso, o eletromagnetismo diz-nos que a sua velocidade de propagação no vácuo é finita e igual a $c = 2,997925 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}$, sendo este valor o limite superior para a velocidade de propagação de qualquer sinal.

Desenvolvimentos recentes vieram mostrar a possibilidade de existência de sinais superluminais, isto é, a existência de sinais com velocidade de propagação superior à velocidade da luz no vácuo. Estes desenvolvimentos fizeram-se por via teórica e experimental. Do ponto de vista teórico, demonstrou-se que existem soluções para as equações de Maxwell que descrevem ondas eletromagnéticas que se propagam com velocidades superiores a c . Do ponto de vista experimental foram observados sinais com velocidade de propagação superiores a c no domínio da Astrofísica, do efeito de túnel para fótons, impulsos de micro-ondas e em determinado tipo de ondas eletromagnéticas. Apesar da existência de tais evidências ainda falta aprofundar e clarificar toda a situação.

A possibilidade da existência de sinais superluminais vem, do ponto de vista da *Teoria da Relatividade Restrita*, permitir a possibilidade de modificação do passado, problema do paradoxo causal. Ou seja, seria possível modificar o presente de um acontecimento indo ao seu passado.

De uma forma simples, o paradoxo causal, pode ser explicado da seguinte forma. Consideremos dois amigos chegados, A e B, sendo que B parte numa nave espacial em direção a um planeta distante (fora do nosso Sistema Solar, por exemplo) com uma velocidade constante e uniforme inferior a c e o amigo A fica na Terra a monitorizar a viagem. A determinada altura da viagem, o amigo viajante, da sua posição B_1 , faz uma pergunta ao amigo que se encontra na Terra, enviando um sinal superluminal, sendo este recebido em A_1 pelo amigo que ficou na Terra a controlar a viagem. O amigo A, por sua vez, espera um determinado tempo Δt e responde ao amigo com outro sinal superluminal, da sua posição A_2 . O amigo B recebe o sinal na sua posição B_2 . Com base na *Teoria da Relatividade Restrita*, a resposta B_2 pode chegar ao amigo viajante sem que este tenha emitido a pergunta. O que é uma situação absurda. Vejamos, através de um diagrama de Minkowski, como é possível dar-se este fenómeno de inversão causal.

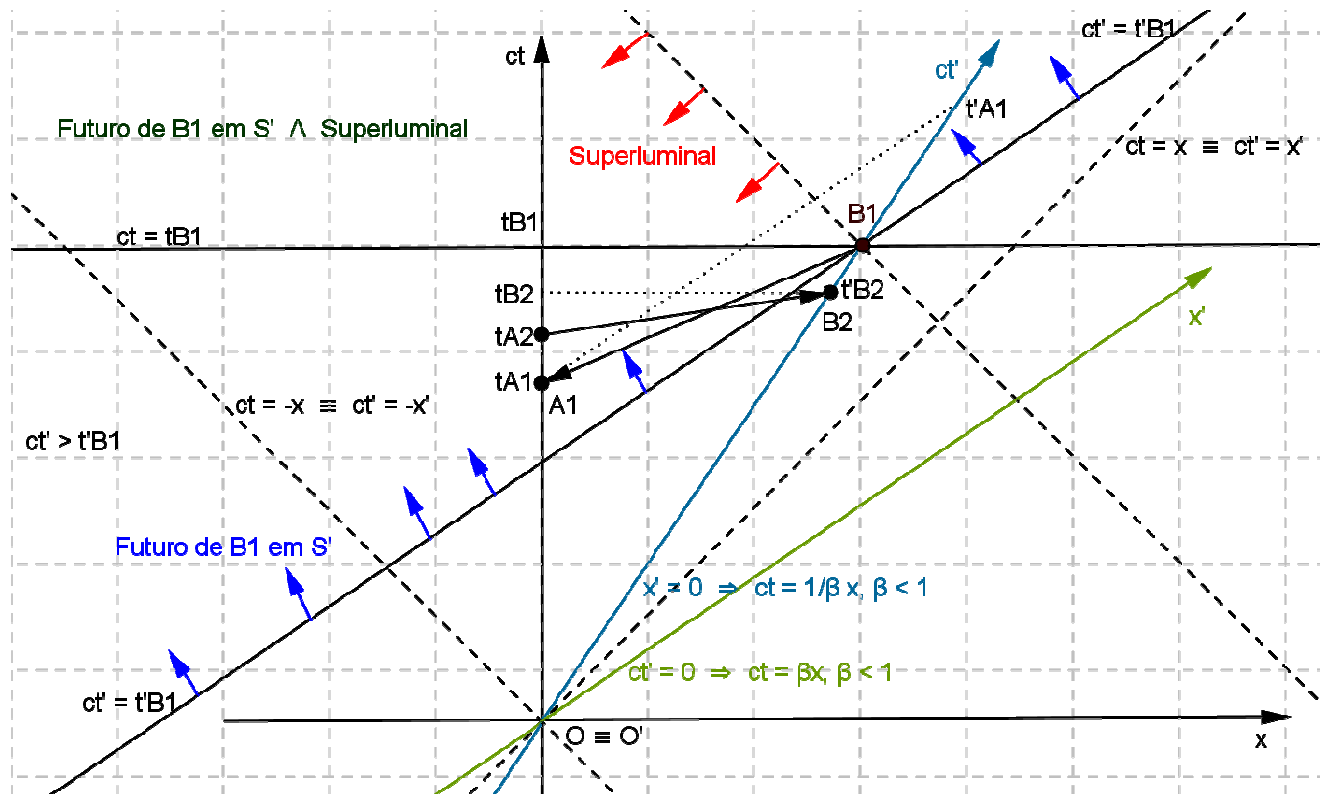


Figura 24³: Troca de sinais superluminais entre dois observadores inerciais A e B, do ponto de vista da *Teoria da Relatividade Restrita*. ct é a linha do universo do amigo A, aquele que se encontra na Terra e ct' é a linha do universo do amigo B, aquele que partiu em viagem com uma velocidade constante inferior a c , percorrendo os sucessivos pontos do eixo $O'ct'$. Verifica-se que a resposta (B_2) chega antes da pergunta ter sido realizada (B_1), paradoxo causal.

³ $\beta = \frac{v}{c}$

Começemos por verificar que $ct = x$ é coincidente com $ct' = x'$. De (3.40) vem que se $ct' = x'$, então

$$\begin{aligned} c\gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) &= \gamma(x - vt) \Leftrightarrow ct + vt = x + \frac{v}{c}x \\ \Leftrightarrow t(c + v) &= x\left(1 + \frac{v}{c}\right) \Leftrightarrow t = \frac{x}{c} \Leftrightarrow ct = x \end{aligned} \quad (7.1)$$

e, portanto, as linhas do universo de um sinal de luz são coincidentes em S e em S'.

De seguida temos de ter em atenção que cada sinal superluminal se deve propagar em direção ao seu futuro, assim sendo temos de garantir que $t'_{A_1} > t'_{B_1}$, o que acontece como podemos observar no diagrama anterior. Para além disso $t_{A_2} < t_{B_2}$, o que também se verifica. Nestas condições, conclui-se que se pode dar o caso de $t'_{B_2} < t'_{B_1}$, como se observa no diagrama da figura 24, e, portanto, o amigo B recebe a resposta do amigo A sem que tenha efetuado a pergunta, verificando-se, assim, um *loop* temporal paradoxal. Podemos verificar na figura 24, que os sinais emitidos por A e B são superluminais, pois encontram-se fora dos seus cones de luz. Caso a emissão dos sinais superluminais se realizasse de modo a que $t_{A_1} > t_{B_1}$, não se verificaria qualquer inversão causal. Reforcemos o que se acabou de dizer, do ponto de vista algébrico.

Através das transformações de Lorentz (3.40), sabemos que $\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x\right)$, a exigência $\Delta t' > 0$ (A_I no futuro de B_I , visto em S') leva a $\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x > 0 \Rightarrow \Delta t > \frac{v}{c^2}\Delta x$ entre os mesmos dois acontecimentos (B_I e A_I). Assim, tanto podemos escolher $\Delta x > 0$ como $\Delta x < 0$, mas, ao escolhermos $\Delta x > 0$, verificamos, necessariamente, que $\Delta t > 0$. Por outro lado, ao escolhermos $\Delta x < 0$ (sinal no sentido negativo do eixo Ox) temos, $\Delta t > 0$ ou $\Delta t < 0$. Destas duas possíveis escolhas, tomemos $\Delta t < 0$, ou seja, $t_{A_1} < t_{B_1}$. Quer isto dizer que, em S, é possível que a receção do sinal em A_I ocorra antes da sua emissão (superluminal) em B_I , $t_{A_1} < t_{B_1}$, embora em S' , A_I seja posterior a B_I ($\Delta t' = t'_{A_1} - t'_{B_1} > 0$).

Em conclusão, pode-se dizer que em relatividade restrita, a existir sinais superluminais, a resposta do amigo A chegaria ao amigo B antes, mesmo, que este último tivesse efetuado a pergunta e, como tal, o sinal superluminal usado para a resposta pôde viajar para o passado de B . Como a Teoria da Relatividade não permite, na verdade, velocidades superluminais dos sinais, declara que tais fenómenos de inversões causais não são possíveis. Contudo, veremos a seguir que as transformações inerciais permitem a resolução deste problema, sem que ocorram inversões causais, isto é, permitem a ocorrência de velocidades superluminais, sem que incorramos em absurdos causais.

Vejamos, então, que do ponto de vista das transformações inerciais o paradoxo causal, decorrente da possibilidade de velocidades superluminais, deixa de existir. Consideremos exatamente as mesmas condições da situação descrita anteriormente.

Atendendo à simultaneidade absoluta, como se baseia a determinação das transformações inerciais, a situação descrita na figura 24, apresenta-se de forma completamente distinta, como se pode observar na figura 25.

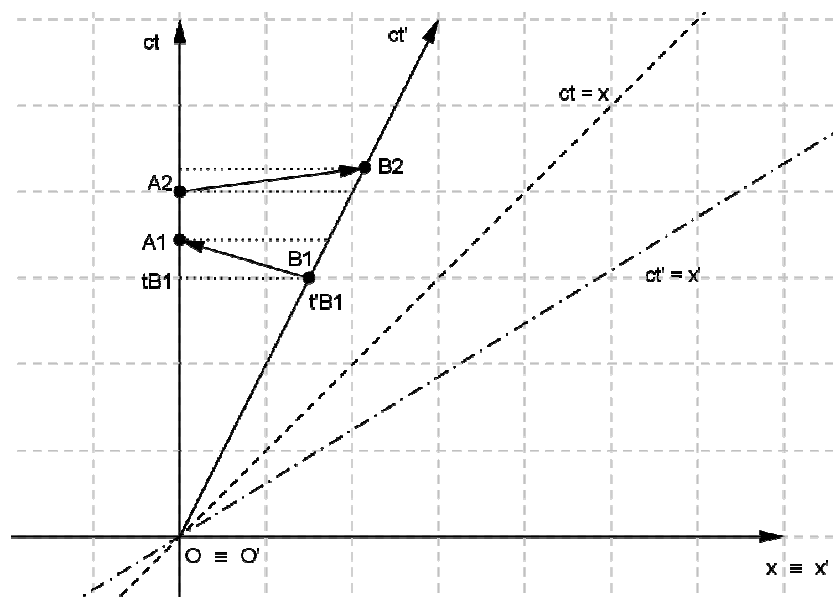


Figura 25⁴: Troca de sinais superluminais entre dois observadores inerciais A e B com base nas transformações inerciais. ct é a linha do universo do amigo A , aquele que se encontra na Terra e ct' é a linha do universo do amigo B , aquele que partiu em viagem com uma velocidade constante inferior a c . Verifica-se que a resposta (B_2) chega depois da pergunta ter sido realizada (B_1).

⁴ O facto dos eixos Ox e $O'x'$ serem coincidentes não quer dizer que as variações de tempo nos dois referenciais sejam coincidentes. De facto os eixos estão sobrepostos mas as, respetivas, escalas não, como se verifica nas equações das transformações inerciais.

Verifiquemos que no caso do diagrama anterior, elaborado a partir das transformações inerciais, as retas $ct = x$ e $ct' = x'$ não coincidem, ao contrário do que acontece no diagrama de Minkowski. Das transformações inerciais (5.117), temos que se $ct' = x'$, então,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma} ct &= \gamma(x - vt) \Leftrightarrow \frac{1}{\gamma} ct = \gamma \left(x - \frac{v}{c} ct \right) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\gamma^2} &= \frac{x}{ct} - \frac{v}{c} \Leftrightarrow \frac{1}{\gamma^2} + \frac{v}{c} = \frac{x}{ct} \end{aligned} \quad (7.2)$$

donde, a partir de (7.2), temos

$$x = ct \left(\frac{1}{\gamma^2} + \frac{v}{c} \right). \quad (7.3)$$

Para além disso,

$$\frac{1}{\gamma^2} = 1 - \frac{v^2}{c^2} \quad (7.4)$$

e, portanto, de (7.3), tendo em conta (7.4), podemos escrever que

$$x = ct \left(1 + \frac{v}{c} - \frac{v^2}{c^2} \right) \Leftrightarrow ct = \frac{1}{1 + \frac{v}{c} \left(1 - \frac{v}{c} \right)} x. \quad (7.5)$$

Como $0 < 1 - \frac{v}{c} < 1$, então, $1 + \frac{v}{c} \left(1 - \frac{v}{c} \right) > 1$ e, consequentemente, $\frac{1}{1 + \frac{v}{c} \left(1 - \frac{v}{c} \right)} < 1$.

Tal como na figura anterior, as linhas ct e ct' são as linhas de universo dos amigos A e B , respetivamente. Contudo, considerando as transformações inerciais, os eixos Ox e $O'x'$ são coincidentes, pois se $ct = 0$, então, atendendo a estas transformações, também se verifica que $ct' = 0$. Assim, a única condição que os sinais superluminais, correspondentes à pergunta e à resposta, devem satisfazer é a de se propagarem em direção ao futuro de quem os emitiu, isto é, $t'_{B_1} < t'_{A_1} \wedge t_{A_2} < t_{B_2}$ e, consequentemente, o acontecimento B_2 nunca poderá estar no passado do acontecimento B_1 . Pois, atendendo às transformações inerciais $c \Delta t' = \gamma^{-1} c \Delta t$ e,

portanto, se $\Delta t' > 0$ então, necessariamente, $\Delta t > 0$, pelo que já não ocorrem inversões temporais e, como tal, o paradoxo causal, decorrente da possível existência de velocidades superluminais, deixa de existir se considerarmos a teoria baseada nas transformações inerciais.

7.2. Algumas Implicações genéricas

A Física, enquanto ciência, tem por objetivo o estudo da natureza e a determinação de leis, a partir dos fenómenos observáveis que podem trazer para o Homem algum grau de previsibilidade sobre os acontecimentos do Universo. Assim, desde a antiguidade que aquele tenta explicar o funcionamento do mundo que observa.

Um dos maiores desafios do pensamento atual visa estabelecer um diálogo profícuo entre ciência e filosofia, isto é, possibilitar que as suas esferas possam atuar de forma integrada e integradora na busca da compreensão do Homem e da Natureza, entendidos como um todo.

A problemática na interação entre ciência e filosofia não é uma situação nova, remetendo-nos para problemáticas antigas, como sejam o problema do vínculo do homem com o mundo, o problema da verdade, o problema sobre o que é o real, entre outros. No desenvolvimento destas linhas debruçar-nos-emos, de forma superficial, sobre a relação entre o conceito de tempo preconizada por Henri Bergson (1859 – 1941), filósofo francês, em contrapartida com o conceito de tempo para Einstein. Para tal, apresentaremos uma evolução do conceito de tempo, a partir do conhecimento que se foi tendo das leis que regem o Universo.

Para Aristóteles (384 – 322 a. C.) o saber teórico constituía a ciência como conhecimento da realidade. Consequentemente, toda a sua conceção do movimento teve profundas consequências na forma como entendia o sentido físico do tempo. Para ele, o tempo era o “número do movimento segundo o anterior e o posterior”, ou seja, o tempo era função do movimento e, portanto, existia uma ligação íntima entre estes dois conceitos. Apesar disso, não se deveria confundir tempo com movimento, pois ao passo que o movimento podia variar,

o tempo não e, como tal, não existe tempo onde não há movimento. Em suma, “o tempo é uma medida uniforme de movimentos multiformes e é o mesmo em todo o lugar e para todos os homens” (Aristóteles, *Física*, IV, 10, 218b) e, portanto, só pode ser “medido” por alguém, isto é, “é impossível haver tempo sem alma” (Puente, citado por Pereira, 2008, p. 64). Como tal, Aristóteles coloca o tempo como algo que pertence à ordem dos acidentes, sendo um dos modos pelos quais o Ser é, logo o tempo não define o Ser na sua essência, apenas o define acidentalmente.

Com o desenvolvimento do conhecimento, Galileu defendia que a ciência devia fundamentar-se na observação, deixando de parte as “especulações” filosóficas. Assim, a Física deveria recorrer à Matemática e à observação para estabelecer as leis que regem o Universo. As contribuições de Galileu para a descrição do movimento dos corpos fizeram com que esta disciplina se distanciasse do empirismo aristotélico, para além de trazer grandes mudanças em relação ao que se entendia ser a natureza do tempo, nomeadamente, trouxeram para o tempo a ideia de eternidade, a ideia de um tempo indiferenciado num contínuo e mesmo fluxo. Consequentemente, a ideia aristotélica de um tempo consecutivo à realidade do movimento, passa a ser substituída pela conceção de um tempo eterno, sem que haja direção privilegiada rumo a um futuro distinto do passado, isto é, a noção de passado ou futuro deixa de existir.

Newton, com base nos trabalhos de Johannes Kepler (1571 – 1630) e de Galileu, estabeleceu as leis físicas que fundamentam as bases metodológicas e os elementos da Física Moderna, generalizando as leis do movimento. Para tal, teve necessidade de desenvolver a Matemática até então conhecida, sendo um dos fundadores do Cálculo Diferencial e Integral. A partir destas novas ferramentas matemáticas foi capaz de descrever os movimentos estudados por Kepler e Galileu, prevendo com precisão o movimento dos planetas em torno do Sol e da Lua em torno da Terra. Em suma, a partir dos trabalhos de Newton, a ciência passou a ser capaz de prever qualquer movimento e, consequentemente, o futuro do Universo estaria fixado e, em princípio, poderia ser calculado. Como consequência das leis estabelecidas, Newton considerava que o espaço e o tempo eram absolutos, ideias de grande importância para a Filosofia. Do seu ponto de vista, o tempo é absoluto, verdadeiro e matemático, fluindo de forma sempre igual e sem qualquer tipo de relação com fatores externos a si mesmo e, consequentemente, para Newton o tempo é “duração”.

Só no século XX, a partir dos trabalhos de Einstein, nomeadamente a partir da *Teoria da Relatividade*, as leis mecânicas que descrevem o Universo foram revistas e corrigidas. Einstein chegou às suas conclusões, essencialmente, a partir dos trabalhos de Michael Faraday (1791 – 1867), Maxwell e Lorentz. Em certa medida, podemos afirmar que a teoria anterior surge a partir de uma preocupação da Física de descrever como o cosmos se apresenta aos corpos em movimento, uns em relação aos outros. Uma das grandes novidades da *Teoria da Relatividade Restrita* é afirmar que observadores em movimento relativo, um face ao outro, terão indicações de tempo diferentes, marcadas por cada um dos seus relógios, sendo que esta diferença se deve a uma característica intrínseca do próprio tempo e não a qualquer tipo de deficiência no funcionamento dos ditos relógios. Este fenómeno é conhecido por dilatação do tempo. Para além das diferenças no tempo, a *Teoria da Relatividade Restrita* preconiza, também, que observadores pertencentes a referenciais inerciais em movimento retilíneo e uniforme farão medidas distintas das distâncias que medem, sendo este efeito próprio da natureza do espaço e designa-se por contração do espaço. Em consequência dos efeitos descritos, qualquer observador inercial, independentemente da sua consciência, está sujeito às variações do tempo e do espaço e, como tal, estas variações não dependem do facto de existirem ou não observadores para as registarem.

Ao estabelecer a *Teoria da Relatividade Restrita*, Einstein afirma que todos os referenciais inerciais são equivalentes para a descrição de todas as leis físicas, existindo, portanto, uma simetria absoluta entre movimentos relativos uniformes, isto é, com velocidades relativas constantes, e, consequentemente, observadores de diferentes referenciais inerciais não conseguem constatar o movimento do seu referencial próprio. Para além disso, Einstein instituiu um novo absoluto no Universo: a velocidade da luz no vácuo. A sua constância quebrou com a visão clássica do espaço e do tempo imaginadas como estruturas rígidas e objetivas e, assim sendo, estes conceitos passaram a depender da relação de movimento existente entre observador e corpo em movimento, isto é, passaram a ser relativos. Portanto, com a relatividade a noção de tempo absoluto e idêntico para todos os pontos do universo deixou de fazer sentido, caindo por terra a noção de simultaneidade absoluta.

Bergson defendia que o papel principal da Filosofia não era dar resposta aos problemas que determinava, mas sim, a forma como colocava esses problemas. Isto porque as respostas dadas aos problemas dependem de como estes são colocados. Para ele o problema principal foi o de colocar o tempo no seu devido lugar.

Um dos focos da atenção de Bergson foi saber o que acontece a um Ser quando é atravessado, continuamente, pelo movimento e pelo tempo, assim seria “necessário resgatar o tempo, como tempo puro, como duração” (Pereira, 2008, p. 22). O conceito de duração baseia-se na ideia de que o tempo é uma espécie de tempo criador, isto é, não pode ser obtido pela mera soma de partes, ou seja, não pode ser mensurável, como institui a ciência. Portanto, a duração ou tempo real de Bergson depende da nossa consciência e não da nossa inteligência, isto é, nós temos consciência de que o tempo existe, não necessitamos de recorrer à nossa inteligência para sabermos da sua existência. Em suma, Bergson considera que o mundo é um conjunto de diferentes durações que coexiste com diversas tendências e para se entenderem estas durações é necessário utilizar o método da intuição e, portanto, o tempo é único, universal e impessoal, capaz de dar conta do Todo do Universo e, conseqüentemente, todos os corpos, vivos ou não, estão submetidos a uma única duração.

Bergson discorda de Einstein no entendimento do tempo, pois, segundo a *Teoria da Relatividade*, existe uma multiplicidade de tempos, ou seja, um tempo por cada referencial inercial que se considere e para Bergson na multiplicidade desses tempos existe um único real entre eles. Para Bergson, o que leva os relativistas a considerarem a existência de diferentes tempos reais baseia-se numa análise equivocada das relações de movimento entre referenciais. Com base nessa ideia de tempo, confrontava os resultados obtidos por Einstein, baseando-se na ideia da reciprocidade de dois observadores, ou seja, se um observador dito em repouso vê um segundo observador em movimento face a si com um movimento linear e uniforme, então, o segundo também está em repouso no seu referencial e vê o outro a afastar-se de si com velocidade constante e uniforme, pelo que o tempo deveria, então, estar dilatado para os dois e, conseqüentemente, no seu reencontro, ambos deveriam esperar estar mais novos do que o outro. Para evitar a confusão, tal como visto anteriormente, preconizava que deveria existir um tempo igual para todos, o tempo das consciências, que está para além das aparências experimentais. Claro que Bergson se esqueceu que os referenciais inerciais dos dois observadores não estão em perfeita reciprocidade, uma vez que desprezou as acelerações a que os mesmos estão sujeitos, pelo que as observações nos dois sistemas não têm de ser equivalentes.

Para finalizar, resta-nos dizer que o conceito de tempo ainda hoje é alvo de diferentes interpretações, vejamos o que diz Fiolhais [11], relativamente a esta questão. “Para Bergson, o tempo é invenção ou não é absolutamente nada, querendo por invenção significar mudança,

inovação, criação. Para Einstein, o tempo é ilusão, querendo significar com isso que a distinção entre passado e futuro é espúria do ponto de vista da física dos processos fundamentais. Reside aqui o verdadeiro problema do tempo, problema que ainda hoje persiste e que é atacado embora de prismas diferentes, tanto por físicos como por filósofos.”

8. Conclusão

“O único homem que está isento de erros é aquele que não arrisca acertar.”

Albert Einstein

Para Galileu o tempo era, tal como ainda hoje, uma grandeza que se podia medir com um relógio e o espaço uma grandeza que se podia medir com uma régua. No decorrer dos seus trabalhos, tentou descrever matematicamente os fenómenos naturais, tendo dito em determinada altura que “o livro da natureza está escrito em caracteres matemáticos”.

Galileu desenvolveu o princípio da relatividade que afirmava que todos os observadores de referenciais inerciais viam da mesma maneira um determinado fenómeno físico, isto significava que existia invariância ao se passar de um referencial para o outro e, portanto, não seria possível distinguir os estados de repouso e de movimento retilíneo e uniforme no referencial próprio de um observador.

Mais tarde, com o desenvolvimento da Matemática, para se estabelecer a relação existente entre a posição de um objeto e o tempo em que ele ocupa esta posição, para observadores inerciais localizados em diferentes referenciais, chegou-se às conhecidas transformações de Galileu, assim designadas, em homenagem ao grande pensador do século XVI.

Newton continuou a tradição deixada por Galileu, nomeadamente a de descrever os fenómenos físicos através de leis matemáticas. Para ele, o espaço e o tempo eram conceitos dissociados e absolutos, funcionando para todos de forma igual, sendo que os movimentos definidos pelas famosas leis de Newton eram vistos como uma alteração das posições de um objeto no espaço, ao longo do tempo. O facto de para Newton o tempo ser absoluto levava a que as suas leis fossem invariantes face a inversões do tempo.

Sabemos hoje, e desde finais do século XIX, princípios do século XX, que a Física de Galileu e Newton não está totalmente correta, nomeadamente os seus conceitos de espaço e tempo, contudo as suas ideias permanecem válidas se trabalharmos com velocidades baixas, o

que é notável considerando os conhecimentos matemáticos e tecnológicos existentes no seu tempo.

O conflito que se verificou nos finais do século XIX entre a Mecânica Clássica de Galileu e Newton, que obedecia às transformações de Galileu, e o Eletromagnetismo de Faraday e Maxwell, que obedecia às transformações de Lorentz, foi resolvido por Einstein a partir da formulação dos postulados da relatividade que revolucionaram os conceitos de espaço e de tempo, unidos no espaço-tempo de Minkowski. No essencial estes postulados afirmavam que todas as leis da Física, e não apenas as da Mecânica, devem permanecer inalteradas em todos os referenciais de inércia e que a velocidade da luz no vácuo é constante, independentemente da velocidade a que o observador se encontra.

A partir dos postulados referidos, Einstein construiu a *Teoria da Relatividade Restrita*, tendo por base as transformações de Lorentz e chegou a consequências extraordinárias. Uma delas é que o tempo flui de maneira diferente para observadores pertencentes a referenciais inerciais distintos, nomeadamente, que o tempo medido por relógios em movimento atrasa-se, fenómeno conhecido por dilatação do tempo. Este fenómeno já foi verificado experimentalmente. Assim, cada observador inercial mede tempos diferentes para o mesmo acontecimento, consoante a sua própria velocidade, caindo, portanto, a noção de tempo absoluto de Newton, tempo igual para todos os observadores, para passar a existir um tempo relativo, passando cada observador a ter o seu próprio tempo. Outra das consequências verificadas por Einstein, foi que o espaço se contrai para corpos em movimento, fenómeno da contração do espaço. De acordo com esta ideia, um observador inercial que se encontre em repouso e no exterior de um corpo em movimento retilíneo e uniforme, apercebe-se que este lhe parece encolhido. Tal como o tempo, também o espaço, que era considerado absoluto, passou a ser relativo.

Para que a Física permanecesse consistente houve necessidade de reformular alguns aspetos da Mecânica, nomeadamente modificaram-se as definições de momento linear e de energia. Assim, Einstein introduziu a equivalência entre massa e energia, onde se afirmava que uma partícula de massa m , mesmo em repouso, possuía uma energia E , dada por $E = mc^2$. Uma consequência desta relação massa energia revela-se na obtenção da energia nuclear.

A revisão dos conceitos de espaço e de tempo não foi facilmente aceite, tendo tido várias dificuldades, do ponto de vista científico e até filosófico, para se impor. Um dos exemplos mais populares destas dificuldades ficou conhecido por “Paradoxo” dos gêmeos que, apesar de hoje se encontrar resolvido, ilustra bem as dificuldades que a *Teoria da Relatividade Restrita* representa para o senso comum. Einstein, como forma de dar resposta a algumas questões que a teoria referida não conseguia responder, fez uma generalização da mesma, ficando esta generalização conhecida por *Teoria da Relatividade Geral*, que se focava em referenciais não inerciais. Esta generalização não foi objeto de estudo nesta dissertação.

A Teoria da Relatividade de Einstein, aceite pela esmagadora maioria dos físicos, dominou todo o conhecimento do século XX, tendo proporcionado descobertas fascinantes. Contudo, como já referido, é difícil aceitar que uma teoria possa ser entendida como uma perfeita e absoluta interpretação da natureza, até porque, passado cerca de um século da sua implementação, algumas questões carecem de clarificação.

Com base no desenvolvimento do conhecimento e da tecnologia, algumas observações experimentais parecem por em causa a relatividade, nomeadamente, no que diz respeito à noção de simultaneidade entre acontecimentos e à velocidade da luz. Assim, alguns físicos, apesar do consenso que existe a favor da relatividade, tentam apresentar alternativas que descrevam os fenómenos físicos, tal como esta, e que respondam às questões que a relatividade não responde ou considera inexequíveis. Um destes físicos é o italiano Franco Selleri que, com base nos trabalhos de Tangherlini, Mansouri e Sexl, entre outros, a partir do atraso dos relógios em movimento e da invariância da velocidade da luz em percursos de ida e volta, reformulou as transformações das variáveis de espaço e tempo entre referenciais inerciais, obtendo, assim, as transformações equivalentes que contêm um parâmetro livre, i_1 , parâmetro de sincronização, que varia consoante o método de sincronização de relógios que se considere. Para cada um destes métodos obtém-se um valor diferente de i_1 e, consequentemente, diferentes teorias que têm, entre si, a particularidade de assumirem a existência de um referencial inercial privilegiado, no qual a velocidade da luz é a mesma em todas as direções. Se considerarmos o método de sincronização de Einstein, obtemos $i_1 = -\frac{v}{c^2}\gamma$ e, consequentemente, as transformações de Lorentz, mas se considerarmos o processo de sincronização absoluto, obtemos $i_1 = 0$ e, portanto, as transformações inerciais. As várias teorias que se obtêm, consoante a escolha de i_1 , não levam a diferenças físicas nos

testes habituais da relatividade restrita, contudo, implicam grandes alterações nas noções de espaço e tempo para observadores de referenciais inerciais distintos. “De facto, todas as diferenças observáveis dependem de i_1 , da convenção adotada para sincronizar os relógios e não têm, por isso, uma base física objetiva.” (Selleri, 2004, p. 155). Selleri adotou as transformações inerciais, pois, fisicamente, “são as únicas que podem enquadrar corretamente os fenómenos naturais” (Selleri, 2004, p. 159), de uma forma mais geral e que levam à aceitação de sinais superluminais, isto é, com velocidade superior a c , sinais esses que, aparentemente, já foram comprovados experimentalmente.

A adoção destas últimas transformações permitem obter algumas das conclusões da *Teoria da Relatividade Restrita*, permitindo, em contrapartida, responder a questões que a teoria citada não consegue, como, por exemplo, dar resposta aos paradoxos causais que, como vimos, já não ocorrem. Contudo, no domínio do Eletromagnetismo, as conclusões obtidas por Puccini e por Buonauro parecem carecer de esclarecimento adicional e, em particular, da descoberta de um critério experimental que as distinga do aceite em geral.

Do nosso ponto de vista a “relatividade fraca”, compilada por Selleri, com base nos estudos de outros físicos, como referido anteriormente, aparenta ser uma alternativa credível para a explicação dos conceitos físicos observáveis de referenciais inerciais distintos e possibilita, até, tratar questões que a relatividade restrita não consegue. Contudo, parece-nos, também, que a mesma não está, suficientemente, comprovada para que possa ser alternativa à Teoria da Relatividade. Assim sendo, parece-nos que serão necessários mais desenvolvimentos científicos e experimentais para que se possa encontrar uma melhor teoria explicativa do Universo do que a Relatividade de Einstein. Porém, é necessário ter consciência que a Física Clássica de Newton imperou durante cerca de dois séculos e que o “reinado” da relatividade, ainda, vai em um! Relembremos o que escreveu Einstein, em 1949, numa carta ao seu amigo Maurice Solovine. “*Tu pensas que eu olho para o trabalho da minha vida com uma calma satisfação. Mas de perto a coisa parece bem diferente. Não existe um só conceito que eu esteja convencido de que possa resistir estavelmente*”.

Bibliografia

- [1] Azenha, A. & Jerónimo, M. A., *Elementos de Cálculo Diferencial e Integral em \mathbb{R} e \mathbb{R}^n* , McGraw – Hill, 1995.
- [2] Brotas, A., *Relatividade e Física Clássica Continuidade e Ruptura*, IST Press, 2010.
- [3] Buonauro, B. *Maxwell Equations and Inertial Transformations*, Foundations of Physics Letters, vol. 17, no. 5, pp. 627 – 644, 2004.
- [4] Costanti, F. J., *Introdução à Física Moderna*, Rio de Janeiro: Editora Campus LTDA., 1981.
- [5] Crawford, P., *Viagens no Espaço – tempo e Paradoxo dos Gémeos*, Centro de Astronomia e Astrofísica da Universidade de Lisboa, 2007.
- [6] Cushing, J. T., *Philosophical Concepts in Physics*, Cambridge University Press, 1998.
- [7] Einstein, A., *O Significado da Relatividade*, trad. de Mário Silva, Gradiva, 2003.
- [8] Farinha, S. D., *Teoria da Relatividade Restrita: Uma Perspectiva Geométrica*, Dissertação de Mestrado, IST, 2009.
- [9] Feynman, R., Leighton, R. & Sands, M., *The Feynman Lectures on Physics*, vol. I, Addison – Wesley Publishing Company, 6th ed., 1977.
- [10] Feynman, R., Leighton, R. & Sands, M., *The Feynman Lectures on Physics*, vol. II, Addison – Wesley Publishing Company, 6th ed., 1977.
- [11] Fiolhais, C., *Bergson, Einstein, Coimbra e o Problema do Tempo*.
- [12] Gómez, T., *Einstein Relativamente Fácil*, Editorial Estampa, 2008.
- [13] Hawking, S., *On the Shoulders of Giants, the Great Works of Physics and Astronomy*, Penguin Books, 2003.
- [14] Henriques, A. B., *Teoria da Relatividade Geral – uma introdução*, IST Press, 2009.

- [15] Lorentz, H. A., Einstein, A. & Minkowski, H., *O Princípio da Relatividade*, Fundação Calouste Gulbenkian, 5.^a ed., 2001.
- [16] Loureiro, J., *Física Relativista - Mecânica e Electromagnetismo*, IST Press, 2008.
- [17] Maudlin, T., *Philosophy of Physics: Space and Time*, pp. 76 – 83, Princeton University Press, 2012.
- [18] Martins, A. M., *Teoria da Relatividade Especial*, GHTC, 2008.
- [19] Mckee, R., *The Basic Works of Aristotle*, Random House, New York, 1941.
- [20] Ougarov, V., *Théorie de la Relativité Restreinte*, Les Editions Mir, 1974.
- [21] Pathria, R. K., *The Theory of Relativity*, Pergamon Press, 2nd ed., 1974.
- [22] Pereira, D. S., *A concepção do tempo em Bergson e a sua relação com a teoria da relatividade de Einstein*, Dissertação de Mestrado, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Filosofia e Ciências Humanas, 2008.
- [23] Piskounov, N., *Cálculo Diferencial e Integral*, vol. I, Porto: Edições Lopes da Silva, 16.^a ed., 1993.
- [24] Puccini, G. D., *Electrodynamics under a possible alternative to the Lorentz Transformation*, Foundations of Physics Letters, vol. 16, no. 5, pp. 481 – 494, 2003.
- [25] Rodrigues, J. M. R., *Introdução à Teoria da Relatividade Restrita*, IST Press, 1998.
- [26] Schwartz, M., *Principles of Electrodynamics*, New York: Dover Publications, Inc., 1972.
- [27] Selleri, F., *Space, Time, and their Transformations*, Chinese Journal of Systems Engineering and Electronics, vol. 6, pp. 25 – 44, 1995.
- [28] Selleri, F., Noninvariant one – way velocity of light, Foundations of Physics, vol. 26, pp. 641 – 664, 1996.
- [29] Selleri, F., *Remarks on the Transformations of Space and Time*, APEIRON, vol. 4, nr. 4, pp. 116 – 120, 1997.

- [30] Selleri, F., *Superluminal signals and causality*, Annales de la Fondation Louis de Broglie, vol. 28, no 3 – 4, pp. 507 – 523, 2003.
- [31] Selleri, F., *Lições de relatividade de Einstein ao Éter de Lorentz*, trad. de Croca, J. R. & Moreira, R., Lisboa: Edições Duarte Reis, 2004.
- [32] Taylor, E.F. & Wheeler, J. A., *Spacetime Physics*, W. H. Freeman and Company, 1963.
- [33] Wickert, J., *Albert Einstein*, Editora Expresso, 2011.
- [34] Zahar, E., Einstein's Revolution, A Study in Heuristic, pp. 112 – 121, Open Court Chicago and La Salle.