

FUNÇÕES

Maria do Carmo Martins

Novembro de 2013

Poema de Luís Soares

Cada reta é um caminho interrompido
Que curva
No desconhecido.

Nenhuma reta se traça
Entre quem ama e quem não ama
A geometria do amor é não-euclidiana.

De variáveis imaginadas
A vida é complexa função.
A sua primitiva permanece incógnita
Presa de irresolúvel equação.

O matemático é um poeta
Que pinta
Sem paleta.

Definição

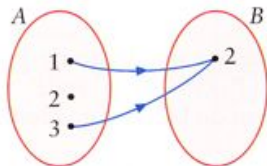
Uma **função** f de A com valores em B ($f : A \rightarrow B$) consiste em dois conjuntos, o domínio A (D_f) e o conjunto de chegada B , e uma regra ou correspondência que associa a cada elemento x (**objeto**) de A um e um só elemento $y = f(x)$ (**imagem**) de B . Simbolicamente:

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow B \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

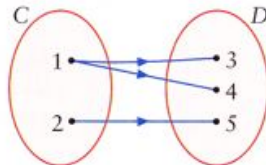
Ao conjunto das imagens de f chama-se **contradomínio** da função e representa-se por D'_f .

Observação 1

Há correspondências que não são funções.



Ao elemento 2 do conjunto A não corresponde qualquer elemento em B .



Ao elemento 1 do conjunto C correspondem dois elementos em D .

Gráfico e representação gráfica de uma função

Definição

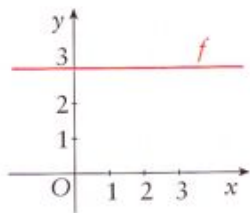
*Se f é uma função com domínio A , o **gráfico** de f é o conjunto dos pares ordenados*

$$\{(x, f(x)), \ x \in A\}.$$

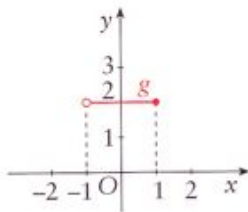
Sempre que o domínio ou o contradomínio é um conjunto ilimitado, é impossível representar o gráfico de uma função.

No caso de não ser possível representar o gráfico de uma função diz-se que se faz uma **representação gráfica da função**.

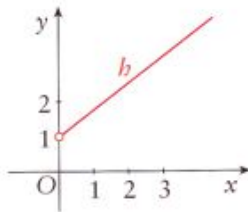
Exemplos



$$D_f = \mathbb{R}; D'_f = \{3\}$$



$$D_g =]-1, 1]; D'_g = \{2\}$$



$$D_h =]0, +\infty[; D'_h =]1, +\infty[$$

Variável dependente e variável independente

Graficamente, convencionou-se que no eixo horizontal se representa a **variável independente** e no eixo vertical se representa a **variável dependente**.

Por exemplo:

O perímetro P de um quadrado de lado x é dado pela função $P(x) = 4x$, onde x representa o comprimento do lado do quadrado.

$$P : x \mapsto y = 4x.$$

- x é a variável independente;
- y é a variável dependente.

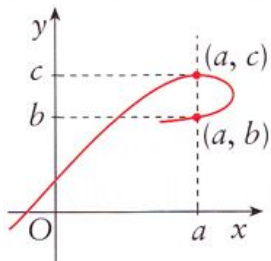
Teste da reta vertical

Numa função, a cada objeto corresponde uma e uma só imagem, portanto o gráfico de uma função só pode ser intersectado, no máximo, uma vez por uma qualquer reta vertical.

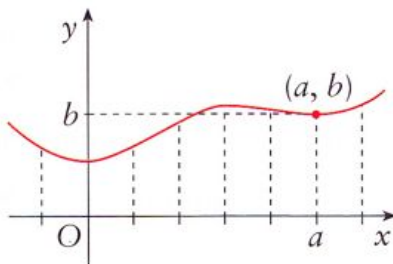
O **teste da reta vertical** afirma que:

Uma curva representada num referencial é o gráfico de uma função se e só se qualquer reta vertical intersecta o gráfico, no máximo, num ponto.

Exemplo



Não é gráfico de uma função.

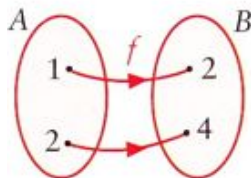


É gráfico de uma função.

Formas de representar uma função

Uma função pode ser definida por:

- Um diagrama



- Uma expressão verbal: “ A cada número faz corresponder o seu dobro”

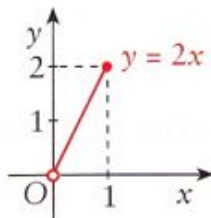
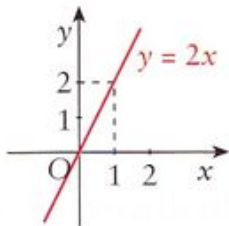
Formas de representar uma função - continuação.

- Uma expressão analítica: $y = 2x$
- Uma tabela

x	y
1	2
2	4
3	6

Formas de representar uma função - conclusão.

- Uma representação gráfica ou um gráfico



Zeros de uma função

Definição

Chama-se **Zero** de uma função a todo o objeto que tem imagem nula.

Exemplo: Determine os zeros da função:

$$f(x) = (x - 10)(x - 3)(x + 2).$$

Extremos absolutos de uma função

Definição

Seja f uma função de domínio D :

- $f(a)$ é o **máximo absoluto** de f se, para todo o x de D , $f(a) \geq f(x)$; diz-se que a é um *maximizante*.
- $f(b)$ é o **mínimo absoluto** de f se, para todo o x de D , $f(b) \leq f(x)$; diz-se que b é um *minimizante*.

Extremos relativos ou locais de uma função

Definição

- $f(a)$ é o **máximo relativo** de f se, existir um intervalo E contendo a , tal que $f(a) \geq f(x)$, para todo x de $E \cap D$; diz-se que a é um *maximizante*.
- $f(b)$ é o **mínimo relativo** de f se, existir um intervalo E contendo b , tal que $f(b) \leq f(x)$, para todo x de $E \cap D$; diz-se que b é um *minimizante*.

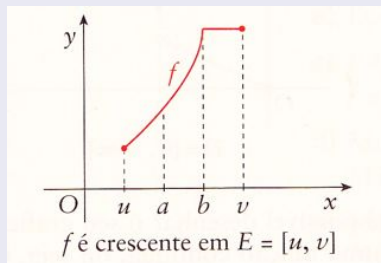
Observação 2

- 1 Qualquer extremo absoluto é também extremo relativo.
- 2 Se uma função tem máximo absoluto este coincide com o maior dos máximos relativos e com o maior valor do contradomínio.
- 3 Se uma função tem mínimo absoluto este coincide com o menor dos mínimos relativos e com o menor valor do contradomínio.

Função crescente

Definição

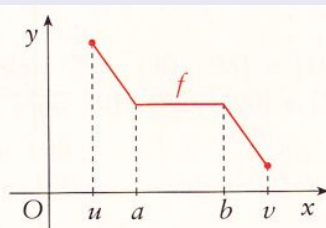
Diz-se que f é **crescente** em A quando, para todos os números reais a e b em A , se $a < b$, então $f(a) \leq f(b)$.



Função decrescente

Definição

Diz-se que f é **decrescente** em A quando, para todos os números reais a e b em A , se $a < b$, então $f(a) \geq f(b)$.

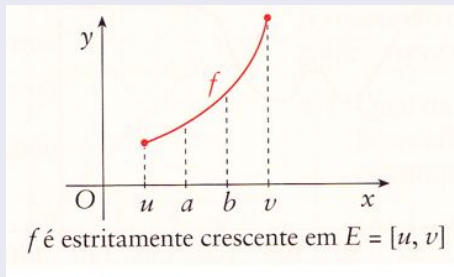


f é decrescente em $E = [u, v]$

Função estritamente crescente

Definição

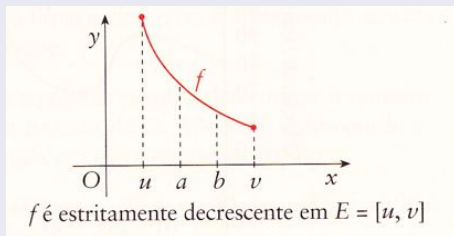
Diz-se que f é **estritamente crescente** em A quando, para todos os números reais a e b em A , se $a < b$, então $f(a) < f(b)$.



Função estritamente decrescente

Definição

Diz-se que f é **estritamente decrescente** em A quando, para todos os números reais a e b em A , se $a < b$, então $f(a) > f(b)$.



Definições

- Uma função diz-se **crescente** se for crescente em todo o seu domínio.
- Uma função diz-se **decrecente** se for decrescente em todo o seu domínio.
- Uma função diz-se **monótona** num intervalo se for crescente ou decrescente nesse intervalo.
- Uma função constante é crescente e decrescente em qualquer intervalo do seu domínio.

Funções reais de variável real

Definição

Chama-se **função real de variável real** (f.r.v.r.) a toda a correspondência que a cada elemento de um subconjunto A de \mathbb{R} faz corresponder um e um só número real.

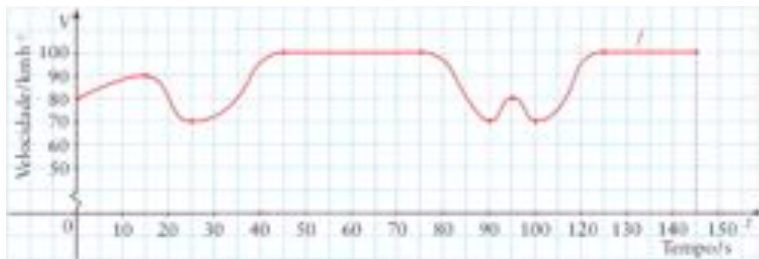
$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Exemplo: - São f.r.v.r. as funções definidas por:

$$f(x) = x^2 + 8; \quad g(x) = \frac{5}{x} \quad \text{e} \quad h(x) = \text{sen}(x).$$

Exercício 2

A partir de um determinado instante, considerado como origem, registaram-se os valores de velocidade v , em km/h , em função do tempo, t , em segundos, durante uma parte do circuito que um automóvel percorria num rali.



- O gráfico representa uma função? Justifique a sua resposta.
- Qual é a variável dependente?

Exercício 2 - continuação

- c) Relativamente à função f representada graficamente, determine:
- 1) o domínio;
 - 2) o contradomínio;
 - 3) um intervalo onde a função é estritamente crescente;
 - 4) um intervalo onde a função é estritamente decrescente;
 - 5) um intervalo onde a função é constante;
 - 6) os extremos absolutos;
 - 7) as soluções da equação $f(x) = 70$.
- d) Construa uma tabela de variação da função.

Definição

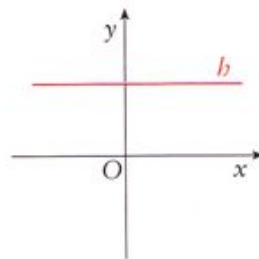
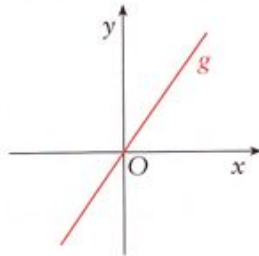
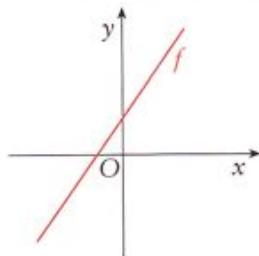
Uma **função afim** é definida por uma expressão do tipo

$$y = mx + b, \quad \text{onde } m, b \in \mathbb{R}.$$

O gráfico de uma função afim é uma reta.

Exemplo

Os três gráficos seguintes são exemplos de gráficos de funções afins



Definição

*Quando o gráfico de uma função afim contém a origem do referencial, a função tem o nome de **função linear** ou **função de proporcionalidade direta**.*

*Quando o gráfico de uma função afim é paralelo ao eixo das abcissas, a função diz-se **função constante**.*

Observação 3

- Uma função de proporcionalidade direta é definida por uma expressão do tipo $y = mx$, com $m \neq 0$;
- uma função constante é definida por uma expressão do tipo $y = b$, com $b \in \mathbb{R}$.

Declive de uma reta

Definição

*Sendo $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ pontos de uma reta, chama-se **declive da reta** ou **coeficiente angular** e representa-se por m ao quociente:*

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad x_1 \neq x_2$$

Sendo $P(x, y)$ um ponto qualquer da reta, uma equação dessa reta pode ser obtida pela fórmula:

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

Relação entre os declives de duas retas paralelas e duas retas perpendiculares

O declive de uma reta é extremamente útil para averiguar se duas retas são paralelas ou perpendiculares.

Definição

*Duas retas distintas não verticais são **paralelas** se e só se os seus declives forem iguais, isto é, se e só se $m_1 = m_2$.*

Definição

*Duas retas distintas não verticais são **perpendiculares** se e só se o declive de uma for igual ao simétrico do inverso do declive da outra, isto é, se e só se $m_1 = -\frac{1}{m_2}$.*

Exercício 6

Determine a equação geral da reta ($Ax + By + C = 0$) que passa pelo ponto $(1, 1)$ e é:

a) paralela à reta $5x + 3y = 10$;

b) é perpendicular à reta $6x + 8y = 1$;

c) é paralela à reta $\frac{x-2}{4} = \frac{y-3}{6}$.

d) é perpendicular à reta $2x - 9y = 12$

Exercício 9

Para cada $a \in \mathbb{R}$, a expressão

$$f(x) = \frac{ax - 3}{2}$$

define uma função afim.

- a) Se $a = 4$, determine as coordenadas dos pontos de interseção do gráfico da função com os eixos coordenados.
- b) Determine a de modo que o gráfico da função contenha o ponto de coordenadas $(1, 3)$.
- c) Determine o valor de a de modo que a função não tenha zeros.
- d) Determine a de modo que a função seja decrescente.

Definição

Uma **função quadrática** é uma função definida por:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

com a , b e c são números reais.

O domínio de uma função quadrática é o conjunto dos números reais.

O gráfico de uma função quadrática é uma parábola.

Sentido da concavidade do gráfico de uma função quadrática

Dada uma função f definida por

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \text{e} \quad b, c \in \mathbb{R}$$

tem-se que:

- se $a > 0$, a concavidade do gráfico é voltada para cima;
- se $a < 0$, a concavidade do gráfico é voltada para baixo.

Interseção do gráfico com o eixo Oy

Para obter as coordenadas do ponto de interseção do gráfico da função f definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$ com o eixo Oy , substitui-se x por 0.

Como $f(0) = c$, existe sempre um ponto de interseção do gráfico da função quadrática com o eixo Oy . As coordenadas do ponto de interseção são $(0, c)$.

Interseção do gráfico com o eixo Ox

Uma função quadrática pode ter um zero, dois zeros ou nenhum.

As abcissas dos pontos de ordenada zero são os zeros da função.

Para calcular os zeros de uma função f , definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$ (com $a \neq 0$), pode recorrer-se à fórmula resolvente, igualando a expressão analítica da função f a zero, ou seja resolvendo a equação $f(x) = 0$.

Fórmula Resolvente

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Leftrightarrow$$

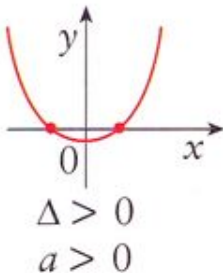
$$\Leftrightarrow x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \vee x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

O radicando $\Delta = b^2 - 4ac$ é o binómio discriminante.

Quadrática - dois zeros reais

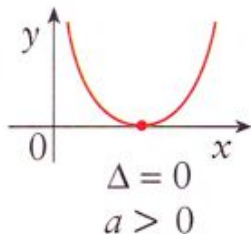
Para sabermos o número de zeros de uma função quadrática podemos atender ao sinal do binómio discriminante. Assim:

- Se $\Delta > 0$ a equação tem duas raízes reais distintas



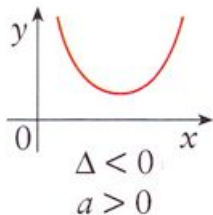
Quadrática - um zero real duplo

- Se $\Delta = 0$ a equação tem uma raiz real (raiz dupla)

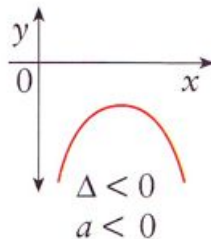


Quadrática - sem zeros reais

- Se $\Delta < 0$ a equação não tem raízes reais



ou



Exercício 11

Determine os zeros das funções definidas por:

a) $f(x) = x^2 - 2x + 1$

b) $g(x) = -x^2 + x + 2$

c) $h(x) = x^2 - 4x + 5$

Contradomínio de uma função quadrática

Para determinar o contradomínio de uma função quadrática determinam-se as coordenadas do vértice da parábola que representa graficamente a função.

Como determinar o vértice da parábola?

Toda a função quadrática f definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $(a \neq 0)$, tem como gráfico uma parábola de vértice no ponto (h, k) , sendo:

- $h = -\frac{b}{2a}$
- $k = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$

Outro processo para determinar o vértice de uma parábola

Há outros métodos para determinar o vértice da parábola sem recorrer à calculadora. Escrevendo a expressão:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

na forma

$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

e o vértice será o ponto de coordenadas (h, k) .

Exercício 12

Considere a função quadrática f , definida por

$$f(x) = x^2 - 5x + 6.$$

Escreva a função na forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$ e indique as coordenadas do seu vértice.

Exercício 14

Para cada valor real de t , a expressão $g(x)$ representa uma função quadrática, sendo

$$g(x) = x^2 - 4x + t.$$

Determine t de modo que a função g tenha:

- a) dois zeros reais;
- b) um único zero real;
- c) não tenha zeros reais.

Função par

Definição

Uma função g diz-se **par** se e só se

$$\forall x \in D_g, \quad -x \in D_g \quad \text{e} \quad g(-x) = g(x).$$

Função ímpar

Definição

Uma função f diz-se **ímpar** se e só se

$$\forall x \in D_f, \quad -x \in D_f \quad e \quad f(-x) = -f(x).$$

Exercício 16

Estude a paridade de cada uma das funções reais de variável real definidas por:

a) $f(x) = x - 4x^2$

b) $g(x) = 1 - x^4$

c) $h(x) = \sqrt[3]{x} - 9x^3$

Definição

A função definida por

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

é chamada **função módulo** ou **função valor absoluto** e tem como domínio o conjunto dos números reais.

Observação

- Para $k > 0$

$$|x| = k \Leftrightarrow x = k \vee x = -k$$

$$|x| < k \Leftrightarrow x < k \wedge x > -k \Leftrightarrow -k < x < k$$

$$|x| > k \Leftrightarrow x > k \vee x < -k$$

- Para $k = 0$

$$|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Exercício 17

Resolva cada uma das seguintes condições:

a) $|x - 1| = 4$

b) $|x - 2| < 5$

c) $|3x - 1| \geq 12$

Exercício 19

Considere a função f definida por $f(x) = x^2 - 2x$.

- a) Represente graficamente f e $|f|$.
- b) Explique como se pode obter o gráfico de $|f|$ a partir do gráfico de f .

Função exponencial

Definição

Uma função da forma

$$f(x) = a^x$$

é chamada uma função exponencial, sendo $x \in \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$.

Observação

Note que em $f : x \mapsto y = a^x$

- Se $a = 0$, $f(x) = 0$, para todo o $x \in \mathbb{R}^+$, e f seria uma função constante em \mathbb{R}^+ .
- Se $a = 0$ e $x \in \mathbb{R}^-$, $f(x)$ não seria um número real.
- Se $a = 1$, $f(x) = 1$, para todo o $x \in \mathbb{R}$, e f seria uma função constante.
- Se $a < 0$, então $f(x)$ nem sempre seria um número real.
Por exemplo, se $a = -4$, $f(\frac{1}{2}) = (-4)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-4}$ que não é um número real.

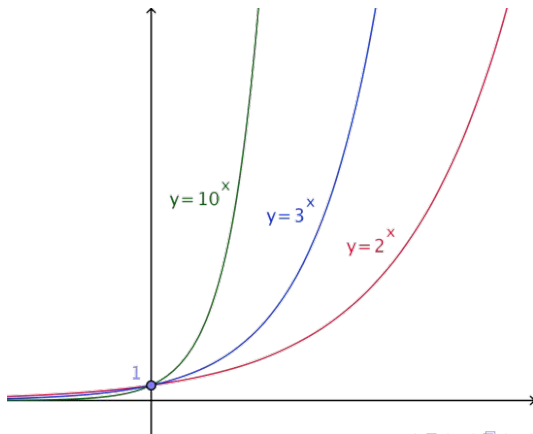
Exercício 21

Durante as últimas décadas verificou-se que a população mundial crescia 2% ao ano e que em 1992 era cerca de 6 mil milhões.

- a) Mostre que a população P pode ser dada pela expressão $P(t) = 6(1 + 0,02)^t$ com t em anos e $t = 0$ corresponde a 1992.
- b) Recorrendo à calculadora represente graficamente a função.
- c) Qual será a população em 2100 prevista para este modelo?

Propriedades das funções exponenciais

Sejam $f(x) = 2^x$; $g(x) = 3^x$ e $h(x) = 10^x$ e consideremos a sua representação gráfica no mesmo referencial:



Propriedades das funções exponenciais

- O ponto $(0, 1)$ é comum a todos os gráficos.
- Quando $x \rightarrow +\infty$, as funções tendem para $+\infty$.
- Quando $x \rightarrow -\infty$, as funções tendem para 0.

Relativamente às funções $y = a^x$, com $a > 1$, pode afirmar-se ainda que o domínio é \mathbb{R} , o contradomínio é \mathbb{R}^+ , são contínuas, injetivas e crescentes.

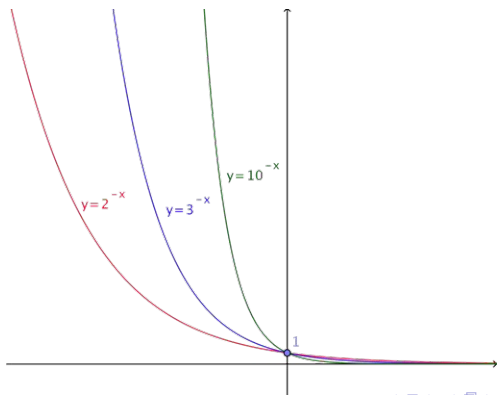
Observação

Se uma função é injetiva qualquer reta horizontal intersecta o gráfico da função no máximo num ponto.

Como obter o gráfico de $y = a^{-x}$ com $a > 1$?

Como podemos obter o gráfico da função $y = a^{-x}$ a partir do gráfico da função $y = a^x$, com $a > 1$?

Atendendo a que os dois gráficos são simétricos relativamente ao eixo das ordenadas, então:



Propriedades das funções exponenciais $f(x) = a^x$, $a > 0$ e $a \neq 1$

- 1 A função f é estritamente crescente para $a > 1$ e estritamente decrescente para $0 < a < 1$.
- 2 O gráfico da função intersecta o eixo Oy no ponto de coordenadas $(0, 1)$.
- 3 A reta de equação $y = 0$ (eixo Ox) é uma assíntota horizontal do gráfico de f . A função não tem assintotas verticais nem oblíquas.
- 4 O domínio é \mathbb{R} e o contradomínio é $]0, +\infty[$.
- 5 A função é injetiva.
- 6 A função é contínua.

Equações exponenciais

As funções exponenciais são injetivas. Assim,

Para $a > 0$ e $a \neq 1$,

se $a^{x_1} = a^{x_2}$, então $x_1 = x_2$.

Esta propriedade é utilizada para resolver equações exponenciais.

Exercício 24

Resolva em \mathbb{R} , cada uma das seguintes equações:

a) $2^{3-x} = 32$

b) $10^x - 10^{-x} = 0$

c) $3^{x^2-5x} = \frac{1}{81}$

d) $x^2 \times 5^{-x} - 3 \times 5^{-x} = 0$

Aplicação da função exponencial de base e

- O capital acumulado M obtido pelo investimento de um capital C , durante t anos, a uma taxa nominal r , com capitalizações n vezes por ano, é dado pela fórmula:

$$M = C \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}.$$

À medida que n aumenta, M aumenta, mas tem um limite. Se a capitalização fosse calculada continuamente, a fórmula

$$M = C e^{rt}$$

permitiria o cálculo do capital acumulado.

Exercício 25

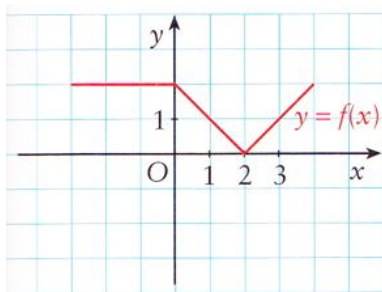
Colocaram-se 1000 euros num banco à taxa anual nominal de 4%. Calcule o capital acumulado num ano se as capitalizações forem: anuais, trimestrais, mensais, diárias, hora a hora e contínuas.

Transformações de funções

$y = f(x) + a$	$\uparrow \downarrow$	Translação de a na direção do eixo Oy
$y = f(x + a)$	$\overleftarrow{\quad}$	Translação de $-a$ na direção do eixo Ox
$y = a f(x)$		Expansão ou contração segundo o factor a na direção do eixo Oy
$y = f(ax)$		Expansão ou contração segundo o factor $\frac{1}{a}$ na direção do eixo Ox
$y = -f(x)$		Simetria em relação ao eixo Ox
$y = f(-x)$		Simetria em relação ao eixo Oy

Exercício 28

Seja f a função cuja representação gráfica é



Represente graficamente cada uma das seguintes funções:

a) $f_1(x) = f(x) - 1$;

b) $f_2(x) = f(x) + 1$;

c) $f_3(x) = f(x) - 3$;

d) $f_4(x) = f(x + 1)$;

e) $f_5(x) = f(x - 1)$;

f) $f_6(x) = f(x + 2)$;

g) $f_7(x) = 2f(x)$;

h) $f_8(x) = \frac{1}{2}f(x)$;

i) $f_9(x) = f\left(\frac{1}{2}x\right)$;

j) $f_{10}(x) = f(2x)$

Logaritmo de um número

Qual é o número a que é necessário elevar 2 para obter 8?

Como sabemos, a resposta é 3, pois $2^3 = 8$.

Diz-se que 3 é o logaritmo de 8 na base 2 e escreve-se:

$$\log_2 8 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 2^3 = 8$$

Definição

O **logaritmo** de x na base a , com $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, é o expoente a que se deve elevar a para obter x , isto é,

$$\log_a (x) = y \quad \Leftrightarrow \quad a^y = x$$

Consequências da definição:

- O logaritmo de 1 em qualquer base é 0, isto é, $\log_a(1) = 0$
- o logaritmo na base a de a é igual a 1, isto é $\log_a(a) = 1$
- Só é possível calcular o logaritmo de um número positivo.

Exercício 30

Calcule:

a) $\log_3 (27)$

b) $\log_{\frac{1}{2}} (8)$

c) $\log_2 \left(\frac{1}{16} \right)$

d) $\log_3 (1) + \log_3 \left(\frac{1}{3} \right)$

Logaritmos com bases especiais

No cálculo com logaritmos há duas bases que são usadas com maior frequência: a base 10 (também designada por base comum) e a base e (também chamada base natural). Estas bases são quase sempre suprimidas e a escrita normal é modificada:

$$\log_{10}(x) \longrightarrow \log(x)$$

$$\log_e(x) \longrightarrow \ln(x)$$

Exercício 31

Calcule:

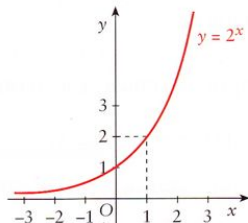
a) $\log(100)$

b) $\ln(e^4)$

c) $-\frac{1}{2} \ln(e^{\frac{1}{3}}) + 4 \log(0,001)$

Definição da função logarítmica

Consideremos a função exponencial $y = 2^x$, cujo gráfico é:



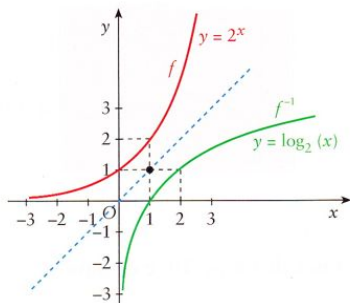
Esta função é injetiva e como tal tem inversa.

Se uma função admite **inversa** esta designa-se por f^{-1} e os gráficos de f e f^{-1} são simétricos relativamente a reta de equação $y = x$.

No caso da função exponencial $f(x) = a^x$, a função inversa designa-se por **função logarítmica**, isto é, $f^{-1}(x) = \log_a x$.

Exemplo

Consideremos $f(x) = 2^x$ e $f^{-1}(x) = \log_2(x)$



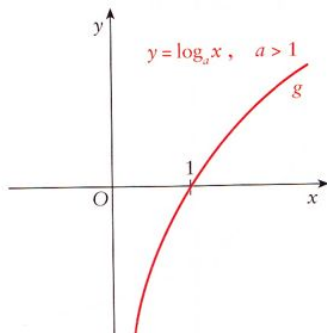
e calculemos a imagem de alguns objetos por f e por f^{-1} , para as funções representadas no gráfico.

x	0,1	0	1	2	3	4	$y = \log_2(x)$
$y = 2^x$							x

Propriedades das funções logarítmicas

Para $a > 1$

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \log_a x \end{aligned}$$



Propriedades das funções logarítmicas

- 1 $g(1) = 0$
- 2 Domínio: \mathbb{R}^+
- 3 Contradomínio: \mathbb{R}
- 4 $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$
- 5 g é estritamente crescente
- 6 $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$
- 7 $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty$

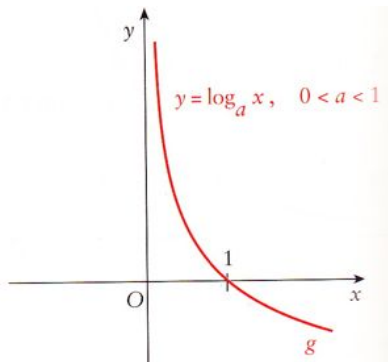
A reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical do gráfico de g

- 8 g é contínua.

Propriedades das funções logarítmicas - cont.

Se $0 < a < 1$

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \log_a x \end{aligned}$$



Propriedades das funções logarítmicas - cont.

- 1 $g(1) = 0$
- 2 Domínio: \mathbb{R}^+
- 3 Contradomínio: \mathbb{R}
- 4 $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$
- 5 g é estritamente decrescente
- 6 $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$
- 7 $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$

A reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical do gráfico de g

- 8 g é contínua.

Exercício 32

Determine o domínio de cada uma das funções:

a) $f_1(x) = 5^{2x}$

b) $f_2(x) = \left(\frac{1}{e}\right)^x$

c) $f_3(x) = \ln(x^2 - 3)$

d) $f_4(x) = \log(14 - x^2)$

Propriedades operatórias dos logaritmos

Considere x e y dois números positivos quaisquer e a é um número positivo diferente de 1.

1) **Logaritmo do produto**

O logaritmo do produto é igual à soma dos logaritmos dos fatores:

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

2) **Logaritmo de um quociente**

O logaritmo do quociente é igual à diferença entre os logaritmos dos termos:

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x : y) = \log_a(x) - \log_a(y)$$

Propriedades operatórias dos logaritmos - conclusão

3) Logaritmo de uma potência

O logaritmo de uma potência é igual ao produto do expoente pelo logaritmo da base:

$$\log_a(x^p) = p \log_a(x), \quad p \in \mathbb{R}$$

4) Mudança de base

$$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}, \quad \text{sendo } b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$$

Exercício 33

Calcule, recorrendo às propriedades dos logaritmos:

a) $\log_3(27 \times 9)$

b) $\log_2(16 : 2)$

c) $\log_2(8^5)$

d) $\log_4(1) + \log_6(36^3)$

Exercício 34

Use apenas uma vez o símbolo \ln para escrever a expressão:

a) $\ln(3) + \ln(x^2) + \ln(x), \quad (x > 0);$

b) $\ln(x^6) - \ln(y^2) + 2\ln(x), \quad (x > 0 \text{ e } y \neq 0).$

Equações exponenciais e logarítmicas

Algumas equações envolvendo logaritmos podem ser resolvidas através de uma equação exponencial equivalente e algumas equações com a incógnita em expoente podem ser resolvidas usando logaritmos.

Tal equivalência é possível atendendo a que:

$$\log_a(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad x = a^y$$

$$a^x = y \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_a(y)$$

Exercício 35

Resolva cada uma das equações:

a) $\log(x^2) = \log(2x)$

f) $3^{2x-1} = \sqrt{3}$

b) $4e^{2x} + 3 = 403$

g) $\frac{1}{2^x} = 8$

c) $\log_3(x) = 5$

h) $\log(x - 3) = \log(2x - 9)$

d) $2^x = 80$

i) $\ln(6x) = \ln(x^2 - 16)$

e) $\log(3x^2) = \log(x^3)$

j) $1000^{-\frac{3}{2}} = 0,1^x$

Exercício 36

Admita que a altura h , em metros, das plantas de uma determinada espécie é dada em função do tempo t ($t \geq 1$), em meses, por:

$$h(t) = 0,32 + 0,89 \ln(t)$$

Apresente os resultados com duas casas decimais.

a) Uma planta tem 50 *cm* de altura. Quantos meses tem a planta?

b) Mostre que, para qualquer valor de t , $h(3t) - h(t)$ é constante. Determine um valor aproximado às centésimas dessa constante e interprete esse valor no contexto do problema.

Exercício 38

A desvalorização de um automóvel de luxo é dada pela função

$$P(t) = 100 e^{-0,12 t}$$

onde P é o valor do automóvel em milhares de euros e t o tempo, em anos, decorrido após a compra.

- a) Qual é o valor do automóvel três anos após a compra?
- b) Determine x tal que, para qualquer t , $P(t + x) = \frac{1}{2}P(t)$.
Apresente o resultado arredondado às décimas e interprete o valor obtido no contexto da situação descrita.
- c) Anos após a compra, o automóvel foi vendido por 35 000 euros. Quantos anos tinha o automóvel quando foi vendido?

FUNÇÕES

Maria do Carmo Martins

Novembro de 2012

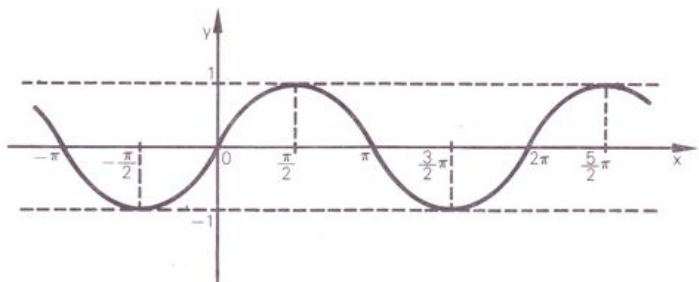
Funções trigonométricas

- Função seno

Consideremos a função real de variável real definida por:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \text{sen } x \end{aligned}$$

A representação gráfica de f é:



Função Seno - continuação

- Domínio: \mathbb{R}
- Contradomínio: $[-1, 1]$
- Paridade: f é uma função ímpar, isto é,
 $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in D_f$
- Injetividade: f não é injetiva
- Período: o período positivo mínimo é 2π
- Zeros: Todos os pontos da forma $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
- Positiva: nos intervalos $]2k\pi, \pi + 2k\pi[$, $k \in \mathbb{Z}$
- Negativa: nos intervalos $]\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi[$, $k \in \mathbb{Z}$

Função Seno - continuação

- Mínimo: -1 para $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
- Máximo: 1 para $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
- Crescente: nos intervalos $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$, $k \in \mathbb{Z}$
- Decrescente: nos intervalos $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right]$, $k \in \mathbb{Z}$
- **Equações:** Seja $a \in [-1, 1]$ e $\sin \alpha = a$. Então:

$$\sin x = a \Leftrightarrow \sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi \vee x = (\pi - \alpha) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Exercício 40

Resolva as seguintes equações:

a) $2 \operatorname{sen}(3x) = 1$

b) $\operatorname{sen}(5x) = 0$

c) $2 \operatorname{sen}(10x) = \sqrt{3}$

d) $\operatorname{sen}(2x) = -\operatorname{sen} x$

Definição

Chama-se **cossecante de x** a função definida por

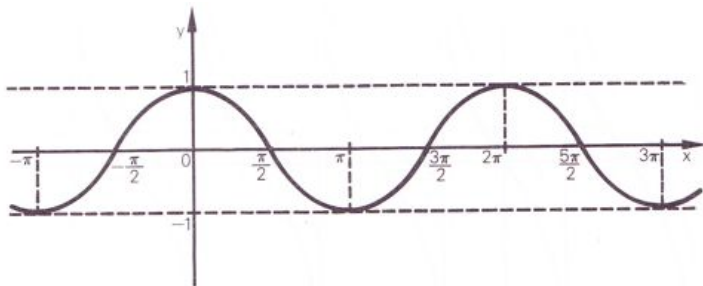
$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}.$$

Função Cosseno

Consideremos a função real de variável real definida por:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \cos x \end{aligned}$$

A representação gráfica de f é:



Função Cosseno - continuação

- Domínio: \mathbb{R}
- Contradomínio: $[-1, 1]$
- Paridade: f é uma função par, isto é, $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in D_f$
- Injetividade: f não é injetiva
- Período: O período positivo mínimo é 2π
- Zeros: Todos os pontos da forma $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
- Positiva: nos intervalos $]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi[$, $k \in \mathbb{Z}$
- Negativa: nos intervalos $]\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi[$, $k \in \mathbb{Z}$

Função Cosseno - continuação

- Mínimo: -1 para $x = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
- Máximo: 1 para $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
- Crescente: nos intervalos $[-\pi + 2k\pi, 2k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$
- Decrescente: nos intervalos $[2k\pi, \pi + 2k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$
- **Equações:** Seja $a \in [-1, 1]$ e $\cos \alpha = a$. Então:

$$\cos x = a \Leftrightarrow \cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi \vee x = -\alpha + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Exercício 41

Resolva as seguintes equações:

a) $2 \cos (3x) = 1$

b) $\cos (5x) = 0$

c) $\cos (2x) = -\cos x$

Definição

Chama-se **secante de x** à função definida por

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}.$$

Função tangente

Consideremos a função real de variável real definida por:

$$f : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = \operatorname{tg} x$$

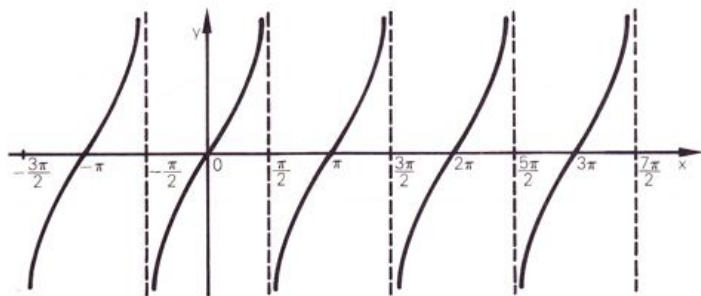
Notemos a alteração imposta ao domínio da função uma vez que

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x},$$

pelo que $\operatorname{cos} x \neq 0$.

Função tangente - continuação

A representação gráfica de f é:



Função tangente - continuação

- Domínio: $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
- Contradomínio: \mathbb{R}
- Paridade: f é uma função ímpar, isto é,
 $f(-x) = -f(x), \forall x \in D_f$
- Injetividade: f não é injetiva
- Período: O período positivo mínimo é π
- Zeros: Todos os pontos da forma $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- Positiva: nos intervalos $]k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[, k \in \mathbb{Z}$
- Negativa: nos intervalos $]\frac{\pi}{2} + k\pi, \pi + k\pi[, k \in \mathbb{Z}$

Função tangente - continuação

- Negativa: nos intervalos $]\frac{\pi}{2} + k\pi, \pi + k\pi[$, $k \in \mathbb{Z}$
- Mínimo: não tem
- Máximo: não tem
- Crescente: nos intervalos $[-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$
- Decrescente: nunca
- **Equações:** Seja $a \in \mathbb{R}$ e $\operatorname{tg} \alpha = a$. Então:

$$\operatorname{tg} x = a \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Exercício 42

Resolva a seguinte equação trigonométrica

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x = 0.$$

Função cotangente

Consideremos a função real de variável real definida por:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \cotg x \end{aligned}$$

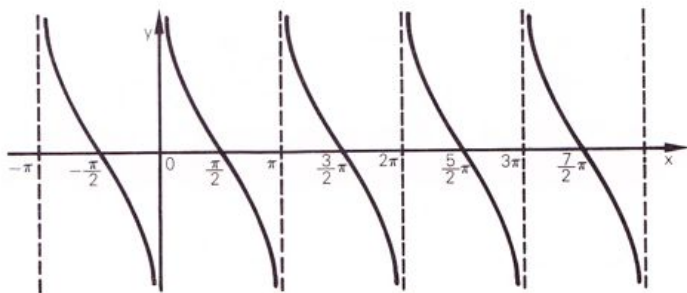
Notemos a alteração imposta ao domínio da função uma vez que

$$\cotg x = \frac{\cos x}{\sin x},$$

pelo que $\sin x \neq 0$.

Função cotangente - continuação

A representação gráfica de f é:



Função cotangente - continuação

- Domínio: $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
- Contradomínio: \mathbb{R}
- Paridade: f é uma função ímpar, isto é,
 $f(-x) = -f(x), \forall x \in D_f$
- Injetividade: f não é injetiva
- Período: O período positivo mínimo é π
- Zeros: Todos os pontos da forma $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- Positiva: nos intervalos $]k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$, $k \in \mathbb{Z}$

Função cotangente - continuação

- Negativa: nos intervalos $]\frac{\pi}{2} + k\pi, \pi + k\pi[$, $k \in \mathbb{Z}$
- Mínimo: não tem
- Máximo: não tem
- Crescente: nunca
- Decrescente: nos intervalos $[k\pi, \pi + k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$
- **Equações:** Seja $a \in \mathbb{R}$ e $\cotg \alpha = a$. Então:

$$\cotg x = a \Leftrightarrow \cotg x = \cotg \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Exercício 43

Mostre que

$$\frac{1}{\operatorname{sen} x} = \operatorname{sen} x (\cos 2\pi + \cotg^2 x).$$

Funções circulares inversas

Tendo em conta que apenas as funções injetivas admitem inversas, não podemos, à priori, falar em inversas das funções circulares.

Deste modo, definem-se restrições das funções onde sejam bijetivas e assim, podemos definir as inversas das funções circulares.

Função arco-seno

Consideremos a função real de variável real definida por:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow [-1, 1] \\ x &\mapsto f(x) = \operatorname{sen} x \end{aligned}$$

Qualquer restrição de f a um intervalo do tipo

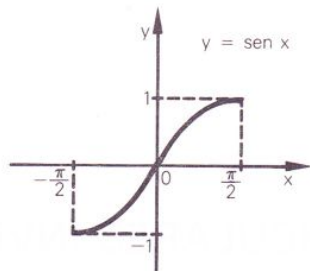
$$\left[-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right], \quad k \in \mathbb{Z}$$

é bijetiva.

Função arco-seno - continuação

De entre todas as restrições, chama-se **restrição principal** à função

$$g : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 1]$$
$$x \mapsto g(x) = \text{sen } x$$



Nos intervalos em que a inversa de $\text{sen } x$ é uma função, ela representa-se por **arcsen** x e permite obter o ângulo y cujo seno é x .

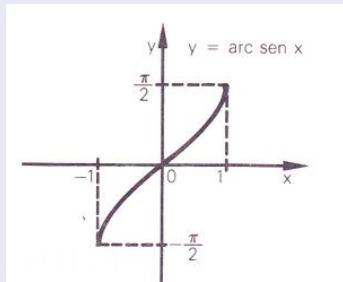
Definição da função arco-seno

Definição

Define-se a função inversa da função seno, **arco-seno**, por

$$g^{-1} : [-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$x \mapsto \arcsen x$$



Exercício 44

Calcule:

a) $\arcsen 0$

b) $\arcsen \left(\frac{1}{2}\right)$

c) $\arcsen \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

d) $\arcsen \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Exercício 45

Determine o domínio e a inversa da função definida por

$$f(x) = \arcsen(2x - 3).$$

Função arco-cosseno

O que se passa com a função seno passa-se com as restantes funções trigonométricas. Interessa apenas fixar a restrição principal para se poder definir a inversa.

Qualquer restrição da função cosseno a um intervalo do tipo

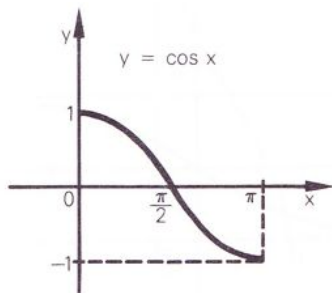
$$[k\pi, \pi + k\pi], \quad k \in \mathbb{Z}$$

é bijetiva.

Função arco-cosseno - continuação

No caso da função cosseno, considera-se como restrição principal a função

$$h : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$$
$$x \mapsto h(x) = \cos x$$



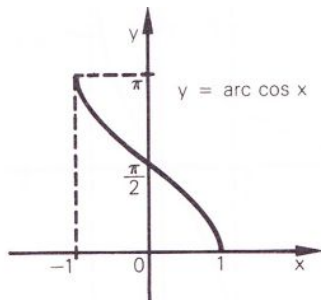
Nos intervalos em que a inversa de $\cos x$ é uma função, ela representa-se por **arccos x** e permite obter o ângulo y cujo cosseno é x .

Função arco-cosseno - continuação

Define-se a função inversa da função cosseno, **arco-cosseno**, por

$$h^{-1} : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$$

$$x \mapsto \arccos x$$



Exercício 46

Calcule:

a) $\arccos 0$

b) $\arccos \left(\frac{1}{2} \right)$

c) $\arccos \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$

d) $\arccos \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$

Exercício 47

Determine o domínio e a inversa da função definida por

$$f(x) = 3 \arccos(2x - 3).$$

Função arco-tangente

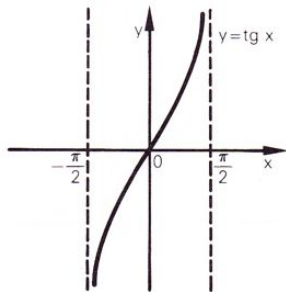
Qualquer restrição da função tangente a um intervalo do tipo

$$\left] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[\quad k \in \mathbb{Z}$$

é bijetiva.

No caso da função tangente, considera-se como restrição principal a função

$$s : \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto s(x) = \operatorname{tg} x$$



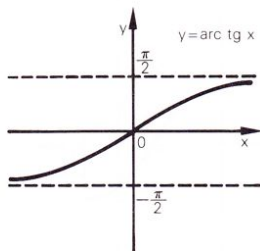
Função arco-tangente - continuação

Nos intervalos em que a inversa de $\operatorname{tg} x$ é uma função, ela representa-se por $\operatorname{arctg} x$ e permite obter o ângulo y cuja tangente é x .

Define-se a função inversa da função tangente, **arco-tangente**, por

$$s^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$$

$$x \mapsto s^{-1}(x) = \operatorname{arctg} x$$



Exercício 48

Caracterize a inversa da função definida por

$$g(x) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(x + 3) - \frac{\pi}{4}.$$

Função arco-cotangente

Qualquer restrição da função cotangente a um intervalo do tipo

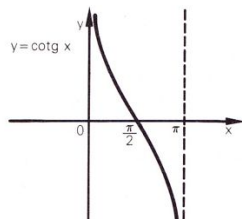
$$]k\pi, \pi + k\pi[\quad k \in \mathbb{Z}$$

é bijetiva.

No caso da função cotangente, considera-se como restrição principal a função

$$t :]0, \pi[\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto t(x) = \operatorname{cotg} x$$



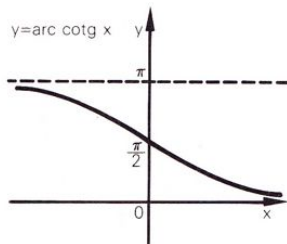
Função arco-cotangente - continuação

Nos intervalos em que a inversa de $\cotg x$ é uma função, ela representa-se por **arccotg x** e permite obter o ângulo y cuja cotangente é x .

Define-se a função inversa da função cotangente, **arco-cotangente**, por

$$t^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow]0, \pi[$$

$$x \mapsto t^{-1}(x) = \operatorname{arccotg} x$$



Exercício 49

Calcule $\operatorname{arccotg}(\sqrt{3})$.

Operações com funções

Dadas duas funções f e g podemos operar estas duas funções entre si de modo a obter novas funções.

- $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ (soma)
- $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ (diferença)
- $(fg)(x) = f(x)g(x)$ (produto)
- $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ (quociente)

Função Composta

Outra forma de operar duas funções é através da composição. A função resultante diz-se *função composta*.

Definição

Sejam f e g duas funções. A função dada por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

é chamada *função composta de f com g ou f após g* . O domínio de $f \circ g$ é o conjunto de todo o x no domínio de g , tal que $g(x)$ está no domínio de f .

$$D_{f \circ g} = \{x : x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\}$$

Definição

Se

$$f \circ g = g \circ f$$

diz-se que as funções f e g são permutáveis.

Exercício 50

Dadas as funções $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = \sin x$, determine:

a) $f \circ g$

b) $g \circ f$

Exercício 51

Averigue se as funções indicadas em cada caso são, ou não, permutáveis:

a) $f(x) = 1 - x$ e $g(x) = x - 1$

b) $f(x) = x^2$ e $g(x) = 2x + 6$

c) $f(x) = -x$ e $g(x) = \frac{1}{x}$

d) $f(x) = 4 - x^2$ e $g(x) = x^2 - 4$

Exercício 52

Dadas as funções $f(x) = \sqrt{3}x + 1$ e $g(x) = x^2 + 5$. Calcule o valor da expressão:

a) $(f \circ g)(1)$

b) $(g \circ f)(5)$

c) $(f \circ g)(-1)$

d) $(f \circ g)(x)$

e) $(g \circ f)(x)$

Exercício 53

Considere as funções:

- $c(x) = \cos x$,
- $s(x) = \sin x$,
- $t(x) = \operatorname{tg} x$,
- $k(x) = \operatorname{cotg} x$ e
- $a(x) = \frac{\pi}{4}x$.

Calcule:

a) $(c \circ a)(1)$ e $(c \circ a)(x)$

b) $(s \circ a)(2)$ e $(s \circ a)(x)$

c) $(t \circ a)(4)$ e $(t \circ a)(x)$

d) $(k \circ a)(2)$ e $(k \circ a)(x)$

CÁLCULO DIFERENCIAL

Maria do Carmo Martins

Novembro de 2013

Razão incremental

Seja $y = f(x)$ uma função real de variável real. Chama-se *razão incremental ou taxa de variação média* da função f entre x_0 e $x_1 = x_0 + h$ ao quociente (ou razão):

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Mas,

- $f(x_1) = f(x_0 + h)$ e
- $x_1 = x_0 + h \Leftrightarrow h = x_1 - x_0$

e assim,

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

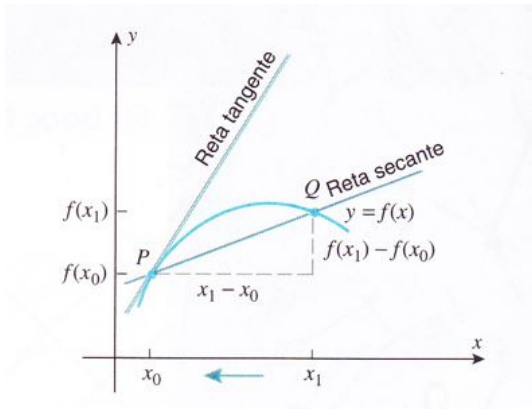
onde

Δx é o acréscimo dado à variável independente x (ou incremento)

Δy acréscimo correspondente da função.

Interpretação geométrica da razão incremental

A razão incremental $\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ representa o declive da reta secante PQ .



Derivada de uma função num ponto

Definição

Chama-se derivada da função f) no ponto x_0 ($x_0 \in D_f$), ao limite da razão incremental da função $f(x)$ entre x_0 e x quando $x \rightarrow x_0$, isto é,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Representa-se por

$$f'(x_0); \quad y'(x_0); \quad D_{f(x_0)}; \quad \left(\frac{df}{dx} \right)_{x=x_0} \quad \text{ou} \quad \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=x_0} .$$

Derivada por definição de uma função num ponto

Portanto:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

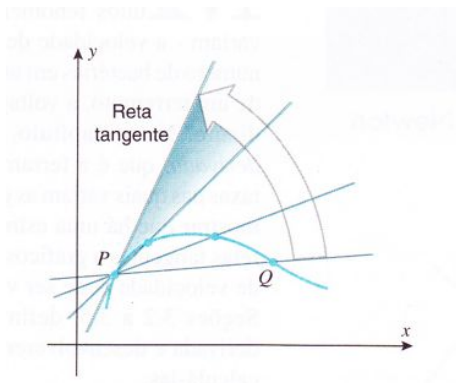
$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

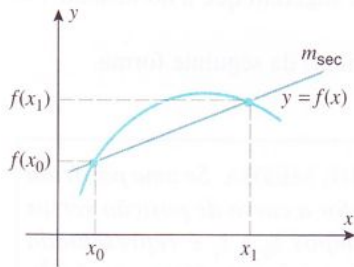
Se este limite existir (ou for infinito) diz-se que f tem derivada no ponto x_0 . Se não existir, diz-se que f não tem derivada no ponto x_0 .

Interpretação geométrica da derivada de uma função num ponto

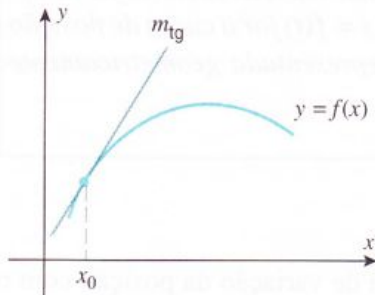
Conforme sugere a figura, o ponto Q move-se ao longo da curva em direção a P se e somente se x_1 tende para x_0 . Assim, $f'(x_0)$ representa o declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$.



Resumo- interpretações geométricas de razão incremental e derivada num ponto



m_{sec} é a taxa de variação média de y em relação a x no intervalo $[x_0, x_1]$.



m_{tg} é a taxa de variação instantânea de y em relação a x no ponto x_0 .

Função diferenciável ou derivável num ponto

Definição

Seja f uma função real de variável real e $x_0 \in D_f$. Diz-se que f é diferenciável ou derivável no ponto x_0 quando a derivada existe e é finita no ponto x_0 .

Derivada lateral à esquerda

Seja f uma f.r.v.r cujo domínio D contenha um intervalo I .

Definição

Designa-se por **derivada à esquerda da função $f(x)$ no ponto $a \in I$ ao limite lateral**

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

sempre que este limite exista (ou seja infinito).

Notação:

$$f'(a^-); \quad f'_-(a); \quad f'_e(a); \quad y'_e(a); \quad \left(\frac{df}{dx}\right)_{x=a^-}; \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a^-}; \quad Df(a^-)$$

Derivada lateral à direita

Definição

Designa-se por **derivada à direita da função $f(x)$ no ponto $a \in I$ ao limite lateral**

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

sempre que este limite exista (ou seja infinito).

Notação:

$$f'(a^+); f'_+(a); f'_d(a); y'_d(a); \left(\frac{df}{dx}\right)_{x=a^+}; \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a^+}; D_{f(a^+)}$$

Observações

- 1 As notações mais utilizadas são $f'_d(a)$ ou $f'_+(a)$ para a derivada à direita e $f'_e(a)$ ou $f'_-(a)$ para a derivada à esquerda.
- 2 Notemos que $f'(a)$ existe se e só se existirem e forem iguais $f'_e(a)$ e $f'_d(a)$.

Função diferenciável num intervalo

Seja $I = [a, b]$. A função f é diferenciável em I se, e só se,

- f é diferenciável em $]a, b[$
- f é diferenciável à direita de a
- e f é diferenciável à esquerda de b

Função derivada da função

Definição

Sejam f uma f.r.v.r e A o conjunto dos pontos onde f é diferenciável.

Designa-se por **função derivada da função** f à função que a cada $x \in A$ associa a derivada nesse ponto, $f'(x)$.

$$x \in A \longrightarrow f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Notação:

$$f'(x); \quad y'(x); \quad \frac{df}{dx}; \quad \frac{dy}{dx}; \quad D_f$$

Exercício 1

Seja $f(x) = x^2 - 1$. Calcule:

a) $f'(x)$

b) $f'(3)$

Exercício 4

Mostre que não existe a derivada da função $f(x) = |x|$ no ponto $x = 0$.

Equação da reta tangente ao gráfico da função f no ponto $(x_0, f(x_0))$

Seja f uma função que admite derivada no ponto x_0 e seja $m = f'(x_0)$. Então, a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$ define-se por:

- $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, **se $f'(x_0)$ for finito;**
- $x = x_0$, **se $f'(x_0)$ for infinito.**

Equação da normal ao gráfico da função f no ponto $(x_0, f(x_0))$

Sabemos que duas retas são perpendiculares se o declive de uma for igual ao simétrico do inverso da outra. Assim sendo,

- $y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$, se $f'(x_0) \neq 0$
- $x = x_0$, se $f'(x_0) = 0$.

Exercício 5

Escreva as equações da tangente e da normal à curva $y = x^3$ no ponto $(1, 1)$.

Teorema

Teorema

Seja f uma função real de variável real. Se f é diferenciável no ponto x_0 , então f é contínua nesse ponto.

O recíproco do teorema anterior nem sempre é válido, isto é,

$$f \text{ é contínua em } x_0 \not\Rightarrow f \text{ é diferenciável em } x_0.$$

- Dê um exemplo de uma função que seja contínua num ponto e não seja diferenciável nesse ponto.

Regras de derivação

Nesta secção vamos aprender como derivar funções sem recorrer à definição. Para tal, usaremos um conjunto de regras para determinar as derivadas sem usar diretamente a definição. Essas regras de derivação permitem-nos calcular com relativa facilidade as derivadas de polinómios, funções racionais, funções algébricas, funções exponenciais, funções logarítmicas, além das funções trigonométricas e trigonométricas inversas.

(Derivada da função constante

Teorema

(Derivada da função constante)

Se $y = f(x) = c$ (constante), então

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Exercício 7

Calcule a derivada de:

a) $f(x) = 20$

b) $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{12}$

c) $h(x) = \sqrt{152}$

d) $r(x) = \ln(16^2)$

Derivada da função potência

Teorema

(Derivada da função potência)

Se $f(x) = x^n$ então

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = (x^n)' = n x^{n-1}$$

Generalização:

Se f é uma função derivável, então

$$[f^n(x)]' = n f(x)^{n-1} f'(x).$$

Exercício 8

Calcule a derivada de:

a) x^2

e) \sqrt{x}

b) x^4

f) $\sqrt[3]{x^2}$

c) x^{125}

g) x^{-6}

d) $\frac{1}{x}$

h) x^{-14}

A regra da multiplicação por uma constante

Teorema

(A regra da multiplicação por uma constante)

Se c é uma constante e f uma função derivável, então

$$\frac{d}{dx}[c f(x)] = [c f(x)]' = c f'(x)$$

Exercício 10

Calcule a derivada de:

a) $3x^4$

b) $-2x$

c) $6x^9$

d) $-5 \sqrt{x}$

e) $\frac{2}{5} \sqrt[3]{x^2}$

f) $\sqrt{10} x^{-6}$

Derivada da soma

Teorema

(Derivada da soma) *Se f e g forem ambas deriváveis, então*

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = [f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$$

Observação

A regra da soma pode ser estendida para a soma de qualquer número de funções.

Teorema

(Derivada da diferença) *Se f e g forem ambas deriváveis, então*

$$\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = [f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x)$$

Exercício 11

Calcule a derivada de:

a) $x^8 + 12x^5 - 4x^4 + 10x^3 - 6x + 5$

b) $-2x + \sqrt{x}$.

Exercício 12

Determine os pontos da curva $y = x^4 - 6x^2 + 4$ onde a reta tangente é horizontal.

Derivada da função exponencial

Teorema

(Derivada da função exponencial)

Se $y = a^x$ com $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, então

$$y' = \frac{dy}{dx} = a^x \ln a.$$

Generalização:

Se u é uma função derivável, então

$$[a^{u(x)}]' = a^{u(x)} u'(x) \ln a$$

Exercício 13

Calcule a derivada de:

a) 2^x

b) 5^x

c) 9^{-2x}

d) 10^{x^2}

Derivada da função exponencial natural

Teorema

(Derivada da função exponencial natural)

Se $y = e^x$, então

$$y' = \frac{dy}{dx} = (e^x)' = e^x.$$

Generalização:

Se u é uma função derivável, então

$$[e^{u(x)}]' = e^{u(x)} u'(x).$$

Exercício 14

Calcule a derivada de:

a) e^{2x}

b) e^{-3x}

c) e^{-2x^3}

d) e^{x^2}

Derivada da função logarítmica

Teorema

(Derivada da função logarítmica)

Se $y = \log_a x$ com $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, então

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \ln a}.$$

Generalização:

Se f é uma função derivável, então

$$[\log_a (f(x))]' = \frac{f'(x)}{f(x) \ln a}$$

Exercício 16

Calcule a derivada de:

a) $\log_2(x)$

b) $\log_5(3x)$

c) $\log_8(x^2 + x)$

d) $\log_{\frac{1}{3}}(6x^5 + 2)$

Derivada da função logarítmica de base e

Teorema

(Derivada da função logarítmica de base e)

Se $y = \ln x$, então

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}.$$

Generalização:

Se f é uma função derivável, então

$$[\ln(f(x))]' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Exercício 17

Calcule a derivada de:

a) $\ln(3x)$

b) $\ln(4x^7)$

c) $\ln(x^2 + x)$

d) $\ln(6x^5 + 2)$

Derivada do produto

Teorema

(Derivada do produto)

Se f e g são diferenciáveis, então

$$\frac{d}{dx}[f(x) g(x)] = [f(x) g(x)]' = f'(x) g(x) + f(x) g'(x).$$

Exercício 18

Calcule a derivada de

a) $x e^x$

b) $x^4 5^x$

c) $x^2 \ln(x^2 + x)$

Derivada do Quociente

Teorema

(Derivada do Quociente) *Sejam f e g são diferenciáveis, então*

$$\frac{d}{dx} \left[\left(\frac{f}{g} \right) (x) \right] = \left(\frac{f}{g} \right)' (x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}$$

Derivada do Quociente em que o numerador é 1

Teorema

Derivada do Quociente em que o numerador é 1

Se g é diferenciável e $g(x) \neq 0$, então

$$\frac{d}{dx} \left[\left(\frac{1}{g} \right) (x) \right] = \left(\frac{1}{g} \right)' (x) = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}.$$

Exercício 20

Calcule a derivada de:

a) $\frac{1}{x}$

d) $\frac{e^x}{x^2}$

b) $\frac{1}{e^x + x}$

e) $\frac{x^2 + x - 2}{x^3 + 6}$

c) $\frac{1}{\log(x)}$

f) $\frac{x e^x}{x^2 + 1}$

Derivada da função composta

Teorema (Derivada da função composta)

Sejam $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : f(A) \rightarrow \mathbb{R}$, tais que f é diferenciável em x_0 e g é diferenciável em $f(x_0)$. Então, $g \circ f$ é diferenciável em x_0 , tendo-se

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

Exercício 21

Sendo $f(x) = x^2$ e $g(x) = \ln(6x)$, calcule:

a) $(f \circ g)'(x)$

b) $(f \circ g)'(1)$

c) $g \circ f)'(x)$

Derivada da função inversa

Teorema

(Derivada da função inversa)

Sejam $y = f(x)$ uma função diferenciável em A com $f'(x)$ não nula em A e $x = f^{-1}(y) = g(y)$ a sua inversa. Então,

$$g'(y) = (f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)}$$

Observação

O teorema da derivada da função inversa consiste em

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}.$$

Exercício 22

Aplicando o teorema da derivada da função inversa, calcule a derivada de $f(x) = \ln(3x + 1)$.

Exercício 23

Sabe-se que f é uma f.r.v.r e que $f(4) = 5$ e $f'(4) = -2$. Calcule $(f^{-1}(5))'$.

Derivada da exponencial-potência

Teorema

(Derivada da exponencial-potência)

Se $y = u(x)^{v(x)}$, com $u(x) > 0$, então

$$y' = \frac{dy}{dx} = \underbrace{v(x) u^{v(x)-1}(x) u'(x)}_{\text{regra da potência}} + \underbrace{u^{v(x)}(x) \ln(u(x)) v'(x)}_{\text{regra da exponencial}}.$$

Exercício 24

Calcule, simplificando, a derivada das seguintes funções:

a) x^x

b) x^{e^x}

c) $(\sin x)^{\cos x}$

Derivadas das funções circulares diretas

Teorema

(Derivada do seno)

Se $y = \operatorname{sen} x$, então $y' = \cos x$

Generalização:

$$[\operatorname{sen}(f(x))]' = \cos(f(x)) f'(x)$$

Teorema

(Derivada do cosseno)

Se $y = \cos x$, então $y' = -\operatorname{sen} x$

Generalização:

$$[\cos(f(x))]' = -\operatorname{sen}(f(x)) f'(x).$$

Derivadas das funções circulares diretas

Teorema

(Derivada da tangente)

Se $y = \operatorname{tg} x$, então $y' = \sec^2 x$

Generalização:

$$[\operatorname{tg}(f(x))]' = \sec^2(f(x)) f'(x).$$

Teorema

(Derivada da cotangente)

Se $y = \operatorname{cotg} x$, então $y' = -\operatorname{cosec}^2 x$

Generalização:

$$[\operatorname{cotg}(f(x))]' = -\operatorname{cosec}^2(f(x)) f'(x).$$

Derivadas das funções circulares diretas

Teorema

(Derivada da secante)

Se $y = \sec x$, então $y' = \sec x \operatorname{tg} x$

Generalização:

$$[\sec (f(x))]' = \sec (f(x)) \operatorname{tg} (f(x)) f'(x).$$

Teorema

(Derivada da cossecante)

Se $y = \operatorname{cosec} x$, então $y' = -\operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x$

Generalização:

$$[\operatorname{cosec} (f(x))]' = -\operatorname{cosec} (f(x)) \operatorname{cotg} (f(x)) f'(x).$$

Exercício 25

Calcule a derivada das seguintes funções:

a) $\sin(3x^2)$

f) $\operatorname{cosec}(3x^2)$

b) $\cos(3x^2)$

g) $\sin(x^2 + 1) - \cos(x^3 + x)$

c) $\operatorname{tg}(3x^2)$

h) $\sin(x^5 + e^x) \operatorname{tg}(3x^2)$

d) $\operatorname{cotg}(3x^2)$

i) $\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$

e) $\sec(3x^2)$

j) $\frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x}{\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x}$

Derivadas das inversas das funções circulares

Teorema

(Derivada do arco-seno)

Se $y = \arcsen x$, então $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Generalização:

$$[\arcsen (f(x))]' = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$$

Derivada do arco-cosseno

Teorema

Se $y = \arccos x$, então $y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Generalização:

$$[\arccos(f(x))]' = -\frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}.$$

Derivada do arco-tangente

Teorema

Se $y = \operatorname{arctg} x$, então $y' = \frac{1}{1+x^2}$

Generalização:

$$[\operatorname{arctg} (f(x))]' = \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}.$$

Derivada do arco-cotangente

Teorema

Se $y = \operatorname{arccotg} x$, então $y' = -\frac{1}{1+x^2}$

Generalização:

$$[\operatorname{arccotg}(f(x))]' = -\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}.$$

Exercício 26

Calcule a derivada das seguintes funções:

a) $\arcsen(3x^2)$

b) $\arccos(3x^2)$

c) $\arctg(3x^2)$

d) $\operatorname{arccotg}(3x^2)$

e) $\arctg(3x^2)$

Derivada de ordem n

Seja f uma função diferenciável num intervalo. Então:

$$f'(x) \quad \text{primeira derivada}$$

$$(f'(x))' = f''(x) \quad \text{segunda derivada ou derivada de segunda ordem}$$

$$(f''(x))' = f'''(x) \quad \text{terceira derivada ou derivada de terceira ordem}$$

$$(f'''(x))' = f^{(4)}(x) \quad \text{quarta derivada ou derivada de quarta ordem}$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$(f^{(n-1)}(x))' = f^{(n)}(x) \quad \text{derivada de ordem } n$$

Notação:

$$f^{(n)}(x); \quad y^{(n)}; \quad \frac{d^n y}{dx^n}; \quad D^n y; \quad D^n f$$

Exercício 27

Determine a derivada de ordem n das seguintes funções:

a) $f(x) = 5x^3 - 3x^2 + 4x - 3$

b) $f(x) = e^{ax}$

c) $f(x) = \frac{1}{x}$

d) $f(x) = \frac{1}{1-x}$

CÁLCULO DIFERENCIAL

Maria do Carmo Martins

Novembro de 2012

Função regular

Definição

*Diz-se que uma função é **regular** no intervalo fechado e limitado $[a, b]$, se é contínua em $[a, b]$ e diferenciável em $]a, b[$.*

Teorema de Rolle

Teorema

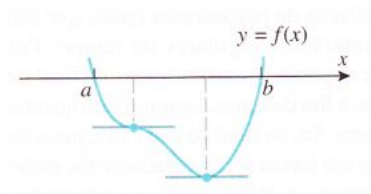
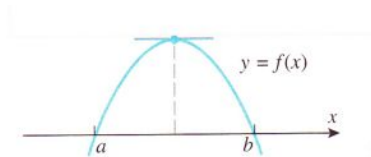
Seja f uma função que satisfaça as seguintes hipóteses:

- ❶ *f é contínua no intervalo fechado $[a, b]$.*
- ❷ *f é diferenciável no intervalo aberto $]a, b[$.*
- ❸ *$f(a) = f(b)$*

Então existe um número c em $]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$.

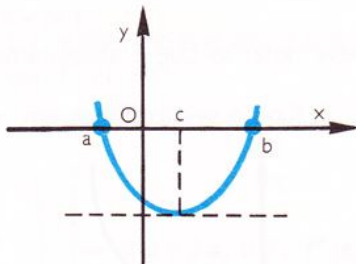
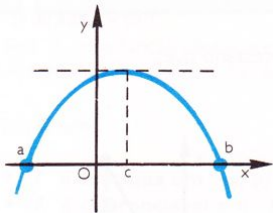
Interpretação geométrica do Teorema de Rolle

O Teorema de Rolle garante que o gráfico de f admite uma *tangente horizontal* num ponto interior de $]a, b[$. Ilustremos:



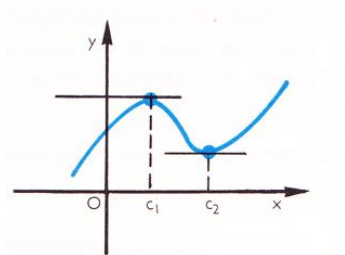
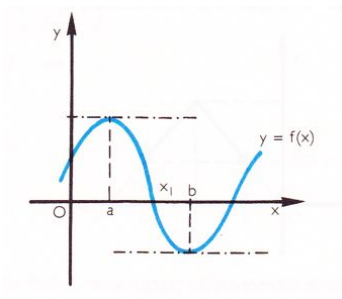
Corolário 1

Entre dois zeros de uma função (diferenciável) há pelo menos um zero da derivada.



Corolário 2

Entre dois zeros consecutivos da derivada de uma função (diferenciável) existe, quanto muito, um zero da função.



Exercício 28

Considere a f.r.v.r definida por $f(x) = 2x^2 - 8x + 3$.

a) Mostre que a função f no intervalo $[1, 3]$ verifica as condições do Teorema de Rolle.

b) Calcule um $c \in]1, 3[$, tal que $f'(c) = 0$.

Teorema de Lagrange

Teorema

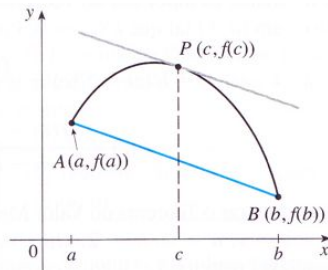
(Teorema de Lagrange ou do Valor Médio de Lagrange ou dos Acréscimos Finitos)

Seja f uma função real de variável real regular em $[a, b]$. Então

$$\exists c \in]a, b[: f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Interpretação geométrica do Teorema de Lagrange

Geometricamente o Teorema de Lagrange significa que, sendo $A(a, f(a))$ e $B(b, f(b))$ dois pontos do gráfico de f , existe um ponto $P(c, f(c))$ onde a tangente de f é paralela à corda $[AB]$.



Exercício 31

Determine o ponto M em que a tangente à curva $y = x^2$ é paralela à corda que une os pontos $A(1, 1)$ e $(2, 4)$.

Exercício 33

Recorrendo ao Teorema de Lagrange, mostre que:

a) $e^x > 1 + x$, com $x > 0$;

b) $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} < \frac{1}{2\sqrt{x}}$, com $x > 0$.

Teorema de Cauchy

Teorema

Sejam f e g duas f.r.v.r. regulares em $[a, b]$. Se

- $g(a) \neq g(b)$;
- $f'(x)$ e $g'(x)$ não se anulam simultaneamente em $]a, b[$,

então

$$\exists c \in]a, b[: \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Exercício 34

Considere $f(x) = 3x^2 + 3x + 1$ e $g(x) = x^2 - 4x + 2$ no intervalo $[0, 1]$. Calcule o valor de $c \in]0, 1[$ tal que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(1) - f(0)}{g(1) - g(0)}.$$

Indeterminações

A “Álgebra dos limites” é o conjunto de regras operatórias para o cálculo de limites. Quando a aplicação direta destas regras conduz a

$$\infty - \infty; \quad 0 \times \infty; \quad \frac{0}{0}; \quad \frac{\infty}{\infty}; \quad 1^{\infty}; \quad \infty^0; \quad 0^0$$

dizemos que “há indeterminação”, o que significa que estas regras são insuficientes para se concluir sobre a existência, ou não existência, de limite.

”Levantar a indeterminação” consiste em “descobrir” o valor do limite, caso ele exista, recorrendo a um processo específico para cada caso, mais ou menos engenhoso, conforme a situação.

Regra de Cauchy

Se as funções f e g são diferenciáveis no intervalo aberto I , se a é um dos extremos de I , se $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in I$,

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ e existir $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, então,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Observação

- 1 Este corolário é aplicável quando a é um ponto impróprio ($+\infty$ ou $-\infty$);
- 2 É igualmente aplicável no levantamento de indeterminações do tipo $\frac{\infty}{\infty}$, seja a finito ou infinito;
- 3 Se $f'(x)$ e $g'(x)$ tendem conjuntamente para zero, quando x tende para a , e se, à função $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ é aplicável a Regra de Cauchy, vem:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

Isto é, podemos aplicar a Regra de Cauchy tantas vezes quantas as necessárias para levantar a indeterminação.

Em suma:

- A Regra de Cauchy permite, de um modo geral, levantar as indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$.
- As indeterminações do tipo $\infty - \infty$ e $0 \cdot \infty$ reduzem-se aos casos anteriores.
- As indeterminações do tipo 0^0 , 1^∞ e ∞^0 levantam-se recorrendo aos logaritmos.

Exercício 35

Calcule cada um dos seguintes limites, indicando, sempre que possível, o tipo de indeterminação existente:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{x^2 - 1}$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 + 1}$

j) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$

k) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{3}{x - 2} - \frac{12}{x^2 - 4} \right)$

m) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$

Representação gráfica de funções

O esboço gráfico de uma função f é um problema que em geral se resume em determinar:

- O domínio de existência de f ;
- Os pontos de intersecção com os eixos;
- Os pontos de descontinuidade;
- Os intervalos de monotonia e extremos da função;
- Concavidade e pontos de inflexão;
- Assintotas do gráfico.

Exercício

Faça o estudo da função f e esboce o seu gráfico, sendo

$$f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 1}.$$

Fórmulas de Taylor e de Maclaurin

As fórmulas de Taylor e de Maclaurin possibilitam o cálculo aproximado de algumas funções logarítmicas, exponenciais e trigonométricas a partir de uma função polinomial.

Fórmulas de Taylor

Definição

Seja f uma função contínua num intervalo aberto I e diferenciável até à ordem $(n + 1)$ num ponto $a \in I$.

Então, para todo o $x \in I$,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

Esta fórmula designa-se por fórmula de Taylor de f em torno do ponto a e a parcela $R_n(x)$ designa o resto de ordem n de $f(x)$ e pode ser dado por

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c),$$

onde $a < c < x$, desde que f seja diferenciável até à ordem $(n + 1)$ para todo o $x \in I$.

Fórmula de Maclaurin

Se $a = 0$ a fórmula de Taylor passa a chamar-se fórmula de Maclaurin, tendo-se:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x)$$

Exercício 41

Determine os polinômios de quarto grau em $(x - a)$ para aproximar as funções:

a) e^x para $a = 0$;

b) $\sin x$ para $a = \frac{\pi}{2}$

c) $\log x$ para $a = 1$;

d) $\operatorname{tg} x$ para $a = 0$.

Ilustração - Aproximação de $f(x) = e^x$

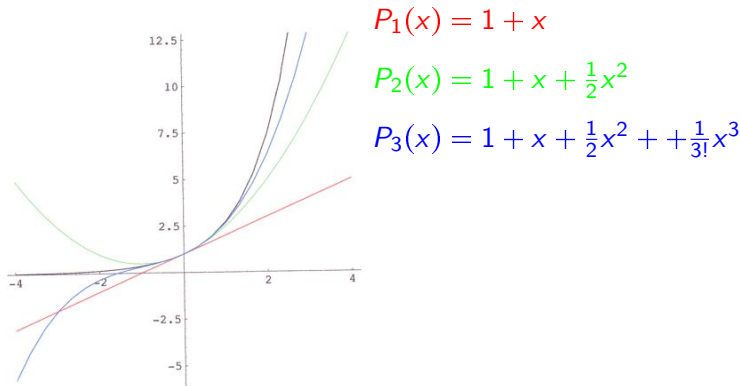


Gráfico de $f(x) = e^x$ e seus polinômios de Taylor de ordem 1 (vermelho), 2 (verde) e 3 (azul) em $x_0 = 0$.

Exercício 42

a) Escreva a função $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - x + 3$ como um polinómio nas potências de $(x - 1)$.

b) Aplique a fórmula de Taylor para exprimir o polinómio

$$f(x) = 4x^3 + 5x^2 - 2x + 1$$

como um polinómio nas potências de $(x + 2)$.

Estudo dos extremos de uma função recorrendo à fórmula de Taylor

Sejam f uma função com derivadas até à ordem n contínuas num intervalo $]a, b[$ e $c \in]a, b[$ tal que

$$f'(c) = f''(c) = \dots = f^{(n-1)}(c) = 0$$

com $f^{(n)}(c) \neq 0$. Então:

- 1 Se n é par e $f^{(n)}(c) < 0$, então a função tem um máximo no ponto $x = c$;
- 2 Se n é par e $f^{(n)}(c) > 0$, então a função tem um mínimo no ponto $x = c$;
- 3 Se n é ímpar, então a função não tem extremo no ponto $x = c$.

Exercício 43

Recorrendo à fórmula de Taylor, determine os extremos das seguintes funções:

a) $f(x) = x^4 - 4x^3$;

b) $f(x) = \frac{x^4}{6} + \frac{x^3}{3}$;

c) $f(x) = \frac{x^3}{1 - x^2}$.

Método de Newton ou método de Newton-Raphson

Maria do Carmo Martins

Dezembro de 2013

Método de Newton ou método de Newton-Raphson

Sem recorrer à calculadora gráfica como determinar aproximações para os zeros de uma função?

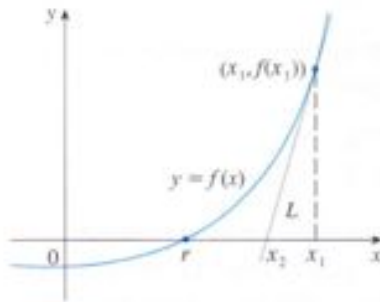
Um corolário do Teorema de **Bolzano** (também conhecido por **Teorema do Valor intermédio**) afirma que:

“se f é uma função contínua em $[a, b]$ e se $f(a)$ e $f(b)$ tiverem sinais contrários, então f tem pelo menos um zero entre a e b ”.

No entanto, nada adianta quanto ao valor desse zero!

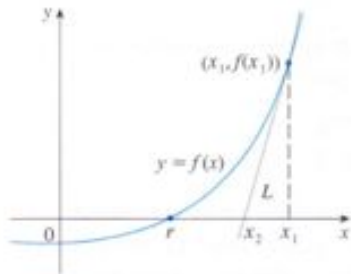
Método de Newton - cont.

A geometria que está subjacente ao método de Newton está ilustrada na figura seguinte, onde a raiz que *pretendemos* é r .



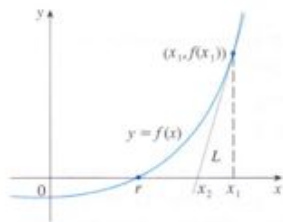
Começamos com uma primeira aproximação x_1 .

Método de Newton - cont.



Consideremos a reta tangente L à curva $y = f(x)$ no ponto $(x_1, f(x_1))$ e seja x_2 a interseção de L com o eixo Ox .

Método de Newton - cont.



O método de Newton é baseado na suposição de que o gráfico de f e a reta tangente em $(x_1, f(x_1))$ intersectam o eixo Ox em pontos próximos.

Uma vez que podemos determinar o ponto de interseção da reta tangente com o eixo Ox , podemos usá-lo como uma segunda estimativa para o zero de f .

Método de Newton - cont.

Como vimos, a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x_1, f(x_1))$ é:

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1),$$

Ora, sendo x_2 a interseção de L com o eixo Ox , fazemos $y = 0$ e obtemos

$$0 - f(x_1) = f'(x_1)(x_2 - x_1).$$

Se $f'(x_1) \neq 0$, podemos isolar x_2 nessa equação:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Usamos x_2 como segunda aproximação de r .

Método de Newton - cont.

A seguir repetimos o procedimento com x_1 substituído por x_2 , usando a reta tangente em $(x_2, f(x_2))$. Isso dá uma terceira aproximação:

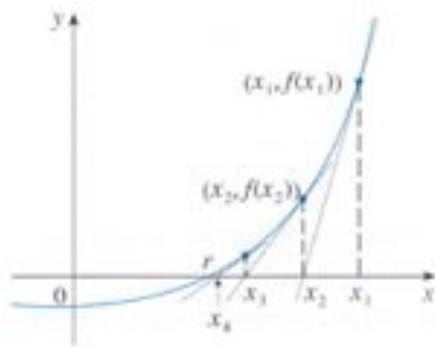
$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}.$$

Se repetirmos este processo, obteremos uma sequência de aproximações

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \dots$$

conforme mostra a figura seguinte:

Método de Newton - cont.



Método de Newton - cont.

Em geral, se x_n for a n -ésima aproximação e $f'(x_n) \neq 0$, então a aproximação seguinte é dada por

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Se os números x_n ficarem cada vez mais próximos de r à medida que n cresce, dizemos que a sequência **converge** para r e escrevemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = r.$$

Exercício 44

Começando com $x_1 = 2$, encontre a terceira aproximação x_3 para a raiz da equação $x^3 - 2x - 5 = 0$.

Exercício 45

Use o método de Newton para determinar $\sqrt[6]{2}$ com precisão de 8 casas decimais e considere $x_1 = 1$ como primeira aproximação.

Nos casos até agora considerados a sequência de aproximações sucessivas foi sempre convergente para a raiz desejada. Contudo, em certas circunstâncias a **sequência pode não convergir**.

Observação - continuação

Por exemplo, a função $f(x) = \sqrt[3]{x}$ não é diferenciável em $x = 0$. Por essa razão não é possível utilizar o método de Newton, pois iríamos obter uma sucessão divergente. Vejamos:

como

$$f'(x) = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}$$

teríamos

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}x_n^{-\frac{2}{3}}} = x_n - 3x_n^{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}} = 2x_n$$

e, conseqüentemente, as iterações irão afastar-se de zero em vez de convergirem para esse ponto.

Como foi realçado o método de Newton é um processo de aproximar um gráfico usando uma reta tangente. Vejamos agora, outras situações nas quais o gráfico da função pode ser aproximado por uma linha reta.

Consideremos uma função f , diferenciável em $x = c$. Como sabemos, a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(c, f(c))$ é

$$y = f'(c)(x - c) + f(c)$$

e é chamada *aproximação pela reta tangente de f em c* . Sendo c constante, y é uma função linear de x . Além disso, restringindo os valores de x a ficarem suficientemente próximos de c , os valores de y podem ser usados como aproximações dos valores da função f .

Diferenciais - continuação

Quando a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(c, f(c))$,

$$y = f'(c)(x - c) + f(c)$$

é usada como uma aproximação ao gráfico de f , a quantidade $x - c$ é chamada a **variação de x** , e é denotada por Δx . Quando Δx é pequena, a **variação em y** (denotada por Δy) pode ser aproximada por

$$\Delta y = f(c + \Delta x) - f(c) \approx f'(c)\Delta x$$

A quantidade Δx é denotada por dx e é chamada **diferencial de x** . A expressão $f'(c) dx$ é denotada por dy e é chamada **diferencial de y** .

Diferencial - definição

Definição

Seja $y = f(x)$ uma função diferenciável num intervalo aberto contendo x . A **diferencial de x** é qualquer número real não nulo, enquanto a **diferencial de y** é:

$$dy = f'(x) dx.$$

Exercício 48

Dado $y = 4x^2 - 3x + 1$, determine Δy e dy para:

a) qualquer x e Δx ;

b) $x = 2$, $\Delta x = 0,1$;

c) $x = 2$, $\Delta x = 0,01$;

d) $x = 2$, $\Delta x = 0,001$.

e) Calcule $\Delta y - dy$ para cada uma das alíneas anteriores. O que conclui?

Exercício 50

Compare os valores de Δy e dy se $y = x^3 + x^2 - 2x + 1$ e x variar:

a) de 2 para 2,05.

b) de 2 para 2,01.

Problemas de otimização

Os métodos estudados nessa secção para encontrar os valores extremos têm aplicações práticas em muitas situações do dia a dia. Como **maximizar** áreas, volumes e lucros e **minimizar** distâncias, tempo e custos?

Na solução desses problemas práticos, o maior desafio está geralmente em converter o problema num problema de otimização matemática, determinando a função que deve ser maximizada ou minimizada.

Exercício 52

Um fazendeiro tem 1 200m de cerca e quer cercar um campo retangular que está na margem de um rio. Ele não precisa de cerca ao longo do rio. Quais são as dimensões do campo que tem maior área?

Exercício 53

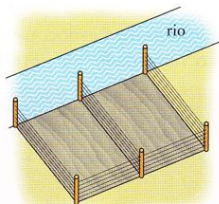
Uma lata cilíndrica é feita para receber um litro de óleo. Quais as dimensões que minimizarão o custo do metal para produzir a lata?

Exercício 54

Determine a área do maior retângulo que pode ser inscrito num semi-círculo.

Exercício 55

Um agricultor tem 810 euros para gastar na vedação de duas cercas contíguas, retangulares e iguais, junto a um rio, como se mostra na figura:



A vedação dos três lados perpendiculares ao rio custa 9 euros o metro, enquanto que vedar o lado paralelo ao rio custa 8 euros o metro.

Quais devem ser as dimensões das cercas de modo que a área destas seja máxima?