

1. GEOMETRIA no PLANO

1.1 CONCEITOS BÁSICOS

Maria do Carmo Martins

Fevereiro de 2013

“A geometria é mais do que definições; deve contemplar a descrição de relações e de raciocínios, a construção de justificações e de demonstrações”.

Os gregos expandiram e organizaram lógica e, dedutivamente, o conhecimento geométrico existente até à época. Salientam-se:

- Tales de Mileto (625-547 a.C.);
- Pitágoras de Samos (cerca de 550 a.C.);
- Arquimedes (287-212 a.C.);
- Euclides (cerca de 295 a.C.)

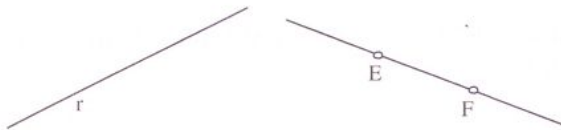
Termos Primitivos - ponto e reta

Desde muito cedo que os nomes “pontos” e “retas” fazem parte do nosso vocabulário e entram naturalmente em frases que construímos. São considerados **termos primitivos**.

- **Ponto P** - usa-se letras maiúsculas do alfabeto latino

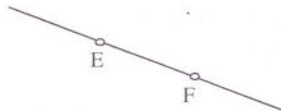
. *P*

- **reta r** ou **EF** - usa-se letras minúsculas do alfabeto latino ou letras maiúsculas dos pontos que definem a reta.

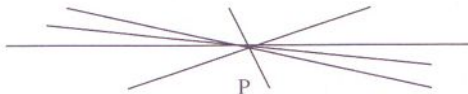


reta - continuação

- Dois pontos distintos determinam uma única reta.



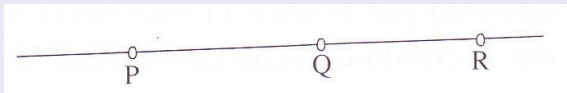
- Se os pontos não forem distintos, ie., se for um único ponto, por esse ponto pode passar uma infinidade de retas, que forma um **feixe de retas**.



Pontos colineares

Definição

Os pontos situados sobre a mesma reta dizem-se **colineares**.



Os pontos P , Q e R são colineares.

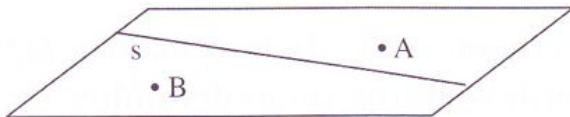
Exercício 1 - Complete:

Dois pontos são _____ .

Semiplanos

Ao traçar uma reta s no plano este fica dividido em duas partes que se designam por **semiplanos**.

Podem considerar-se dois semiplanos de fronteira s .



Um semiplano tem fronteira s e contém o ponto A ;
o outro semiplano tem fronteira s e contém o ponto B .

Introdução à semirreta



Sabe-se que um ponto O de uma reta $A'A$ a divide em duas **semirretas** sendo O a *origem comum* de ambas.

A reta $A'A$ diz-se **reta suporte** das duas semirretas.

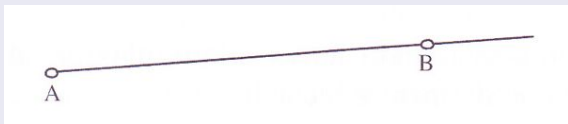
Distingue-se uma semirreta da *oposta* indicando em cada uma delas um outro ponto:

- a semirreta $\dot{O}A$ (origem em O e passando por A);
- a semirreta $\dot{O}A'$ (origem em O e passando por A').

Semirreta

Definição

A **semirreta** \dot{AB} é o conjunto dos pontos A , B e de todos os pontos X da reta AB , situados entre A e B ou tais que B se situa entre A e X ($A - X - B$ ou $A - B - X$).



Exercício 2

Complete:

- 1 A semirreta tem início mas não tem _____.
- 2 O ponto A diz-se a _____ da semirreta $\dot{A}B$.
- 3 Não podemos trocar a ordem dos pontos visto que o _____ ponto designa a origem da semirreta:
 $\dot{A}B \neq \underline{\hspace{2cm}}$.

Atividade 1

Indique o valor lógico das seguintes afirmações e justifique adequadamente a sua resposta:

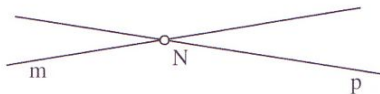
Quando intersectamos duas semirretas podemos ter:

- 1 um ponto;
- 2 uma semirreta;
- 3 um segmento de reta;
- 4 um conjunto vazio;
- 5 uma reta.

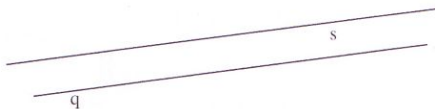
Posição relativa de duas retas

Quando no plano se consideram duas retas, elas podem ou não ter pontos comuns.

- Quando têm apenas um ponto comum dizem-se **retas concorrentes**.



- Quando não têm pontos comuns ou têm todos os pontos comuns dizem-se **retas paralelas**.



As retas q e s são paralelas (estritamente).

Retas paralelas

- Quando as retas não têm pontos comuns dizem-se **retas estritamente paralelas**.
- No caso de terem todos os pontos comuns dizem-se **retas coincidentes**.



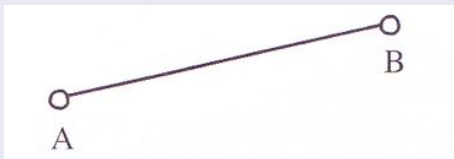
Exercício 3 - Complete:

- 1 Qualquer reta é paralela a _____
- 2 Qualquer reta é coincidente _____

Segmento de reta

Definição

Segmento de reta $[AB]$ é o conjunto dos pontos A , B e de todos os pontos da reta AB situados entre A e B .



Exercício 4

Complete:

- 1 Um segmento de reta tem _____ e _____ .
- 2 Os pontos A e B dizem-se os pontos _____ do segmento de reta.
- 3 O segmento de reta $[AB]$ também se pode designar por _____.

Comprimento de um segmento de reta. Segmentos de reta congruentes.

Definição

O **comprimento do segmento de reta** $[AB]$ é a *distância entre os pontos extremos A e B* e representa-se por

$$\overline{AB} = d(A, B).$$

Definição

Dois segmentos de reta dizem-se **congruentes** ou **geometricamente iguais** se têm o mesmo comprimento.

Atividade 2

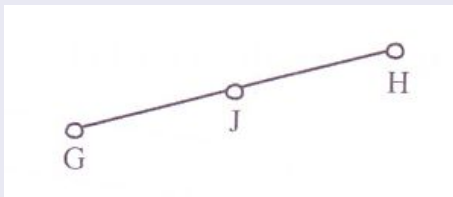
Considere na reta s dois pontos distintos A_1 e A_2 .

- 1 Quantos segmentos de reta é possível distinguir?
- 2 Aumente progressivamente o número de pontos da reta e conte o número de segmentos de reta distintos.
- 3 Para n pontos distintos (colineares) quantos segmentos de reta pode contar?

Ponto Médio

Definição

Dados dois pontos G e H , chama-se **ponto médio do segmento** $[GH]$ a um ponto J desse segmento tal que $\overline{GJ} = \overline{JH}$



Observação 1

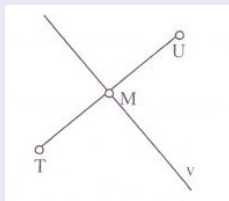
Observações:

- 1 Dado um segmento de reta, ele tem apenas um único ponto igualmente distanciado dos pontos extremos.
- 2 No plano é possível encontrar outros pontos igualmente distanciados dos extremos do segmento de reta considerado. Esses pontos formam uma reta que é a *mediatriz* do segmento.

Mediatriz de um segmento

Definição

Mediatriz de um segmento de reta é a reta formada pelos pontos do plano que estão a igual distância dos pontos extremos do segmento.



A reta v é a mediatriz do segmento de reta $[TU]$.
 M é o ponto médio do segmento de reta $[TU]$.

Atividade 3

Comente a afirmação:

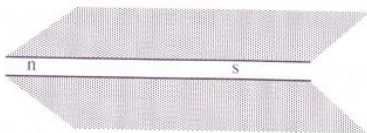
“Se a reta v é a mediatriz de $[AB]$, então $[AB]$ é o único segmento de reta de que a reta v é a mediatriz”.

Podemos intersectar vários elementos geométricos.

- Quando intersectamos duas retas podemos obter:
 - um ponto, se as retas são concorrentes;
 - o conjunto vazio, se as retas forem paralelas (estritamente);
 - uma reta, se as retas iniciais são coincidentes.
- O que obtemos quando intersectamos dois semiplanos?

caso 1: As retas fronteiras dos semiplanos são paralelas.

- Se os semiplanos são disjuntos, a intersecção é o conjunto vazio.



n e s são estritamente paralelas.

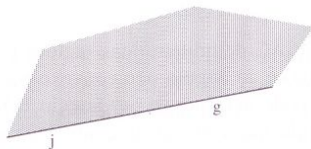
- Se os semiplanos têm em comum a reta fronteira, a intersecção é a reta fronteira.



n e s são coincidentes.

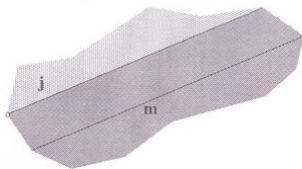
caso 1 - continuação

- Se os semiplanos são coincidentes, a intersecção é o próprio semiplano.



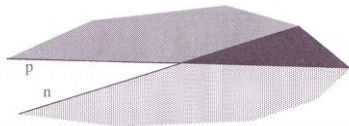
j e g são coincidentes.

- A intersecção dos semiplanos é uma “banda” plana cuja fronteira é constituída por duas retas paralelas.



j e m são estritamente paralelas.

caso 2: As retas fronteiras dos semiplanos são concorrentes.



n e p são concorrentes.

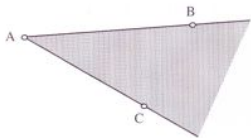
A intersecção dos semiplanos é a região plana assinalada a preto. Esta região é designada por **ângulo convexo**.

Se nos referíssemos à reunião destes semiplanos, obteríamos um ângulo não convexo.

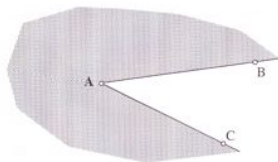
Definição

Ângulo é o conjunto dos pontos da região plana cuja fronteira são duas semirretas com origem comum.

Ângulo convexo e não convexo



Ângulo convexo



Ângulo não convexo

As duas semirretas \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} delimitam duas regiões planas.

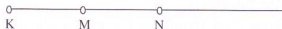
- O ângulo convexo pode designar-se por ângulo BAC ou por ângulo CAB .
- Sempre que nos referirmos ao ângulo não convexo temos de dizer explicitamente ângulo não convexo BAC (ou CAB).

As semirretas formam os **lados do ângulo** e o ponto A é o **vértice do ângulo**.

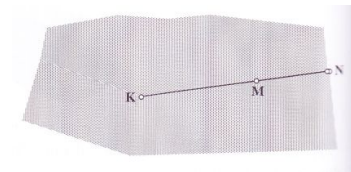
Ângulos com lados coincidentes

Se as semirretas forem coincidentes, teremos um

- **ângulo nulo**, se nos restringirmos apenas aos lados do ângulo
ou



- **ângulo giro**, se se considerar todo o plano



Ângulos com lados não coincidentes

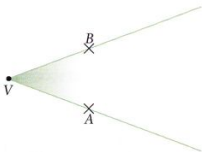
Se as semirretas não forem coincidentes mas estão no prolongamento uma da outra, isto é, estão contidas na mesma reta, os ângulos obtidos são **ângulos rasos**.



As semirretas KM e KN estão no prolongamento uma da outra. O ângulo MKN é um ângulo raso.

Exercício 5

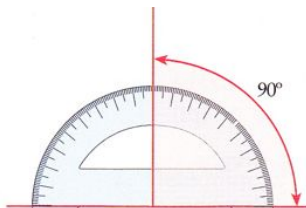
Considere a figura abaixo e complete os espaços em branco:



- 1 _____ e _____ são os lados do ângulo.
- 2 _____ é o vértice do ângulo.
- 3 Na escrita de um ângulo a letra correspondente ao _____ fica sempre no meio.
- 4 _____ lê-se ângulo AVB .
- 5 Para medir ou construir um ângulo pode usar-se um _____.
- 6 A amplitude do ângulo AVB representa-se por _____.

Amplitude de um ângulo







A amplitude de um ângulo mede-se em graus, em radianos ou em gradus.



Dividindo um ângulo reto em 90 partes iguais, obtemos a amplitude de 1 grau.

Classificação dos ângulos

Os ângulos classificam-se de acordo com as suas amplitudes.

					
$\alpha = 0^\circ$ Ângulo nulo	$0^\circ < \alpha < 90^\circ$ Ângulo agudo	$\alpha = 90^\circ$ Ângulo recto	$90^\circ < \alpha < 180^\circ$ Ângulo obtuso	$\alpha = 180^\circ$ Ângulo raso	$\alpha = 360^\circ$ Ângulo giro

Ângulos congruentes

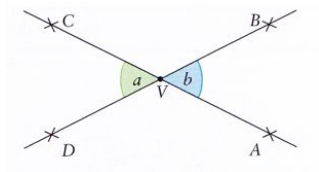
Definição

*Dois ângulos dizem-se **congruentes** se puderem fazer-se coincidir ponto por ponto, por meio de um deslocamento.*

Ângulos verticalmente opostos

Duas retas concorrentes originam quatro ângulos convexos. Destes ângulos, os opostos, que se designam **ângulos verticalmente opostos**, são congruentes.

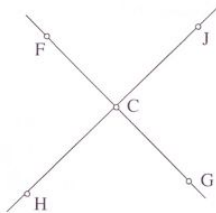
Ângulos verticalmente opostos têm o vértice em comum e os lados de um estão no prolongamento dos lados do outro.



Os ângulos AVB e CVD são verticalmente opostos, tendo-se $\widehat{AVB} = \widehat{CVD}$.
Os ângulos CVB e DVA são verticalmente opostos, tendo-se $\widehat{CVB} = \widehat{DVA}$.
Note que a designa a amplitude do ângulo AVB e escreve-se $\widehat{AVB} = a$.

Ângulos retos

As duas retas concorrentes podem originar quatro ângulos congruentes entre si. Nesse caso, as retas dizem-se **retas perpendiculares** e os ângulos obtidos são **ângulos retos**.



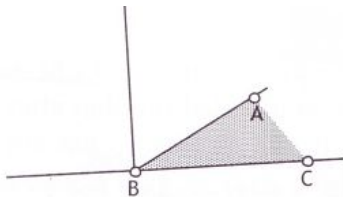
As retas FG e HJ são retas perpendiculares.

Os ângulos FCJ , JCG , GCH e HCF são ângulos retos.

Ângulo agudo

Definição

Um ângulo não nulo contido num ângulo reto diz-se **ângulo agudo**.

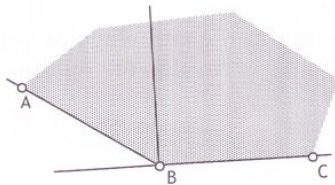


O ângulo ABC é um ângulo agudo.

Ângulo obtuso

Definição

Um ângulo que contém um ângulo reto e está contido num ângulo raso é um **ângulo obtuso**.

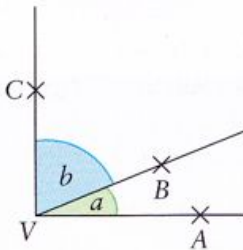


O ângulo ABC é um ângulo obtuso.

Ângulos complementares

Definição

Dois ângulos cuja reunião origina um ângulo reto dizem-se
ângulos complementares.

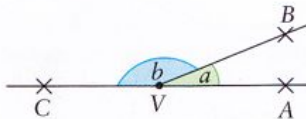


$$a + b = 90^\circ$$

Ângulos suplementares

Definição

Dois ângulos cuja reunião origina um ângulo raso dizem-se
ângulos suplementares.



$$a + b = 180^\circ$$

Atividade 4

Comente a afirmação:

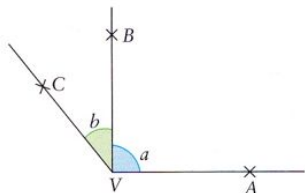
“Se o ângulo a é complementar do ângulo b e o ângulo b é complementar do ângulo c , então o ângulo a é complementar do ângulo c ”.

Ângulos adjacentes

Definição

Ângulos adjacentes são dois ângulos que têm o mesmo vértice, um lado comum e se situam um para cada lado do lado comum.

Alternativamente, podemos dizer que dois ângulos que têm apenas um lado comum dizem-se **ângulos adjacentes**.



- Os ângulos AVB e BVC são ângulos adjacentes.
- Os ângulos AVC e AVB não são ângulos adjacentes, pois apesar de terem um lado em comum (VA), têm mais pontos em comum (por exemplo, o ponto B)

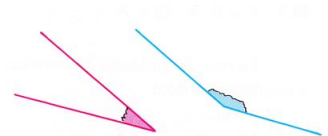
Ângulos da mesma espécie e de espécie diferente

Nos ângulos de lados paralelos temos dois casos a considerar:

- São ambos agudos ou ambos obtusos (dizem-se da mesma espécie)



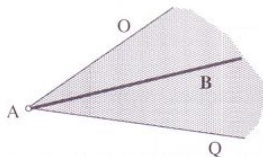
- Um ângulo é agudo e o outro é obtuso (dizem-se de espécie diferente)



Bissetriz

Definição

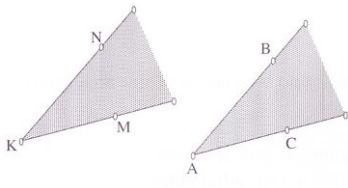
Bissetriz de um ângulo é a semireta formada pelos pontos do ângulo que estão a igual distância dos lados do ângulo.



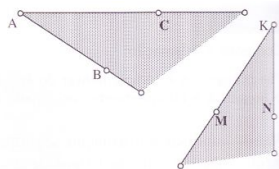
\overrightarrow{AB} é a bissetriz do ângulo OAQ .

Observação 2

- Dois ângulos da mesma espécie e com os dois pares de lados ambos paralelos ou ambos perpendiculares são ângulos congruentes.



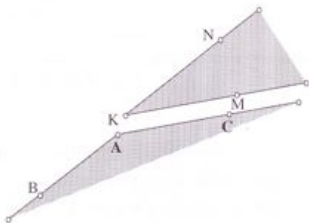
$KN \parallel AB$ e $KM \parallel AC$
 $\angle MKN$ e $\angle CAB$ são congruentes



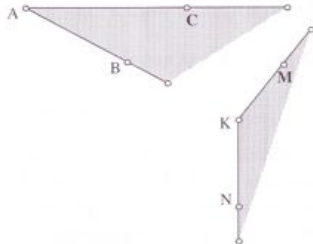
$AC \perp KN$ e $AB \perp KM$
 $\angle MKN$ e $\angle CAB$ são congruentes

Observação 3

- Dois ângulos de espécie diferente e com pares de lados ambos paralelos ou ambos perpendiculares são suplementares.

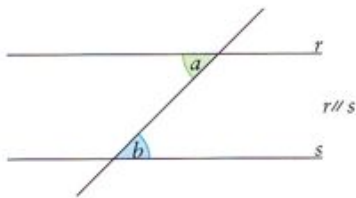


$KN \parallel AB$ e $KM \parallel AC$
 $\angle MKN$ e $\angle CAB$ são suplementares



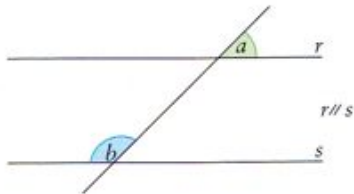
$AC \perp KN$ e $AB \perp KM$
 $\angle MKN$ e $\angle CAB$ são suplementares

Ângulos de lados paralelos



$$a = b$$

Dois ângulos agudos de lados paralelos são geometricamente iguais.



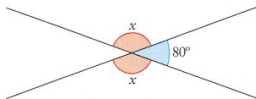
$$a + b = 180^\circ$$

Dois ângulos de lados paralelos, um agudo e outro obtuso, são suplementares.

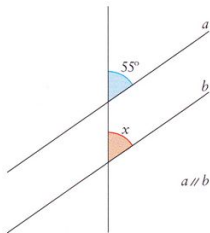
Exercício 6

Determine x em cada uma das seguintes figuras:

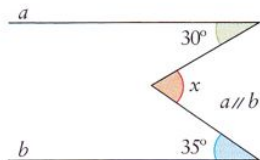
1)



2)

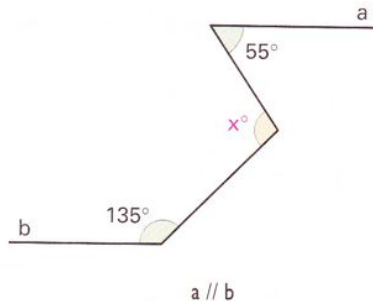


3)



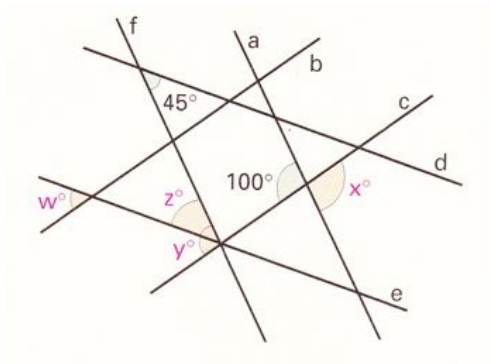
Exercício 7

Considere a figura e determine x .



Exercício 8

Na figura estão representados três sistemas de retas paralelas.



- 1 Indique os pares de retas paralelas.
- 2 De acordo com os dados, determine x , y , z e w .

- Palhares, P., *Elementos de Matemática para professores do Ensino Básico*, Lidel, 2004.
- M. Augusta Neves e Inês Sousa, *Matemática (Preparação para o Exame Nacional 2009)*, Porto Editora, 2009.

POLÍGONOS

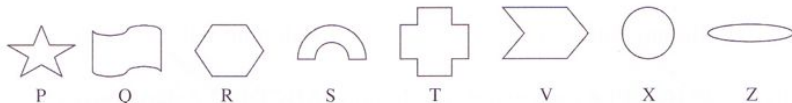
RELAÇÃO ENTRE OS ELEMENTOS DE UM TRIÂNGULO.
CRITÉRIOS DE CONGRUÊNCIA E DE SEMELHANÇA DE
TRIÂNGULOS.

Maria do Carmo Martins

Fevereiro de 2013

Introdução

Muitas vezes somos confrontados com tarefas que propõem a ligação sequencial de vários pontos numerados por forma a obter-se uma figura. Alguns exemplos de figuras deste tipo são:

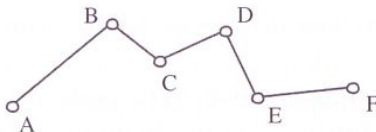


- A linha obtida pode ser uma linha poligonal.
- As linhas *P*, *R*, *T* e *V* são linhas poligonais.
- As linhas *X* e *Z* são linhas curvas.
- As linhas *Q* e *S* são linhas mistas.

Linha poligonal

Definição

Uma **Linha poligonal** é formada por sucessivos segmentos de reta, tendo os segmentos consecutivos um extremo comum, não estando na mesma reta dois segmentos consecutivos e não tendo os segmentos de reta pontos comuns para além dos extremos.



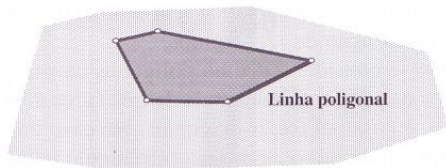
Os pontos _____ e _____ são os **extremos** da linha poligonal.

Linha poligonal fechada

Quando os pontos extremos coincidem, a linha poligonal diz-se **fechada**. As linhas poligonais P , R , T e V , representadas anteriormente, são fechadas.

Uma linha poligonal fechada permite considerar no plano **três** regiões:

- a própria linha poligonal,
- a região plana limitada pela linha poligonal
- e a região plana que lhe é exterior.



Polígono

Deve-se a Pitágoras o conceito geométrico do espaço e o início do estudo e construção dos polígonos.

Definição

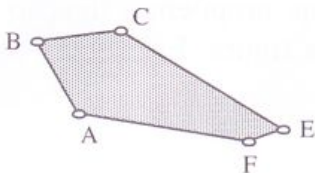
Polígono é a região plana limitada que inclui a fronteira que é uma linha poligonal fechada.

- Os segmentos de reta constituintes da linha poligonal são os **lados do polígono**.
- Os vértices da poligonal são os **vértices do polígono**.

Polígono convexo

Definição

Um **polígono é convexo** se para quaisquer dois dos seus pontos o segmento de reta que os une está contido no polígono.

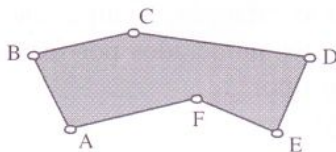


Polígono convexo

Polígono não convexo

Definição

Um **polígono** que não é convexo diz-se **não convexo**



Polígono não convexo

No hexágono $[ABCDEF]$, o segmento de reta $[AE]$ não está contido no polígono.

Designação atribuída aos polígonos

A designação atribuída aos polígonos está relacionada com o número de lados. Assim, teremos:

- os triláteros ou triângulos (3 lados);
- os quadriláteros ou quadriângulos (4 lados);
- os pentágonos (5 lados);
- os hexágonos (6 lados);
- os heptágonos (7 lados);
- os octógonos (8 lados);

Designação atribuída aos polígonos - continuação

- os eneágonos (9 lados);
- os decágonos (10 lados);
- os undecágonos (11 lados);
- os dodecágonos (12 lados);
- os pentadecágonos (15 lados);
- e os icoságonos (20 lados).

Para os outros polígonos especificaremos o número de lados, por exemplo, dizendo que são polígonos de catorze lados, de dezasseis lados, etc.

Atividade 5

Comente a seguinte afirmação:

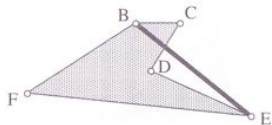
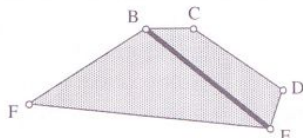
"É possível construir um polígono com dois lados".

Diagonal de um polígono

Em todos os polígonos com mais de três lados é possível unir os vértices não consecutivos, isto é, é possível traçar diagonais. No caso dos triângulos, quaisquer dois vértices são sempre consecutivos, por isso o triângulo não tem diagonais.

Definição

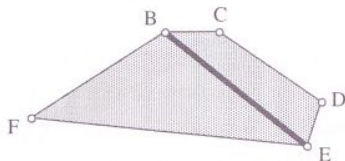
Diagonal de um polígono é um segmento de reta que une dois vértices não consecutivos.



$[BE]$ é uma diagonal do polígono $[BCDEF]$.

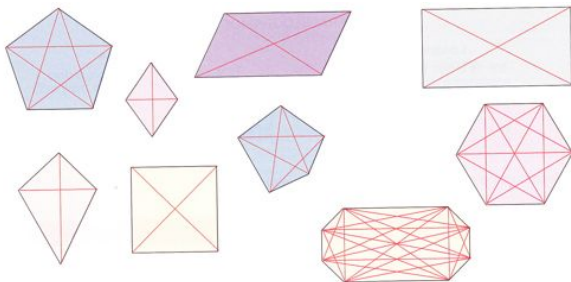
Atividade 6

Considere o polígono [BCDEF]:



- 1 Quantas diagonais se pode conduzir a partir do vértice B?
- 2 E, no total, quantas diagonais pode traçar?

Propriedades dos polígonos convexos relativamente ao número de vértices, de lados e de diagonais

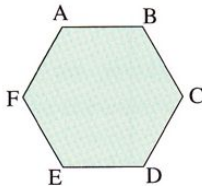


- O número de vértices é igual ao número de lados.
- De cada vértice de um polígono de n lados, saem $n - 3$ diagonais.
- O número de diagonais (d) de um polígono de n lados é dado por $d = \frac{n(n - 3)}{2}$.

Polígono regular

Definição

Polígono regular é um polígono com todos os lados e todos os ângulos internos congruentes entre si.



Triângulos

Na Geometria Euclidiana certos polígonos assumem maior importância, como é o caso dos **triângulos** e dos **quadriláteros**. Os triângulos são polígonos básicos na geometria, visto que a resolução de muitos problemas passa pela comparação de dois ou mais triângulos, de saber se são ou não congruentes. Por este motivo vamos estudá-los com maior pormenor.

Definição

Triângulo é um polígono com três lados.

Triângulos (“Figuras e figuronas” - Maria Alberta Menéres)

Senhor triângulo,
Senhor triângulo
Vossa Excelência
que nos abraça
com seus três braços
porque não canta
não brinca e salta?
Seu pé o cansa?

Oh sim, que triste
é ser escaleno,
desengraçado
como um penedo!

Mas ser isósceles
sem ter de quê,
ser tão altivo
que nem chão vê...

O equilátero
é equilibrado,
pode virar-se
de qualquer lado

que não se sabe
se está de pé
se está dormindo
sobre o que é.

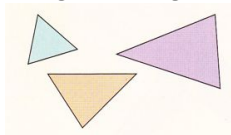
Classificação dos triângulos quanto aos lados

Os triângulos podem ser classificados atendendo ao comprimento dos seus lados e aos seus ângulos internos.

CLASSIFICAÇÃO QUANTO AOS LADOS		
Triângulo equilátero	Triângulo isósceles	Triângulo escaleno
		
Tem os três lados iguais	Tem dois lados iguais	Tem os três lados diferentes

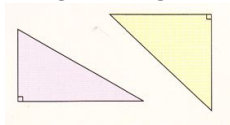
Classificação dos triângulos quanto aos ângulos

Triângulo acutângulo



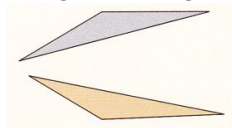
Tem os 3 ângulos agudos

Triângulo retângulo



Tem um ângulo reto

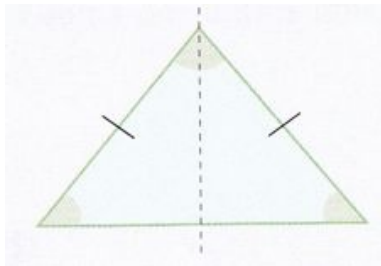
Triângulo obtusângulo



Tem um ângulo obtuso

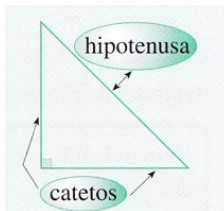
Observação 1

Num triângulo isósceles os ângulos opostos aos lados congruentes também são congruentes.



Hipotenusa e catetos

Num **triângulo retângulo** o lado que se opõe ao ângulo reto designa-se por **hipotenusa**. Os outros dois lados são os **catetos**.



Nota: Por vezes, para nos referirmos ao comprimento da hipotenusa ou ao comprimento dos catetos, usamos apenas as palavras “hipotenusa” e “cateto”.

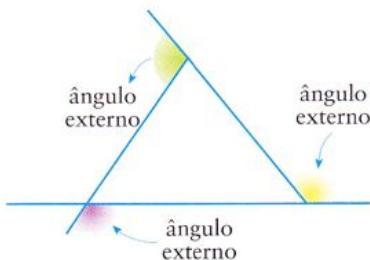
Atividade 7

Considere uma classificação dos triângulos interligando características dos lados e dos ângulos. Comente as afirmações:

- 1 É possível construir um triângulo que seja escaleno e retângulo.
- 2 Todos os triângulos obtusângulos são escalenos.
- 3 Os triângulos equiláteros podem ser retângulos.
- 4 Todos os triângulos isósceles são acutângulos.

Ângulo externo de um triângulo

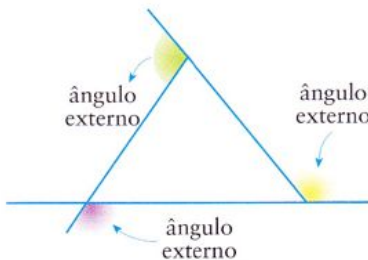
Os ângulos dos triângulos, a que nos referimos, são ângulos internos. No entanto, podemos também considerar um ângulo em que um dos lados é um lado do triângulo e outro é o prolongamento de um lado consecutivo. Nestas condições, o ângulo é um **ângulo externo** do triângulo.



Observação 2

Um triângulo tem seis ângulos externos (dois por vértice) geometricamente iguais dois a dois (ângulos verticalmente opostos).

Complete na figura abaixo os restantes ângulos externos:

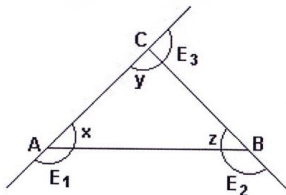


É usual considerar apenas um ângulo externo por vértice.

Relações entre os ângulos de um triângulo

Já sabemos que num triângulo temos a considerar os ângulos internos e os ângulos externos. Entre esses ângulos existem relações das quais vamos considerar três:

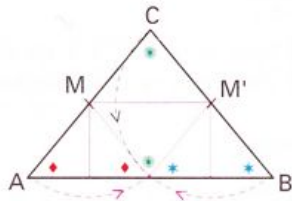
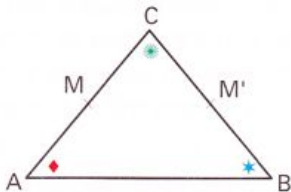
1) O ângulo interno e o externo adjacente são suplementares.



$$x + E_1 = 180^\circ; \quad y + E_3 = 180^\circ \quad \text{e} \quad z + E_2 = 180^\circ$$

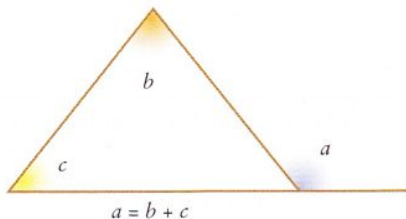
Relações entre os ângulos de um triângulo - continuação

2) A soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180° .



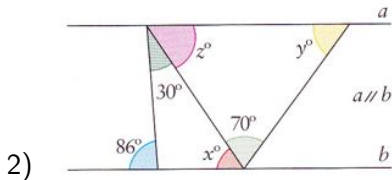
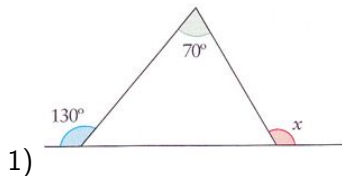
Relações entre os ângulos de um triângulo - continuação

3) A amplitude de um ângulo externo de um triângulo é igual à soma das amplitudes dos ângulos internos não adjacentes.



Exercício 1

Para cada figura, determine os números representados pelas letras:



Atividade 8

Justifique a conclusão:

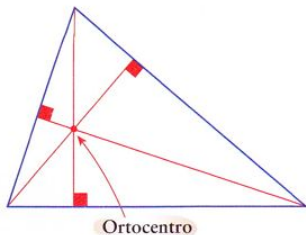
É possível comparar cada ângulo externo de um triângulo com os ângulos internos que não lhe são adjacentes e concluir que, num triângulo, um ângulo externo é maior do que qualquer um dos ângulos internos não adjacentes.

Alturas de um triângulo

Num triângulo podemos distinguir várias linhas e vários pontos especiais. Podem traçar-se as mediatrizes dos lados, as bissetrizes dos ângulos, as alturas, as medianas, as cevianas; podem marcar-se o circuncentro, o incentro, o ortocentro, o baricentro, ...

Definição

Alturas de um triângulo são os segmentos de reta da perpendicular traçada de um vértice para o lado oposto.

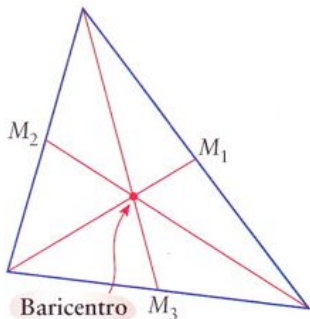


O ponto de intersecção das alturas chama-se **ortocentro**.

Medianas de um triângulo

Definição

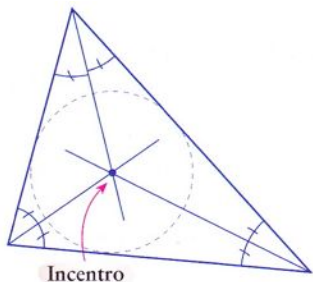
Medianas de um triângulo são os segmentos de reta que unem cada vértice com o ponto médio do lado oposto.



O ponto de intersecção das medianas chama-se **baricentro** ou **centro de gravidade do triângulo**.

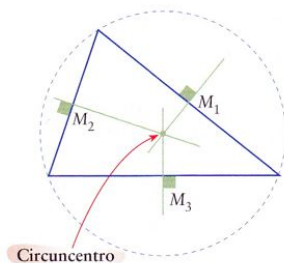
Incentro

As bissetrizes dos ângulos de um triângulo intersectam-se num ponto, o **incentro**, que é o centro da circunferência inscrita no triângulo.



Circuncentro

As mediatrizes dos lados de um triângulo intersectam-se num ponto, o **circuncentro**, que é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo.



Ceviana de um triângulo

Definição

Ceviana* *de um triângulo é qualquer segmento de reta que une um vértice com um ponto do lado oposto, excluindo os vértices.*

* Estes segmentos de reta têm esta designação em homenagem ao italiano Giovanni Ceva.

Observação 3

Num triângulo _____ o incentro, o ortocentro e o baricentro são o mesmo ponto.

Atividade 9

Comente a afirmação:

"As alturas de um triângulo passam sempre no ponto médio do lado oposto".

Triângulos congruentes

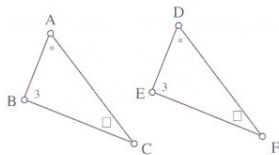
Num triângulo qualquer é possível distinguir seis elementos: três lados e três ângulos.

Definição

*Dois triângulos são **congruentes** se coincidirem ponto por ponto.*

Portanto, se os lados e os ângulos forem congruentes, os triângulos também o serão.

Triângulos congruentes



Os triângulos $[ABC]$ e $[DEF]$ são congruentes se os vértices de um corresponderem aos vértices do outro, $A \rightarrow D$, $B \rightarrow E$, $C \rightarrow F$, de modo que

- os lados correspondentes sejam congruentes
 - AB congruente com $[DE]$
 - BC congruente com $[EF]$
 - AC congruente com $[DF]$
- os ângulos correspondentes sejam congruentes
 - o ângulo A congruente com o ângulo D
 - o ângulo B congruente com o ângulo E
 - o ângulo C congruente com o ângulo F

Introdução aos critérios de congruência de triângulos



Em dois triângulos congruentes aos ângulos congruentes opõem-se lados também congruentes e, do mesmo modo, aos lados congruentes opõem-se ângulos congruentes.

Se os seis elementos do triângulo forem iguais, os triângulos são congruentes. Contudo, para concluirmos que dois triângulos são congruentes não é necessário comparar os seis elementos.


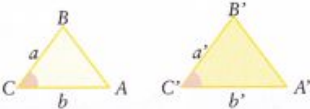
Para facilitar estabeleceram-se os critérios de congruência de triângulos, que são condições “económicas” que permitem garantir a congruência dos triângulos, sem que seja necessário comparar os seis elementos.

Critérios de congruência e de semelhança de triângulos



Existe um paralelismo entre os casos de congruência de triângulos e os casos de semelhança de triângulos (mantêm-se a congruência dos ângulos e os lados passam a ser proporcionais).

Casos de igualdade de triângulos	Casos de semelhança de triângulos
<p>Dois triângulos são geometricamente iguais se os três lados de um são geometricamente iguais aos três lados do outro.</p>  <p>Caso: lado - lado - lado ($\ell\ell\ell$)</p>	<p>Dois triângulos são semelhantes se os três lados de um são directamente proporcionais aos três lados do outro.</p>  $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

Critérios de congruência e de semelhança de triângulos

Casos de igualdade de triângulos	Casos de semelhança de triângulos
<p>Dois triângulos são geometricamente iguais se têm um lado igual e os dois ângulos adjacentes a esse lado geometricamente iguais.</p>  <p>Caso: ângulo - lado - ângulo ($a \ell a$)</p>	<p>Dois triângulos são semelhantes se têm dois lados directamente proporcionais e o ângulo por eles formado geometricamente igual.</p>  $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \text{ e } \hat{C} = \hat{C}'$

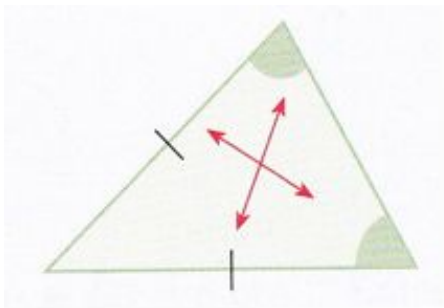
Critérios de congruência e de semelhança de triângulos

Casos de igualdade de triângulos	Casos de semelhança de triângulos
<p>Dois triângulos são geometricamente iguais se tiverem dois lados iguais e o ângulo por eles formado geometricamente igual.</p>  <p>Caso: lado - ângulo - lado ($\ell a \ell$)</p>	<p>Dois triângulos são semelhantes se têm dois ângulos correspondentes geometricamente iguais.</p>  <p>$\hat{A} = \hat{A}'$ e $\hat{B} = \hat{B}'$</p>

Relações entre elementos dos triângulos

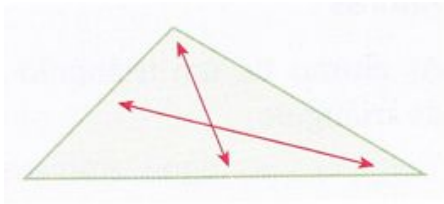
Comparando os lados e os ângulos de um triângulo é possível estabelecer várias relações:

- Num triângulo, a lados geometricamente iguais opõem-se ângulos geometricamente iguais e a ângulos geometricamente iguais opõem-se lados geometricamente iguais.



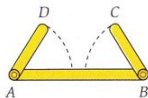
Relações entre elementos dos triângulos continuação

- Num triângulo, ao maior lado opõe-se o maior ângulo e ao maior ângulo opõe-se o maior lado.
- Num triângulo, ao menor lado opõe-se o menor ângulo e ao menor ângulo opõe-se o menor lado

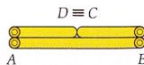


Teorema da desigualdade triangular

Com três segmentos de reta nem sempre é possível construir um triângulo.

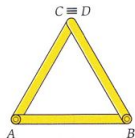


$$\overline{AB} > \overline{AD} + \overline{CB}$$



$$\overline{AD} + \overline{CB} = \overline{AB}$$

Quando um segmento qualquer é menor do que a soma dos outros dois, então é possível construir um triângulo.



$$\overline{AB} < \overline{AD} + \overline{CB}$$

Teorema da desigualdade triangular

Teorema

Num triângulo, o comprimento de qualquer lado é menor do que a soma dos comprimentos dos outros dois lados.

Exercício 2

Diga, justificando se é possível construir um triângulo cujos lados medem:

- 1 24cm, 36 cm e 50cm.
- 2 15cm, 23 cm e 38cm.

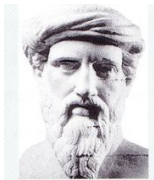
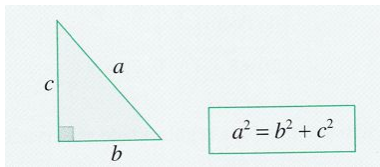
Exercício 3

Num triângulo $[ABC]$ sabe-se que $\overline{AB} = 10 \text{ cm}$ e $\overline{BC} = 6 \text{ cm}$.
Entre que valores pode variar \overline{AC} ?

Teorema de Pitágoras

Teorema

Num triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.



Pitágoras, Matemático grego (580-500 a. C.)

Exercício 4

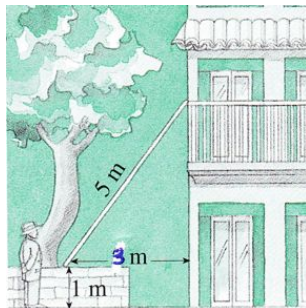
Calcule a hipotenusa de um triângulo retângulo sabendo que os catetos medem 10 cm e 24 cm.

Exercício 5

Determine um cateto de um triângulo retângulo sabendo que a hipotenusa e o outro cateto medem 1 cm e 0.8 cm, respectivamente.

Exercício 6

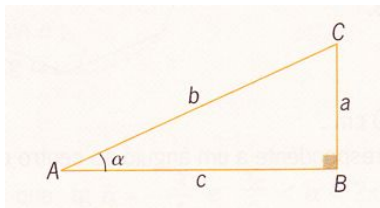
Observe a figura :



- 1 O parapeito da varanda a que altura fica do solo?
- 2 Calcule a distância do parapeito da varanda ao telhado, sabendo que para atingir este a vara teria de ter mais 1m.

Razões trigonométricas para ângulos agudos

Para qualquer triângulo retângulo as três razões trigonométricas básicas de um ângulo agudo são: o seno, o cosseno e a tangente.



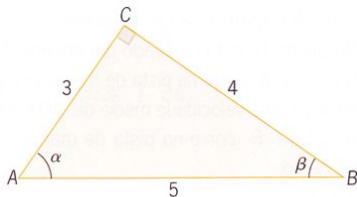
- $\text{sen } \alpha = \frac{\text{comp. do cateto oposto}}{\text{comp. da hipotenusa}}; \quad \text{sen } \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$

- $\text{cos } \alpha = \frac{\text{comp. do cateto adjacente}}{\text{comp. da hipotenusa}}; \quad \text{cos } \alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$

- $\text{tg } \alpha = \frac{\text{comp. do cateto oposto}}{\text{comp. da cateto adjacente}}; \quad \text{tg } \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$

Exercício 7

Seja $[ABC]$ um triângulo retângulo em C e $\overline{AB} = 5\text{cm}$; $\overline{BC} = 4\text{cm}$ e $\overline{AC} = 3\text{cm}$.

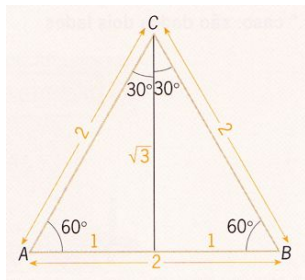


Escreva as razões trigonométricas dos ângulos CAB e CBA .

Resultados de referência: razões trigonométricas de 30° e 60°

Considere-se o triângulo equilátero $[ABC]$ de lado 2 unidades de comprimento.

Observando a figura, vem:



$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

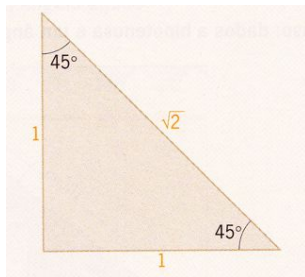
$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$$

Resultados de referência: razões trigonométricas de 45°

Considere-se agora o triângulo retângulo isósceles, tendo os catetos uma unidade de comprimento.







Então:

$$\operatorname{sen} 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

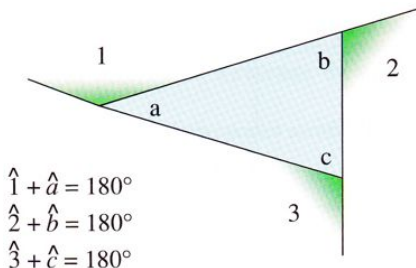
$$\operatorname{cos} 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = 1$$

Exercício 8- Complete:

Polígono	Nº de lados	Exemplo	Nº de triângulos em que ficou dividido	Soma dos ângulos internos do polígono
Triângulo	3		1	180°
Quadrilátero	4		2	$2 \times 180^\circ$
Pentágono				$3 \times 180^\circ$
Hexágono			4	$\times 180^\circ$
Heptágono			5	$5 \times 180^\circ$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
Polígono com 10 lados	10	⋮		$(10 - 2) \times 180^\circ$
⋮		⋮		
Polígono com n lados	n	⋮		

A soma dos ângulos externos de um triângulo

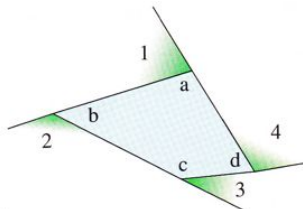


Logo,

$$\begin{aligned}\hat{1} + \hat{a} + \hat{2} + \hat{b} + \hat{3} + \hat{c} &= 3 \times 180^\circ \\ \hat{1} + \hat{2} + \hat{3} &= 3 \times 180^\circ - \underbrace{(\hat{a} + \hat{b} + \hat{c})}_{180^\circ}\end{aligned}$$

$$\boxed{\hat{1} + \hat{2} + \hat{3} = 360^\circ}$$

A soma dos ângulos externos de um quadrilátero



Ajuda a completar!

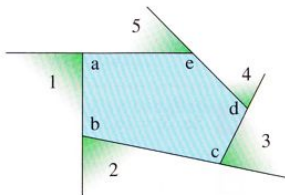
$$\underbrace{\hat{1} + \hat{a}}_{180^\circ} + \underbrace{\hat{2} + \hat{b}}_{180^\circ} + \underbrace{\hat{3} + \hat{c}}_{180^\circ} + \underbrace{\hat{4} + \hat{d}}_{180^\circ} = 4 \times \dots$$

Logo,

$$\hat{1} + \hat{2} + \hat{3} + \hat{4} = 4 \times 180^\circ - \underbrace{(\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} + \hat{d})}_{2 \times 180^\circ}$$

$$\hat{1} + \hat{2} + \hat{3} + \hat{4} = \dots$$

A soma dos ângulos externos de um pentágono



$$\underbrace{\hat{1} + \hat{a}}_{180^\circ} + \underbrace{\hat{2} + \hat{b}}_{180^\circ} + \underbrace{\dots + \dots}_{180^\circ} + \underbrace{\hat{4} + \hat{d}}_{180^\circ} + \underbrace{\hat{5} + \hat{e}}_{180^\circ} = 5 \times 180^\circ$$

Logo,

$$\hat{1} + \hat{2} + \hat{3} + \hat{4} + \hat{5} = 5 \times 180^\circ - \underbrace{(\dots + \dots + \dots + \dots + \dots)}_{(5-2) \times 180^\circ = 3 \times 180^\circ}$$

Conclusão:

$$\hat{1} + \hat{2} + \hat{3} + \hat{4} + \hat{5} = 360^\circ$$

Propriedades dos polígonos convexos relativamente aos ângulos

- A soma S_i das amplitudes dos ângulos internos de um polígono (convexo) de n lados é dada por $S_i = (n - 2) \times 180^\circ$.
- A soma dos ângulos externos de um polígono de n lados é dada por $S_e = 360^\circ$.
- A medida do ângulo interno de um polígono regular de n lados é dada por $a_i = \frac{(n-2) \times 180^\circ}{n}$.
- A medida do ângulo externo de um polígono regular de n lados é dada por $a_e = \frac{360^\circ}{n}$.

- Palhares, P., *Elementos de Matemática para professores do Ensino Básico*, Lidel, 2004.
- M. Augusta Neves, M. Luísa Faria, *Exercícios Matemática 11º Ano - 1ª Parte*, Porto Editora, 2000.
- M. Augusta Neves, M. Luísa Faria, *Exercícios Matemática 8º Ano - 1ª Parte*, Porto Editora, 1999.

1. GEOMETRIA no PLANO

QUADRILÁTEROS

Maria do Carmo Martins

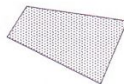
Fevereiro de 2012

Quadrilátero

Na extensa lista de polígonos, a “família” que se segue aos triângulos é a dos quadriláteros.

Definição

*Um **quadrilátero** é um polígono com quatro lados.*



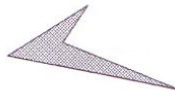
Observação 1

Observando os quadriláteros podemos descobrir algumas particularidades que os caracterizam e relacionam uns com os outros. Podem ter pares de lados paralelos, podem ter ângulos todos congruentes, podem ter os ângulos opostos congruentes, etc.

As definições que vamos apresentar permitem hierarquizar os quadriláteros, começando pelo quadrilátero mais geral, seja ele convexo ou não convexo e terminar no mais especial, o quadrado!



Quadrilátero convexo

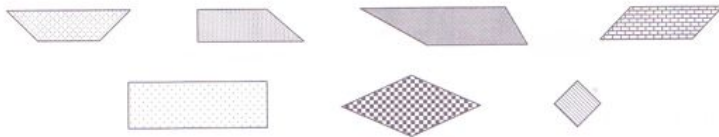


Quadrilátero não convexo

Trapézio

Definição

Trapézio é um quadrilátero com pelo menos um par de lados opostos paralelos.



Os lados paralelos designam-se por **bases do trapézio**.
Distinguimos a base menor e a base maior, se existirem.

Trapézio isósceles

Definição

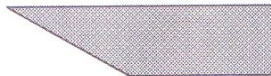
Trapézio isósceles é um trapézio com dois pares de ângulos consecutivos congruentes.



Trapézio retângulo

Definição

Trapézio retângulo é um trapézio em que um dos lados não paralelos é perpendicular aos lados paralelos.



Trapézio escaleno

Definição

Trapézio escaleno é um trapézio em que os lados não paralelos não são congruentes.



Paralelogramo

Definição

Paralelogramo é um trapézio com os lados opostos paralelos.



Retângulo

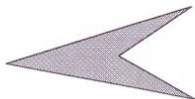
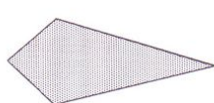
Definição

Retângulo é um *paralelogramo ou trapézio isósceles com os ângulos internos todos congruentes.*



Definição

Papagaio é um quadrilátero que tem dois pares de lados consecutivos congruentes.



Losango

Definição

Losango é um paralelogramo com os quatro lados congruentes.



Quadrado

Definição

Quadrado é um

- *retângulo com os quatro lados congruentes.*
- *losango com os quatro ângulos congruentes.*

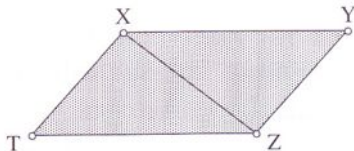


Congruência dos lados opostos de um paralelogramo

A definição que apresentámos de paralelogramo, por si só, não garante que os lados opostos dos paralelogramos sejam congruentes. Todavia, prova-se que a congruência dos lados opostos decorre da definição, daí que:

Teorema

Os lados opostos de um paralelogramo são congruentes.

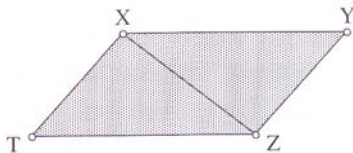


$$\overline{XY} = \overline{TZ} \quad \text{e} \quad \overline{XT} = \overline{YZ}$$

Teorema

Teorema

Uma diagonal de um paralelogramo divide-o em dois triângulos congruentes.



- $[XZ]$ é uma diagonal do paralelogramo $[XYZT]$;
- Os triângulos $[XTZ]$ e $[XYZ]$ são congruentes.

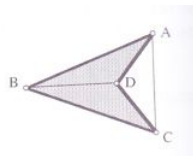
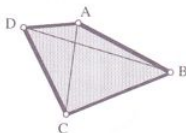
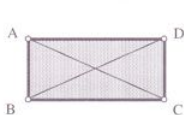
Atividade 10

Comente a seguinte afirmação:

“Os ângulos opostos de um paralelogramo são congruentes”.

Observação 2

Os quadriláteros são polígonos com duas diagonais. Nas figuras seguintes as diagonais são os segmentos de reta $[AC]$ e $[BD]$.



- Ao traçar uma diagonal num quadrilátero convexo ele fica dividido em dois triângulos.

Atividade 11

Comente a afirmação:

“A diagonal de um retângulo coincide com a bissetriz de dois ângulos internos opostos.”

As diagonais dos quadriláteros

Temos quadriláteros com:

- as diagonais congruentes, no caso do trapézio isósceles;
- as diagonais perpendiculares, no caso dos papagaios;
- as diagonais que se bissetam, no caso dos paralelogramos.

Nota: Por vezes, as diagonais dividem os quadriláteros em dois triângulos congruentes.

Propriedades das diagonais dos quadriláteros

- 1 Num papagaio as diagonais são perpendiculares;
- 2 Num trapézio isósceles as diagonais são congruentes;
- 3 Num paralelogramo as diagonais bissetam-se.
- 4 Num retângulo as diagonais são congruentes.
- 5 Num retângulo as diagonais bissetam-se.
- 6 Num losango as diagonais são perpendiculares.
- 7 Num losango as diagonais bissectam-se.
- 8 Num quadrado as diagonais são congruentes.
- 9 Num quadrado as diagonais bissectam-se.
- 10 Num quadrado as diagonais são perpendiculares.

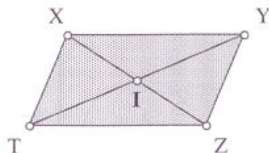
Atividade 12

Escreva as propriedades anteriores relativas aos retângulos, losangos e quadrados na forma “Se ... então...”

Teorema

Teorema

Num paralelogramo as diagonais bissetam-se (intersectam-se a meio).



$$\overline{TI} = \overline{IY} \quad \text{e} \quad \overline{XI} = \overline{IZ}$$

Atividade 13

Comente as afirmações:

- 1 Todo o paralelogramo é um trapézio.
- 2 Todo o losango é um quadrado.
- 3 Se um quadrilátero tem os quatro ângulos retos então é quadrado.
- 4 Todo o quadrado é um paralelogramo.
- 5 Se um quadrilátero é retângulo então é losango.
- 6 Um quadrilátero com três lados congruentes é um losango.
- 7 Dois triângulos isósceles com dois pares de lados congruentes são congruentes.

Exercício 1

Complete:

1 Num paralelogramo:

- os lados paralelos são _____
- os ângulos opostos são _____
- as diagonais _____

2 Num quadrado:

- as diagonais são _____
- as diagonais são _____

3 Num retângulo:

- as diagonais são _____
- as diagonais não são _____

4 Num losângo:

- as diagonais são _____
- as diagonais são _____

Propriedades dos Paralelogramos - resumo

Sabendo que $[ABCD]$ é um paralelogramo podemos afirmar que:

- Os ângulos opostos têm a mesma amplitude.
- Os lados opostos têm o mesmo comprimento.
- As diagonais têm o mesmo ponto médio (bissetam-se).
- Os ângulos adjacentes ao mesmo lado de um paralelogramo são suplementares.

- Palhares, P., *Elementos de Matemática para professores do Ensino Básico*, Lidel, 2004.

1. GEOMETRIA no PLANO

CIRCUNFERÊNCIA. CÍRCULO

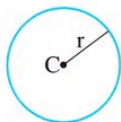
Maria do Carmo Martins

Fevereiro de 2012

Circunferência

Definição

Circunferência é o conjunto dos pontos do plano que estão à mesma distância de um ponto designado por centro da circunferência. Estes pontos formam uma linha curva fechada.



A distância entre cada ponto da linha e o centro chama-se **raio da circunferência**.

Observação 1

Uma circunferência de raio r divide o plano em duas zonas: uma **interior** (pontos cuja distância ao centro é inferior a r) e a outra **exterior** (pontos cuja distância ao centro é superior a r). A circunferência serve de fronteira entre as duas zonas.

Atividade 14

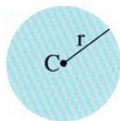
Comente a afirmação:

" O centro da circunferência é um ponto da circunferência."

Círculo

Definição

Círculo é a região plana limitada que inclui a fronteira que é a circunferência.



Actividade 15

Comente a afirmação:

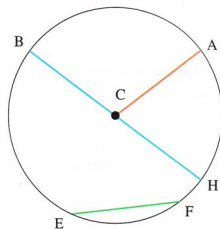
“ O centro da circunferência é um ponto do círculo.”

Corda e diâmetro

Definição

- *Um segmento de reta cujos extremos sejam pontos de uma circunferência designa-se por **corda da circunferência**.*
- *As cordas que passam pelo centro da circunferência designam-se por **diâmetros da circunferência**.*

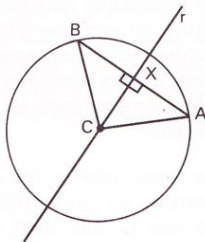
- C é centro da circunferência;
- $[AC]$ é um raio;
- $[BH]$ é um diâmetro;
- $[EF]$ é uma corda;
- Os pontos B e H dividem a circunferência em duas semicircunferências.



Teoremas

Teorema

Se uma reta qualquer passa pelo centro de uma circunferência e é perpendicular a uma corda, então bissecta a corda.



Teorema

Se uma reta qualquer passa no centro de uma circunferência e bissecta uma corda, então é perpendicular à corda.

Posição relativa entre duas circunferências - introdução

A intersecção de duas circunferências pode variar desde o conjunto vazio até à própria circunferência. As circunferências podem:

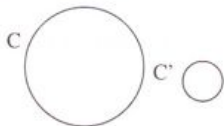
- não ter pontos comuns;
- ter um ponto comum;
- ter dois pontos comuns;
- ter todos os pontos comuns.

Vejamos com detalhe cada uma destas situações:

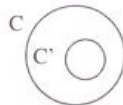
Posição relativa entre duas circunferências - caso 1

Caso 1: As duas circunferências C e C' não têm pontos comuns. Isto ocorre quando as circunferências são **exteriores** ou **interiores**.

Circunferências **exteriores**

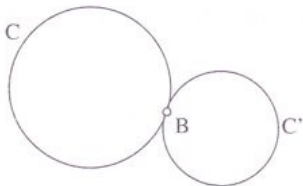


Circunferências **interiores**



Posição relativa entre duas circunferências - caso 2

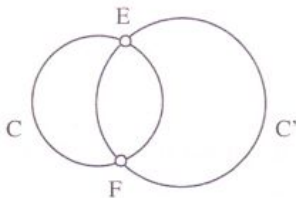
Caso 2: As duas circunferências C e C' têm um ponto comum. Isto ocorre quando as circunferências são **tangentes**.



Circunferências **tangentes**

Posição relativa entre duas circunferências - caso 3

Caso 3: As duas circunferências C e C' têm dois pontos comuns. Isto ocorre quando as circunferências são **secantes**.



Circunferências **secantes**

Posição relativa entre duas circunferências - caso 4

Caso 4: As duas circunferências C e C' têm todos os pontos comuns. Isto ocorre quando as circunferências são **coincidentes**.

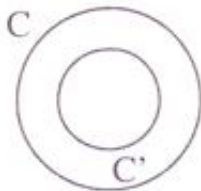


Circunferências **coincidentes**

Circunferências concêntricas

Definição

Duas circunferências com o mesmo centro dizem-se
circunferências concêntricas.



As circunferências concêntricas tanto podem não ter pontos em comum, como ter todos os pontos comuns.

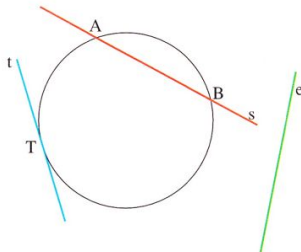
Posição relativa de uma reta e de uma circunferência

É possível distinguir a posição relativa entre uma reta e uma circunferência. Podem ter ou não pontos comuns. Quando têm pontos comuns, têm no máximo dois pontos comuns.

Sintetizando, uma reta e uma circunferência podem:

- não ter pontos comuns;
- ter um ponto comum;
- ter dois pontos comuns.

Posição relativa de uma reta e de uma circunferência



- A reta s interseca a circunferência em dois pontos - s é **secante** à circunferência;
- A reta t interseca a circunferência no ponto T - t é **tangente** à circunferência. Esse ponto, comum à reta e à circunferência chama-se **ponto de tangência**.
- A reta e não interseca a circunferência - e é **exterior à circunferência**.

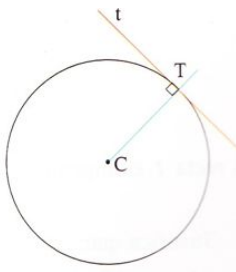
Atividade 16

- 1 Considere a circunferência com 2 cm de raio e um dos seus diâmetros. Marque os pontos da circunferência que distam 1 cm do diâmetro considerado.
- 2 Dada uma circunferência com 4 cm de raio e um ponto P à distância de 3 cm do seu centro, marque os pontos da circunferência que distam 2 cm de P.

Teorema

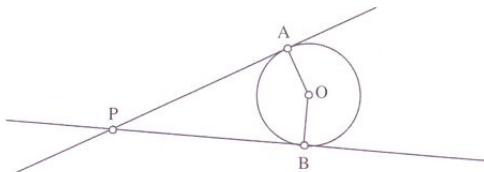
Teorema

A reta tangente a uma circunferência num ponto é perpendicular ao raio marcado nesse ponto.



Segmentos de tangente

A partir de um ponto P exterior a uma circunferência de centro O podemos traçar duas tangentes para a circunferência nos pontos A e B .



Os segmentos de reta $[PA]$ e $[PB]$ são designados por **segmentos de tangente**.

Teorema

Teorema

Se de um ponto exterior da circunferência traçarmos duas tangentes à circunferência, então, os “segmentos de tangente” são congruentes.

CIRCUNFERÊNCIA - GENERALIDADES

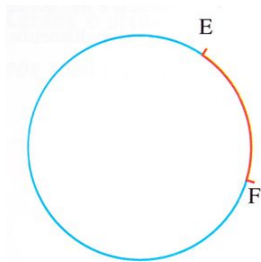
Maria do Carmo Martins

Março de 2012

Arco de um circunferência

Definição

Arco de uma circunferência é qualquer porção da circunferência limitada por dois dos seus pontos, chamados extremos do arco.

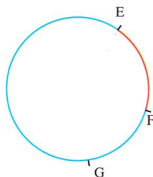


Os pontos E e F dividem a circunferência em dois arcos:

- O **arco menor** EF que está contido numa semicircunferência (representado a encarnado na figura).
- O **arco maior** EF que contém uma semicircunferência (representado a azul na figura).

Observação 1

Dois pontos de uma circunferência que não são extremos de um diâmetro determinam sempre dois arcos diferentes.



Se escrevermos apenas arco EF não sabemos se nos estamos a referir ao arco menor ou ao arco maior.

Assim convencionou-se que para nos referirmos ao arco maior de extremos E e F indicamos mais um dos seus pontos, por exemplo o ponto G . Deste modo, quando escrevermos:

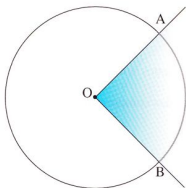
- Arco EF referimo-nos ao arco menor.
- Arco EGF referimo-nos ao arco maior.

Ângulo ao centro de uma circunferência

Definição

Ângulo ao centro de uma circunferência é um ângulo cujo vértice é o centro da circunferência.

Também aqui podemos considerar não um ângulo ao centro, mas sim dois: o ângulo convexo (azul) e o ângulo côncavo (branco).



O ângulo AOB é um ângulo ao centro.

Ângulo convexo e côncavo

Definição

Um ângulo diz-se **convexo** se não é intersetado pelo prolongamento de qualquer dos seus lados.

Definição

Um ângulo diz-se **côncavo** se é intersetado pelos prolongamentos dos seus lados.

Circunferências geometricamente iguais ou congruentes

Definição

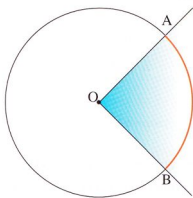
Circunferências geometricamente iguais ou congruentes *são as que, quando sobrepostas, coincidem ponto por ponto.*

Da definição decorre que, se duas circunferências são geometricamente iguais, então têm raios iguais e reciprocamente.

Relações entre cordas, arcos e ângulos ao centro

Existe uma correspondência biunívoca entre arcos menores e ângulos ao centro.

- Ao ângulo ao centro AOB podemos fazer corresponder o arco menor AB .

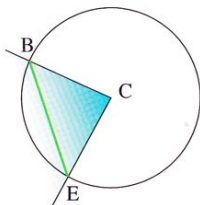


Numa circunferência, a cada ângulo ao centro, corresponde um arco e, reciprocamente, a cada arco corresponde um ângulo ao centro.

Relações entre cordas, arcos e ângulos ao centro - continuação

Existe também uma correspondência biunívoca entre ângulos ao centro e as cordas que os subtendem.

- Ao ângulo ao centro BCE podemos fazer corresponder a corda $[BE]$

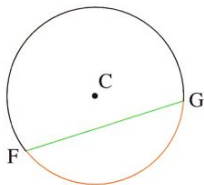


Numa circunferência, a cada ângulo ao centro, corresponde uma corda e, reciprocamente, a cada corda corresponde um ângulo ao centro.

Relações entre cordas, arcos e ângulos ao centro - continuação

Uma consequência das relações anteriores é a existência também de uma correspondência biunívoca entre arcos e cordas.

- Ao arco FG podemos fazer corresponder a corda $[FG]$



Numa circunferência, a cada arco corresponde uma corda e, reciprocamente, a cada corda corresponde um arco.

Teoremas

Teorema

Numa circunferência, ou em circunferências geometricamente iguais, a ângulos ao centro iguais correspondem arcos iguais e reciprocamente.

Teorema

Numa circunferência, ou em circunferências geometricamente iguais, a ângulos ao centro iguais correspondem a cordas iguais e reciprocamente.

Teorema

Numa circunferência, ou em circunferências geometricamente iguais, a arcos iguais correspondem cordas iguais e reciprocamente.

Outras propriedades

Teorema

Numa circunferência, qualquer reta que passe pelo centro divide ao meio as cordas que lhe são perpendiculares, bem como os arcos e ângulos ao centro correspondentes.

Um dos teoremas recíprocos deste, por ser muito utilizado, merece uma referência especial:

Teorema

Numa circunferência, a reta perpendicular ao meio de uma corda passa pelo centro.

Outras propriedades - continuação

Teorema

Toda a tangente a uma circunferência num ponto é perpendicular à reta que passa pelo centro e pelo ponto de tangência.

Teorema

Numa circunferência são iguais os arcos compreendidos entre cordas paralelas.

Teorema

Numa circunferência são iguais as cordas compreendidas entre cordas paralelas.

Amplitudes de Ângulo e de Arco

- \widehat{ABC} designa a amplitude do ângulo ABC (vértice em B)

Se com centro no vértice de um ângulo ACB desenharmos uma circunferência com determinado raio, o ângulo dado passará a chamar-se **ângulo ao centro** da circunferência de centro C. Como existe uma correspondência entre ângulos ao centro e arcos, então

- Amplitude de um arco de circunferência é a amplitude do ângulo ao centro correspondente.

Como medir a amplitude de um ângulo ou de arco?

Uma unidade de medida de amplitude de ângulos que é muito usada é o **grau**.

Recordemos o que é o grau.

Consideremos um ângulo reto. Dividimos o ângulo recto em 90 ângulos agudos iguais. Chamamos à amplitude de cada um desses ângulos **um grau**. Uma consequência imediata é que a amplitude do ângulo reto é 90 graus (90°).

Como já referimos, a amplitude de uma arco de circunferência é a amplitude do ângulo ao centro correspondente. Assim, aceita-se que **um grau de arco** é a amplitude de um arco correspondente a um ângulo ao centro de um grau de amplitude.

Sistema Sexagesimal

O grau é a unidade principal de um sistema de medidas de amplitudes de ângulos e arcos a que se chama **sistema sexagesimal**.

Podemos resumir num quadro as várias unidades de amplitudes de ângulos ou de arcos

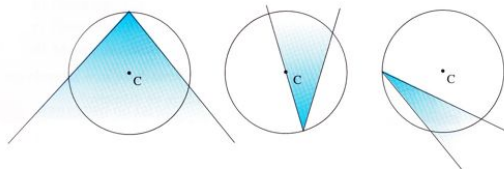
Ângulos	Arcos
1° (um grau de ângulo)	1° (um grau de arco)
$1'$ (um minuto de ângulo)	$1'$ (um minuto de arco)
$1''$ (um segundo de ângulo)	$1''$ (um segundo de arco)

O nome de sistema sexagesimal deve-se ao tipo de relação existente entre as várias unidades. De facto, $1^{\circ} = 60'$ e $1' = 60''$.

Ângulos de vértice sobre a circunferência

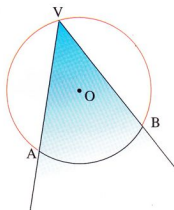
Definição

Ângulo inscrito num arco de circunferência é um ângulo cujo vértice pertence a esse arco e cujos lados passam pelos extremos do arco.



Estes ângulos têm o vértice sobre a circunferência e os seus lados contêm cordas. São pois, ângulos inscritos.

Arco capaz e arco compreendido entre os lados do ângulo

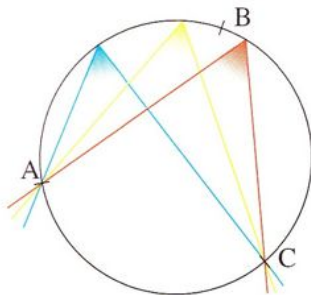


O ângulo AVB é um ângulo inscrito.

Está inscrito no **arco AVB**, chamado **arco capaz do ângulo**.

- **Arco AVB - Arco capaz do ângulo**
- **Arco AB - Arco compreendido entre os lados do ângulo.**

Observação 2



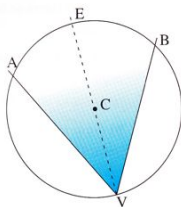
No mesmo arco é possível inscrever muitos ângulos. Esse arco diz-se **arco capaz** desses ângulos.

A um ângulo inscrito correspondem pois dois arcos: **o arco capaz** e o **arco compreendido entre os seus lados**.

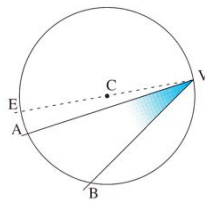
Amplitude de um ângulo inscrito

Teorema

A amplitude de um ângulo inscrito é igual a metade da amplitude do arco compreendido entre os seus lados.



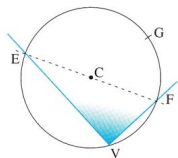
$$\angle AVB = \frac{\widehat{AB}}{2}$$



$$\angle AVB = \frac{\widehat{AB}}{2}$$

Consequências do teorema anterior

- **Corolário 1:** Qualquer ângulo inscrito numa semi-circunferência é um ângulo reto.



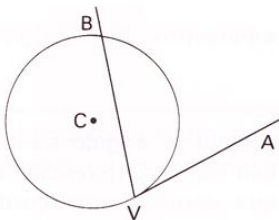
$$\widehat{EVF} = 90^\circ$$

- **Corolário 2:** Dois ângulos quaisquer inscritos no mesmo arco são iguais.

Ângulo de um segmento

Definição

Ângulo de um segmento de círculo é um ângulo de vértice na circunferência, tendo um lado tangente a esta e outro secante.

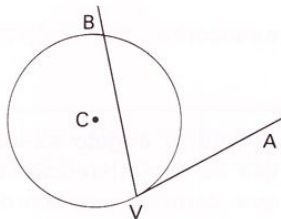


O ângulo AVB é um ângulo de um segmento.

Amplitude do ângulo de um segmento

Teorema

A amplitude do ângulo de um segmento de círculo é igual a metade da amplitude do arco compreendido entre os seus lados.

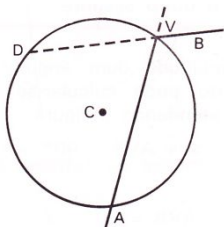


$$\widehat{AVB} = \frac{\widehat{AB}}{2}$$

Ângulo ex-inscrito

Definição

Chama-se **ângulo ex-inscrito** a todo o ângulo com o vértice na circunferência, sendo um dos lados uma semi-reta que contém uma corda e o outro o prolongamento de outra corda.

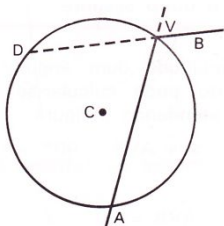


O ângulo AVB é um ângulo ex-inscrito.

Amplitude do ângulo ex-inscrito

Teorema

A amplitude de um ângulo ex-inscrito é igual à semi-soma das amplitudes dos arcos compreendidos entre os lados e os seus prolongamentos.

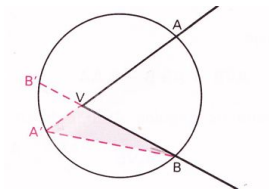


$$\widehat{AVB} = \frac{\widehat{AV} + \widehat{VD}}{2}$$

Ângulos de vértice não pertencente à circunferência

Utilizando os conhecimentos anteriores, podemos ainda determinar a amplitude de ângulos com o vértice no interior ou no exterior de uma circunferência.

- **Ângulo com o vértice no interior de uma circunferência**

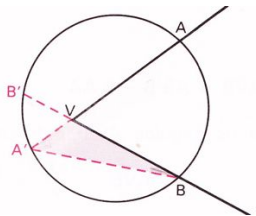


O ângulo AVB é um ângulo com o vértice no interior da circunferência.

Ângulo de um ângulo com o vértice no interior de uma circunferência

Teorema

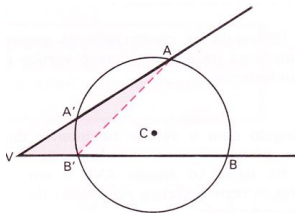
A amplitude de um ângulo com o vértice no interior de uma circunferência é igual à semi-soma das amplitudes dos arcos compreendidos entre os seus lados e os seus prolongamentos.



$$\widehat{A'VB'} = \frac{\widehat{AB} + \widehat{A'B'}}{2}$$

Ângulos de vértice não pertencente à circunferência - continuação

- **Ângulo com o vértice no exterior de uma circunferência**

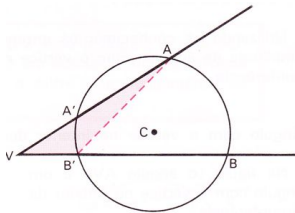


O ângulo AVB é um ângulo com o vértice no exterior da circunferência.

Ângulo de um ângulo com o vértice no exterior de uma circunferência

Teorema

A amplitude de um ângulo com o vértice no exterior de uma circunferência é igual à semidiferença das amplitudes dos arcos compreendidos entre os seus lados.



$$\widehat{AVB} = \frac{\widehat{AB} - \widehat{A'B'}}{2}$$

- Paulo Abrantes e Raul Fernando Carvalho, O novo M9, Texto Editora Lda, 1991.

1. GEOMETRIA no PLANO

POLÍGONOS e CIRCUNFERÊNCIA

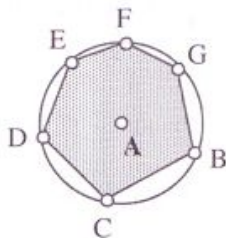
Maria do Carmo Martins

Março de 2012

Polígonos e circunferência

- Podemos inscrever um polígono numa circunferência:

Polígono inscrito numa circunferência - os vértices do polígono são todos pontos da circunferência e os lados do polígono são cordas da circunferência. Também se diz que a circunferência está circunscrita ao polígono.

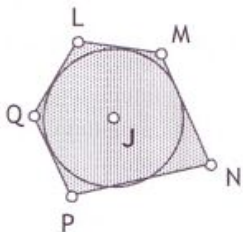


- O hexágono $[BCDEFG]$ está inscrito na circunferência de centro A.
- A circunferência está circunscrita ao hexágono $[BCDEFG]$.

Relação entre polígonos e a circunferência - continuação

- Podemos também considerar um polígono circunscrito a uma circunferência:

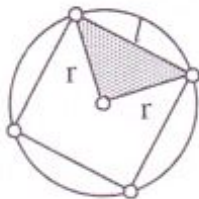
Polígono circunscrito a uma circunferência - os lados do polígono são tangentes à circunferência. Também se diz que a circunferência está inscrita ao polígono.



- O pentágono $[LMNPQ]$ está circunscrito à circunferência de centro J.
- A circunferência está inscrita no pentágono $[LMNPQ]$.

Determinação do raio de uma circunferência circunscrita no quadrado

Qual é o raio da circunferência circunscrita no quadrado?



O triângulo assinalado é isósceles, pois dois dos seus lados são raios da circunferência. O triângulo é também retângulo. (Porquê)

Aplicando a este triângulo o teorema de Pitágoras, obtemos:

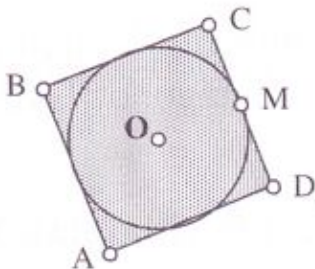
$$r^2 + r^2 = l^2 \Leftrightarrow 2r^2 = l^2 \Leftrightarrow r^2 = \frac{l^2}{2} \Leftrightarrow r = \frac{\sqrt{2}}{2}l.$$

Atividade 17

Trace numa circunferência dois diâmetros perpendiculares e una sequencialmente os extremos dos diâmetros. Que figura obteve?
Explique porque é que este processo permite traçar a figura obtida.

Relação entre o lado do quadrado e o raio da circunferência inscrita

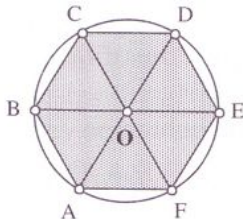
Dado um quadrado, o centro da **circunferência inscrita** é o centro do quadrado e o raio da circunferência é metade do lado do quadrado, sendo a circunferência tangente aos lados do quadrado nos seus pontos médios.



- M é ponto médio do lado do quadrado. O ponto O é o centro do quadrado e da circunferência.
- O raio da circunferência inscrita no quadrado corresponde a metade do lado do quadrado.

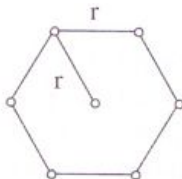
Relação entre o lado do hexágono regular e a circunferência circunscrita

Dado um hexágono regular, podemos facilmente construir a **circunferência circunscrita**. O seu centro é o centro do hexágono, que é o ponto de intersecção das três diagonais que unem os vértices opostos, e a circunferência passa por qualquer um dos vértices do hexágono regular.



Qual o comprimento do raio da circunferência circunscrita no hexágono regular?

Comprimento do raio da circunferência circunscrita no hexágono regular

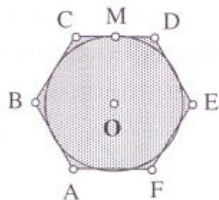


Teorema

O comprimento do raio da circunferência circunscrita ao hexágono regular é igual ao comprimento do lado do hexágono regular.

Circunferência inscrita num hexágono

Dado um hexágono regular, o centro da **circunferência inscrita** é o centro do hexágono regular, sendo a circunferência tangente aos lados do hexágono regular nos seus pontos médios.

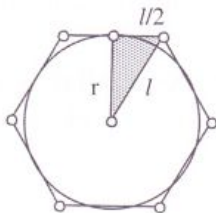


- M é ponto médio do lado do hexágono regular.
- O ponto O é o centro do hexágono regular e da circunferência.

Qual o raio da circunferência inscrita no hexágono regular?

Raio da circunferência inscrita num hexágono regular

Como o lado do hexágono regular circunscrito à circunferência tem o mesmo comprimento que o raio da circunferência que lhe está circunscrita, podemos escrever



O triângulo assinalado é retângulo. Justifique.
Aplicando o teorema de Pitágoras, obtemos:

$$r^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = l^2 \Leftrightarrow r^2 = l^2 - \frac{l^2}{4} \Leftrightarrow r = \sqrt{\frac{3l^2}{4}} \Leftrightarrow r = \frac{\sqrt{3}}{2}l.$$

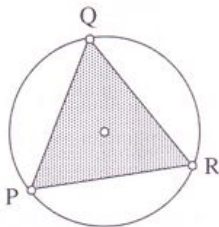
Atividade 18

Trace uma circunferência e com a abertura do compasso igual ao raio da circunferência marque, a partir de um ponto escolhido na circunferência, sucessivamente, cinco pontos, mantendo a abertura do compasso. Una os pontos marcados sobre a circunferência. Que figura obteve?

Explique porque é que este processo permite traçar um hexágono regular.

Relação entre o lado do triângulo equilátero e o raio da circunferência circunscrita

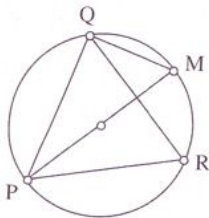
Dado um triângulo equilátero, podemos construir a **circunferência circunscrita**. Para isso há que “encontrar” o ponto de intersecção por exemplo, das medianas do triângulo.



Qual o raio da circunferência circunscrita ao triângulo equilátero?

Raio da circunferência circunscrita ao triângulo equilátero

Consideremos a circunferência circunscrita ao triângulo equilátero de vértices P, Q e R.

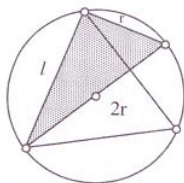


Os pontos P, Q e R dividem a circunferência em três arcos congruentes.

Ao traçarmos um diâmetro por um desses pontos, por exemplo, por P, ficamos com a circunferência dividida em duas partes congruentes. Duas semicircunferências.

Raio da circunferência circunscrita ao triângulo equilátero - continuação

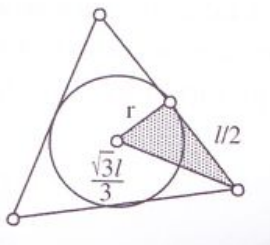
O segmento de reta [QM] representa o lado de um hexágono regular (inscrito numa circunferência) e tem o comprimento igual ao raio da circunferência circunscrita. O triângulo [PQM] é retângulo em Q, visto que este ângulo está inscrito numa semicircunferência. Assim, aplicando o Teorema de Pitágoras tem-se:



$$l^2 + r^2 = (2r)^2 \Leftrightarrow l^2 = 4r^2 - r^2 \Leftrightarrow r^2 = \frac{l^2}{3} \Leftrightarrow r = \frac{\sqrt{3}}{3}l.$$

Relação entre o lado do triângulo equilátero e o raio da circunferência inscrita

Consideremos agora uma circunferência inscrita num triângulo equilátero. Qual é o raio dessa circunferência?



Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo assinalado, tem-se:

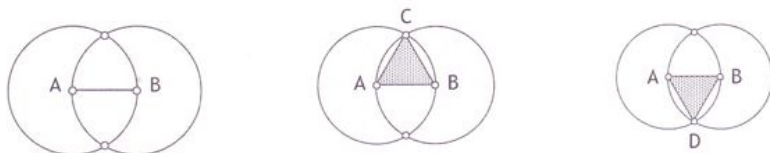
Relação entre o lado do triângulo equilátero e o raio da circunferência inscrita- continuação

$$\begin{aligned}r^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 &= \left(\frac{\sqrt{3}l}{3}\right)^2 \\r^2 &= \frac{3l^2}{9} - \frac{l^2}{4} \\r &= \sqrt{\frac{l^2}{12}} \\r &= \frac{\sqrt{3}}{6}l \\r &= \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{metade}} \frac{\sqrt{3}}{3}l.\end{aligned}$$

Atividade 19

Um modo de construir um triângulo equilátero é traçar um segmento de reta e com o compasso com abertura igual ao comprimento do segmento de reta traçar duas circunferências nos extremos do segmento de reta. Os pontos de intersecção das circunferências permitem construir dois triângulos: um para cima do segmento inicial e outro para baixo. Classifique esses triângulos, quanto aos lados.

Explique porque é que este processo permite traçar um triângulo equilátero.



Elementos de um polígono - resumo

Um polígono possui os seguintes elementos:

- Lados
- Vértices
- Diagonais
- Ângulos internos
- Ângulos externos

Ângulo de um polígono

- Um polígono com n lados tem n ângulos internos e n ângulos externos.
- A soma dos ângulos externos de qualquer polígono é 360° .
- A soma dos ângulos internos de um polígono de n lados é $(n - 2)180^\circ$.

Ângulos de um polígono regular

- Num polígono regular com n lados a amplitude do ângulo interno é dada por $\frac{(n-2)180^\circ}{n}$.
- Num polígono regular com n lados a amplitude do ângulo externo é dada por $\frac{360^\circ}{n}$.

- Palhares, P., *Elementos de Matemática para professores do Ensino Básico*, Lidel, 2004.

1. GEOMETRIA no PLANO

COMPOSIÇÃO de POLÍGONOS

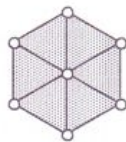
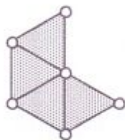
Maria do Carmo Martins

Março de 2012

Composição de polígonos

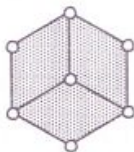
Com alguns polígonos, colocados de certo modo, é possível construir outros. É o caso do hexágono regular que pode ser construído partindo de:

- de seis triângulos equiláteros colocados à volta de um ponto e justapondo os lados;

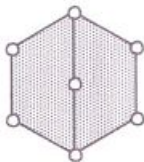


Composição de polígonos - continuação

- de três losangos especiais;

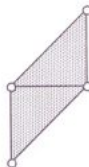


- dois trapézios isósceles especiais;



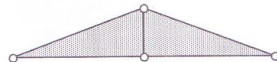
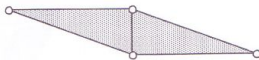
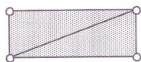
Composição de polígonos a partir de triângulos rectângulos isósceles

Com triângulos rectângulos isósceles é possível construir quadrados, paralelogramos e outros triângulos rectângulos isósceles.



Composição de polígonos a partir de triângulos retângulos escalenos

Com triângulos retângulos escalenos é possível construir retângulos, paralelogramos e outros triângulos isósceles.

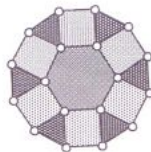
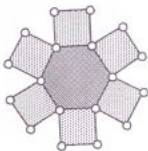


Composição de um polígono a partir de outros polígonos diferentes

Muitas outras formas podem ser obtidas usando, por exemplo:

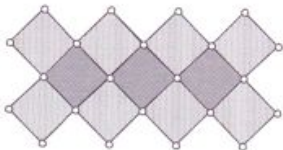
- hexágonos regulares;
- quadrados;
- triângulos equiláteros.

Estes polígonos são colocados justapostos, sem deixar espaços livres entre si e sem que ocorra qualquer sobreposição. Com os polígonos referidos gerou-se um novo polígono - um dodecágono - que também é regular.

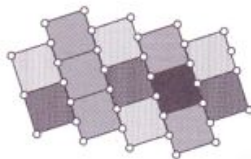


Pavimentação

Quando se preenche uma porção de plano com figuras, sem deixar espaços vazios e sem que essas figuras se sobreponham, dizemos que se realizou uma **pavimentação**. As pavimentações mais usuais utilizam quadrados e retângulos, como as que vemos nos soalhos e paredes com azulejos. Podem ser pavimentações lado a lado, uma vez que os polígonos utilizados partilham os lados, ou não lado a lado quando tal não acontece.



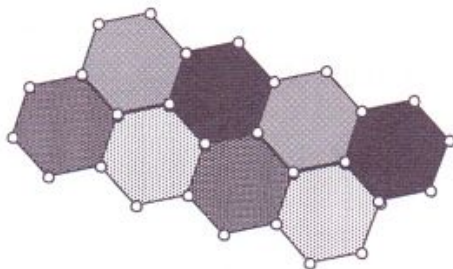
Pavimentação lado a lado



Pavimentação não lado a lado

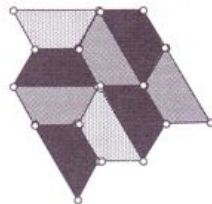
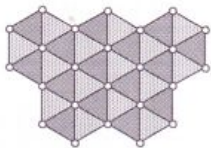
Exemplos de pavimentação com polígonos convexos

- Os hexágonos regulares pavimentam o plano do seguinte modo:



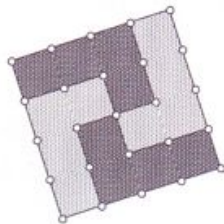
Exemplos de pavimentação com polígonos convexos

O mesmo acontece aos triângulos equiláteros e aos losangos e trapézios que foram usados para construir o hexágono regular.



Exemplos de pavimentação com polígonos não convexos

As pavimentações apresentadas anteriormente foram construídas com polígonos convexos. No entanto, também é possível pavimentar o plano com polígonos não convexos, como por exemplo:



- Palhares, P., *Elementos de Matemática para professores do Ensino Básico*, Lidel, 2004.

SISTEMAS de COORDENADAS no PLANO. VETORES

Maria do Carmo Martins

Março de 2013

- A origem do referencial e dos gráficos cartesianos é devida a René Descartes (1595-1650), daí a designação “cartesiano”. Na sua obra prima, *O Discurso do Método* (1637), Descartes incluiu um apêndice de Geometria, onde unifica Álgebra e Geometria, dando origem à Geometria Analítica e referindo-se ao sistema de coordenadas. No entanto, pensa-se que o verdadeiro criador do sistema de eixos foi Fermat (1601-1665), na sua obra póstuma *Isagoge* (1679) que foi escrita muito antes da sua publicação.

- Gottfried Leibniz (1646-1716) introduziu o termo **coordenada**, juntamente com os de **abscissa** e **ordenada** em 1692.
- Por vezes, surge a designação **referencial ortogonal** e **monométrico** quando se usa um sistema de eixos perpendiculares com a mesma graduação.

Reta real e Sistema cartesiano

Como sabemos, qualquer número real pode ser representado na reta real. Nesta reta há um ponto que define a origem, há uma unidade de comprimento e um sentido.

Depois disso, passou-se a relacionar duas grandezas. Uma forma de o fazer é, por exemplo, através de uma tabela de valores. Outra forma, é por intermédio de um gráfico. Para isso, usaremos o referencial cartesiano, que é um sistema de dois eixos perpendiculares, onde a cada ponto corresponde às suas coordenadas.

Referenciais cartesianos no plano

Em geometria analítica vamos utilizar o referencial ortogonal e monométrico (o. m. Oxy) ou (o. m. xOy). O referencial diz-se ortogonal porque os dois eixos são perpendiculares e diz-se monométrico porque a unidade de comprimento é a mesma nos dois eixos.

A cada ponto do plano corresponde um par ordenado de números: as **coordenadas** do ponto. A primeira diz respeito ao eixo horizontal (eixo Ox) e designa-se por **abcissa** e a segunda coordenada diz respeito ao eixo vertical (eixo Oy) e designa-se por **ordenada**. Assim:

$(\text{abcissa}, \text{ordenada})$

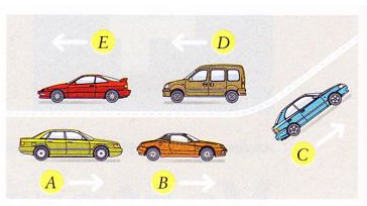
Exercício 1

Marque, no referencial cartesiano, os pontos:

$(1,1)$, $(1,4)$, $(4,4)$, $(0,0)$, $(2,-1)$, $(0,-2)$, $(5,0)$, $(-1, -3)$.

Direção e sentido

Na figura:



- A, B, D e E circulam na mesma direção.
- C circula numa direção diferente.
- A e B circulam no mesmo sentido.
- D e E circulam no mesmo sentido
- D e B circulam em sentidos diferentes.

Para cada direção há dois sentidos opostos.

Vetores - Segmentos orientados

Seja r uma reta e nela consideremos os pontos A e B . Ao segmento de reta $[AB]$ podemos associar dois sentidos:

- o de A para B ou o de B para A .

No primeiro caso, escreve-se $[A, B]$ para designar o **segmento orientado** com origem em A e extremidade em B .

No segundo caso, escreve-se $[B, A]$ para designar o **segmento orientado** com origem em B e extremidade em A .

Se o ponto A coincide com o ponto B , diz-se que o segmento orientado $[A, A]$ é o **segmento nulo**.

O segmento orientado $[A, B]$ pode representar-se por \overrightarrow{AB} e, então designa-se por **vetor aplicado em A** .

Um **segmento orientado** é caracterizado por:

- uma direcção,
- um sentido,
- um comprimento
- e uma origem (ou ponto de aplicação).

Relação de equipolência definida no conjunto dos segmentos orientados

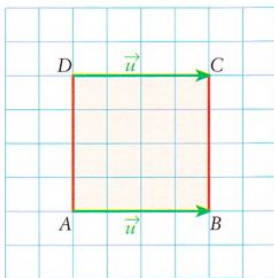
Definição

*Dois segmentos orientados, $[A, B]$ e $[C, D]$ são **equipolentes** se e só se têm o mesmo comprimento, a mesma direção e o mesmo sentido.*

- É evidente que todos os segmentos nulos são equipolentes.
- A relação de equipolência entre segmentos orientados é uma relação de equivalência, pois é reflexiva, simétrica e transitiva. Sendo assim, divide o conjunto dos segmentos orientados de um plano em classes de equivalência, neste caso, **classes de equipolência**, cada uma das quais define um **vetor livre** ou simplesmente **vetor**.

Vetor ou vetor livre

Na figura abaixo está representado o quadrado $[ABCD]$.



- Os segmentos orientados $[A, B]$ e $[D, C]$ são equipolentes. Porquê?
- Complete: Segmentos orientados equipolentes representam o _____
- Complete: $\overrightarrow{AB} \dots \overrightarrow{DC}$
- Um vetor (ou vetor livre) é um ente matemático caracterizado por uma direção; um sentido e um comprimento.

Vetor livre - definição

Definição

O **vetor livre** \vec{u} representa todos os segmentos orientados que têm:

- a mesma direção
- o mesmo sentido
- o mesmo comprimento

Vetor simétrico

- Se os pontos A e B são distintos, $[A, B]$ não é equipolente a $[B, A]$, (embora tenham a mesma direção e o mesmo comprimento, têm sentidos opostos); logo,

$$\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}.$$

No entanto,

$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}.$$

Observação:

- Não havendo confusão, representa-se um vetor livre por uma letra latina minúscula com uma seta por cima. Por exemplo,

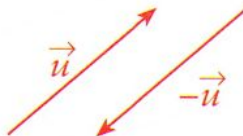
$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{x}, \vec{u}, \dots$$

- O vector livre \overrightarrow{AA} é chamado **vetor nulo** e representa-se por $\vec{0}$ (zero com uma seta por cima). A direção e o sentido do vetor nulo são indeterminados, mas o comprimento é igual a zero.

Vetor simétrico - definição

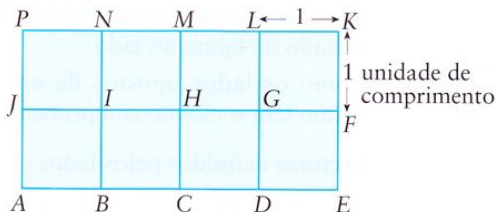
Definição

Ao vetor que tem a mesma direção, o mesmo comprimento e sentido contrário ao de \vec{u} chama-se vetor simétrico de \vec{u} e representa-se por $-\vec{u}$.



Exemplo - vetor simétrico

A figura seguinte representa um retângulo dividido em oito quadrados geometricamente iguais.



Escreva os vetores

$$\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{IH}, \overrightarrow{NB}, \overrightarrow{BE} \text{ e } \overrightarrow{PN};$$

como o simétrico de um dos vetores da figura.

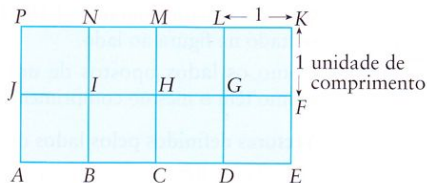
Norma de um vetor - definição

Definição

Chama-se norma de um vetor \vec{u} e representa-se por $||\vec{u}||$ à medida do comprimento do vetor \vec{u} , numa determinada unidade.

Exemplo - Norma de um vetor

Considere novamente a figura:



Determine a norma dos seguintes vetores:

$$\overrightarrow{MK}, \overrightarrow{NB}, \overrightarrow{FJ}, \overrightarrow{FL} \text{ e } \overrightarrow{CB}.$$

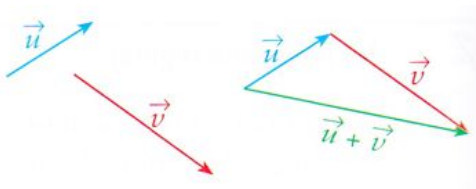
- Repare que a **norma de qualquer vetor é um número real não negativo.**

Operações com vetores: Adição de vetores

No que se segue, designa-se por \mathcal{P} o conjunto de pontos de um plano e por \mathcal{V} o conjunto de vetores definidos em \mathcal{P} .

No conjunto \mathcal{V} de todos os vetores livres, a adição é a operação que transforma um par ordenado de vetores \vec{u} e \vec{v} num vetor que se chama **soma** e se designa por $\vec{u} + \vec{v}$.

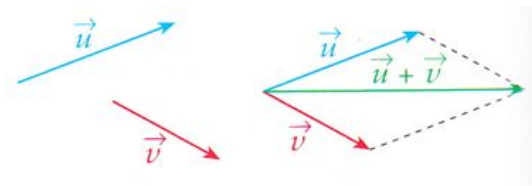
Adição de vetores - Regra do triângulo



Dados dois vetores \vec{u} e \vec{v} chama-se **soma de \vec{u} com \vec{v}** , e representa-se por $\vec{u} + \vec{v}$, ao vetor que se obtém do seguinte modo:

- Consideramos um representante do vetor \vec{u} e outro do vetor \vec{v} de modo que a extremidade do representante de \vec{u} coincida com a origem do representante de \vec{v} .
- Traçamos o vetor cuja origem é a origem do representante de \vec{u} e a extremidade é a extremidade do representante de \vec{v} . O vetor obtido é o vetor $\vec{u} + \vec{v}$.

Adição de vetores - Regra do paralelogramo



Outra forma de obter a soma de dois vetores é a seguinte:

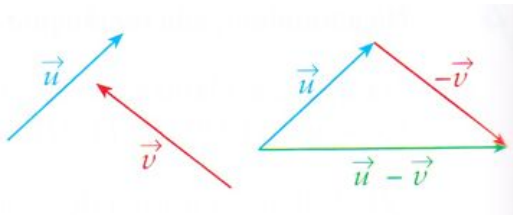
- Desenhar os representantes dos dois vetores dados com uma origem em comum.
- Traçar um paralelogramo desenhando os lados paralelos aos dois vetores.
- O vetor diagonal do paralelogramo com origem comum aos dois vetores é um representante da soma dos dois vetores dados.

Relação de Chasles

A relação seguinte, chamada **relação de Chasles**, é verdadeira para todo o terno ordenado (A,B,C) de pontos de \mathcal{P}

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Subtração de dois vetores



Para calcular a diferença entre os vetores \vec{u} e \vec{v} calcula-se a soma de \vec{u} com o simétrico de \vec{v} . Isto é,

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v}).$$

Consequência da definição de subtração

- ① Sendo \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{CD} representantes de \vec{u} e \vec{v} , respectivamente, pode escrever-se

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$$

Propriedades da adição de vetores

A adição de vetores goza das seguintes propriedades:

- Comutativa

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V}, \quad \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$$

- Associativa

$$\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathcal{V}, \quad (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$$

- Existência de elemento neutro

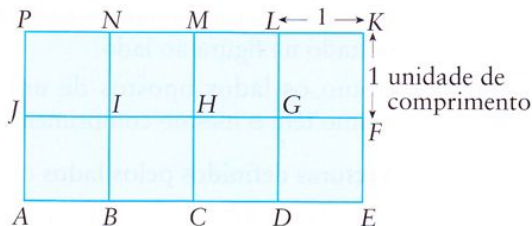
$$\forall \vec{u} \in \mathcal{V}, \quad \vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$$

- Existência de simétrico

$$\forall \vec{u} \in \mathcal{V}, \quad \vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$$

Exemplo - adição e subtração de vetores

Tendo em conta a figura

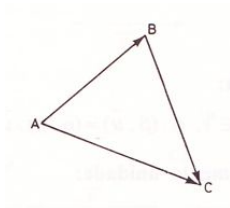


Calcule:

1 $\overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NL} =$ _____
2 $\overrightarrow{JI} + \overrightarrow{HM} =$ _____
3 $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{MC} =$ _____

4 $\overrightarrow{PN} + \vec{0} =$ _____
5 $\overrightarrow{PM} - \overrightarrow{HG} =$ _____

Exercício 2



Sendo A, B e C três pontos não colineares, simplifique a escrita de cada um dos vetores seguintes:

① $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA}$

② $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$

③ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB}$

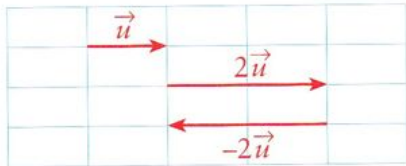
④ $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$

Multiplicação de um vetor por um número real - Exemplo

Consideremos a figura:

O vetor $\vec{u} + \vec{u} = 2\vec{u}$.

O vetor $-2\vec{u} = -\vec{u} + (-\vec{u})$.



Complete:

- Os vetores \vec{u} e $2\vec{u}$ têm a mesma _____, o mesmo _____ e a norma de $2\vec{u}$ é _____ vezes a norma de \vec{u} .
- Os vetores \vec{u} e $-2\vec{u}$ têm a mesma _____, sentidos _____ e a norma de $-2\vec{u}$ é _____ vezes a norma de \vec{u} .

Multiplicação de um vetor por um número real

Sendo $k \in \mathbb{R}$ e $\vec{u} \in \mathcal{V}$, a multiplicação de um número real k por um vetor \vec{u} é a operação que faz corresponder ao par ordenado (k, \vec{u}) o vetor $k\vec{u}$ que se designa **produto do número real k pelo vetor \vec{u}** .

O vetor $k\vec{u}$ tem:

- a direção de \vec{u}
- norma $||k\vec{u}|| = |k| \times ||\vec{u}||$
- sentido $\begin{cases} \text{de } \vec{u} & \text{se } k > 0 \\ \text{de } -\vec{u} & \text{se } k < 0 \end{cases}$

Se $k = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$, $k\vec{u}$ é um vetor de direção e sentido indeterminado e de comprimento nulo.

Propriedades da multiplicação de um número real por um vetor

Sejam \vec{u} e \vec{v} dois vetores quaisquer e k e k' dois números reais quaisquer. A multiplicação de um número real por um vetor goza das seguintes propriedades:

$$\textcircled{1} \quad k(k'\vec{u}) = (kk')\vec{u}$$

$$\textcircled{2} \quad k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$$

$$\textcircled{3} \quad (k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$$

$$\textcircled{4} \quad 1 \times \vec{u} = \vec{u} \times 1 = \vec{u}$$

Outras propriedades

Verificam-se ainda outras propriedades:

- $\forall a \in \mathbb{R}, \forall \vec{u} \in \mathcal{V}, a.\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow a = 0 \vee \vec{u} = \vec{0};$
- $\forall a \in \mathbb{R}, \forall \vec{u} \in \mathcal{V}, a.(-\vec{u}) = -(a\vec{u}) = (-a)\vec{u};$
- $\forall \vec{u} \in \mathcal{V}, (-1).\vec{u} = -\vec{u}.$

Exercício 3

Exprima cada um dos vetores seguintes sob a forma de produto de um número real pelo vetor \overrightarrow{MP} :

① $3 \overrightarrow{MP} + 2 \overrightarrow{MP}$

② $\frac{2}{5} \overrightarrow{MP} - \overrightarrow{MP}$

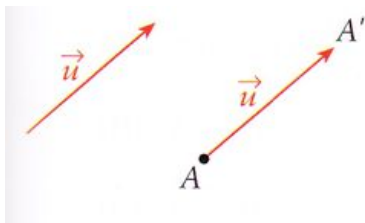
③ $3 \cdot (-2 \overrightarrow{PM})$

④ $(-\frac{3}{5}) \cdot (\frac{1}{2} \overrightarrow{PM})$

Soma de um ponto com um vetor

Definição

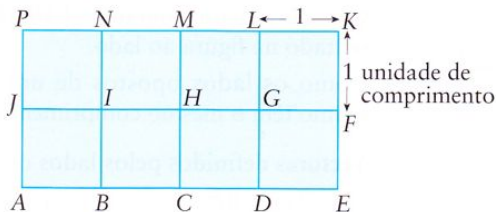
Dados um ponto A e um vetor \vec{u} , chama-se a soma do ponto A com o vetor \vec{u} ao ponto A' tal que $\overrightarrow{AA'} = \vec{u}$.



Repare que a soma de um ponto com um vetor é um ponto.

Soma de um ponto com um vetor - exemplo

Na figura:



tem-se:

① $A + \overrightarrow{HG} = \underline{\hspace{2cm}}$

② $B + \overrightarrow{DL} = \underline{\hspace{2cm}}$

③ $\underline{\hspace{2cm}} + \overrightarrow{FG} = J$

④ $P + \underline{\hspace{2cm}} = L$

⑤ $C + \overrightarrow{DK} = \underline{\hspace{2cm}}$

Soma de um ponto com um vetor. Diferença de dois pontos - continuação

Da definição anterior resulta que

$$A' = A + \vec{u} \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\vec{u} = A' - A}$$



a diferença entre dois pontos é um vetor

Em suma:

- $\overrightarrow{AB} = B - A$

Exercício 4

Marque três pontos A , B e C não colineares e, em seguida, os pontos:

① $P = A + 3(B - A);$

② $Q = A + (B - A) + 2(C - A);$

③ $R = B - \frac{1}{2}(C - A).$

Vetores colineares

Definição

Dois vetores, não nulos, \vec{u} e \vec{v} são **colineares** se e só se existe um número real $k \neq 0$ tal que $\vec{v} = k\vec{u}$.



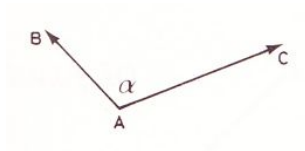
Da definição anterior resulta que:

- dois vetores colineares têm a mesma direção se nenhum deles é o vetor nulo;
- O vetor nulo é colinear com qualquer vetor.

Ângulo de dois vetores

Definição

Ângulo de dois segmentos orientados, não nulos, com a mesma origem é o ângulo convexo por eles formado.

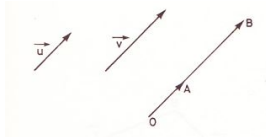


Ângulo de dois vetores - continuação

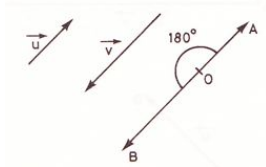
É evidente que:

1 $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V} \setminus \{\vec{0}\}, \widehat{\vec{u} \vec{v}} \in [0^\circ, 180^\circ];$

- $\widehat{\vec{u} \vec{v}} = 0^\circ \Leftrightarrow \vec{u} \text{ e } \vec{v} \text{ têm o mesmo sentido;}$



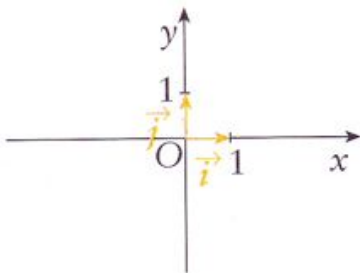
- $\widehat{\vec{u} \vec{v}} = 180^\circ \Leftrightarrow \vec{u} \text{ e } \vec{v} \text{ têm sentidos opostos;}$



- 2 O vetor nulo faz com qualquer vetor um ângulo indeterminado.

Componentes e coordenadas de um vetor num referencial ortonormado

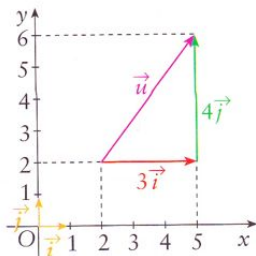
Na origem de um referencial ortogonal e monométrico consideram-se os vetores unitários com direção e sentido dos semieixos positivos. A este referencial passamos a chamar referencial **ortonormado** (o. n.).



Referencial o. n. (O, \vec{i}, \vec{j})

Componentes e coordenadas de um vetor num referencial ortonormado - continuação

Qualquer vetor do plano pode ser decomposto na soma de múltiplos dos vetores unitários referidos. Por exemplo:



$$\vec{u} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$$

As componentes do vetor \vec{u} são os vetores $3\vec{i}$ e $4\vec{j}$.

As coordenadas do vetor \vec{u} são $(3, 4)$ e escreve-se $\vec{u} = (3, 4)$ ou $\vec{u}(3, 4)$.

Componentes e coordenadas de um vetor num referencial ortonormado - continuação

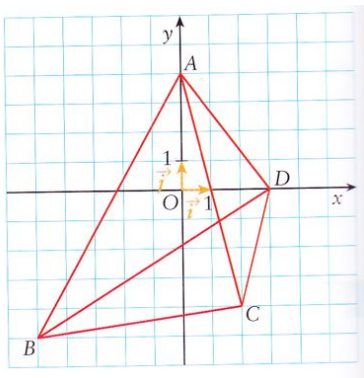
Se \vec{u} é um vetor representado num referencial o. n. (O, \vec{i}, \vec{j}) do plano, então existem números reais a e b tais que

$$\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}.$$

- As **componentes** do vetor \vec{u} são os vetores $a\vec{i}$ e $b\vec{j}$.
- As **coordenadas** do vetor \vec{u} são (a, b) .
Escreve-se: $\vec{u} = (a, b)$ ou $\vec{u}(a, b)$.

Exercício 5

Na figura abaixo estão representados, em referencial o. n. Oxy , os pontos A , B , C e D .



Observando a figura, determine:

- 1 as componentes e as coordenadas do vetor \overrightarrow{AB} ;
- 2 a soma do ponto B com o vetor \overrightarrow{BD} ;
- 3 o vetor que deve adicionar ao ponto A para obter o ponto C .

Base de um conjunto de vetores de um plano

Base do conjunto \mathcal{V} de vetores de um plano é qualquer par ordenado, (\vec{i}, \vec{j}) , de vetores não colineares desse plano.

Isto é,

(\vec{i}, \vec{j}) é uma base de $\mathcal{V} \iff \vec{i}$ e \vec{j} não são colineares, $\forall \vec{i}, \vec{j} \in \mathcal{V}$.

Casos particulares

- As coordenadas do vetor \vec{i} na base (\vec{i}, \vec{j}) são 1 e 0, visto que

$$\vec{i} = 1 \vec{i} + 0 \vec{j}.$$

- As coordenadas do vetor \vec{j} na base (\vec{i}, \vec{j}) são 0 e 1, pois

$$\vec{j} = 0 \vec{i} + 1 \vec{j}.$$

- As coordenadas do vetor nulo são nulas, pois

$$\vec{0} = 0 \vec{i} + 0 \vec{j}.$$

Exercício 6

Na base (\vec{i}, \vec{j}) indique o par ordenado de coordenadas de cada um dos vetores:

① $\frac{2}{5} \vec{i} - 3 \vec{j};$

② $-\vec{i};$

③ $\frac{\sqrt{3} \vec{j} - \vec{j}}{2};$

④ $\sqrt{10} \vec{i} + 3\sqrt{5} \vec{j};$

Igualdade e adição de vetores

Considerando, numa base (\vec{i}, \vec{j}) , os vetores $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$ e $\vec{v} = a'\vec{i} + b'\vec{j}$, tem-se que:

- **a igualdade** de vetores corresponde à igualdade das respetivas coordenadas, isto é,

$$\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow (a, b) = (a', b') \Leftrightarrow a = a' \wedge b = b'$$

- **a adição** de vetores equivale à adição das respetivas coordenadas, isto é

$$\vec{u} + \vec{v} = (a\vec{i} + b\vec{j}) + (a'\vec{i} + b'\vec{j}) = (a + a')\vec{i} + (b + b')\vec{j}$$

Multiplicação de um número real por um vetor

- **a multiplicação de um número real por um vetor**
traduz-se na multiplicação desse número por cada uma das coordenadas do vetor, ou seja

$$k \vec{u} = k \left(a \vec{i} + b \vec{j} \right) = ka \vec{i} + kb \vec{j}$$

Colinearidade de dois vetores

- **a colinearidade** de vetores corresponde à igualdade dos quocientes das coordenadas homónimas. Com efeito,

$$\vec{u} \text{ e } \vec{v} \text{ são colineares} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : \vec{u} = k\vec{v}$$

e fazendo $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$ e $\vec{v} = a'\vec{i} + b'\vec{j}$, resulta que

$$\vec{u} = k\vec{v} \Leftrightarrow a\vec{i} + b\vec{j} = k(a'\vec{i} + b'\vec{j})$$

donde,

$$a = ka' \wedge b = kb' \Leftrightarrow k = \frac{a}{a'} \wedge k = \frac{b}{b'} \Rightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}.$$

Logo, se \vec{u} e \vec{v} são colineares, então $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$.

Propriedade

Dois vetores $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$ e $\vec{v} = a'\vec{i} + b'\vec{j}$ formam uma base de um plano se e só se

$$\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}.$$

Exercício 7

- 1 Numa base (\vec{i}, \vec{j}) considere os vetores $\vec{u} = \sqrt{2}\vec{i} + 3\vec{j}$ e $\vec{v} = a\vec{i} + 2b\vec{j}$. Calcule os números reais a e b de modo que $\vec{u} = \vec{v}$.
- 2 Considere, num referencial o.n. Oxy , os vetores \vec{u} e \vec{v} . Determine $k \in \mathbb{R}$ de modo que os vetores \vec{u} e \vec{v} sejam iguais, sendo $\vec{u} = (2 + k, -1)$ e $\vec{v} = (5, 8 - k^2)$.

Exercício 8

- 1 Considere, num referencial o.n. Oxy , os vetores $\vec{u} = (2, 5)$ e $\vec{v} = (a + 2, -3)$. Determine a de modo que sejam colineares os vetores \vec{u} e \vec{v} .
- 2 Verifique se, numa base (\vec{a}, \vec{b}) , os vetores $2\vec{a} - \vec{b}$ e $\vec{a} + 3\vec{b}$ são colineares.

Exercício 9

Sendo $\vec{u} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$ e $\vec{v} = -\vec{i} + \vec{j}$, exprima em função de \vec{i} e \vec{j} cada um dos seguintes vetores:

① $2\vec{u} - \vec{v}$;

② $2\vec{i} - \vec{u} + \vec{j}$.

Exercício 10

Seja (\vec{i}, \vec{j}) uma base de \mathcal{V} . Verifique se o par de vetores, considerado em cada uma das seguintes alíneas, também é uma base:

① $(\vec{i} + \vec{j}, \vec{i} - \vec{j});$

② $\left(\vec{i} - 2\vec{j}, \frac{1}{2}\vec{i} - \vec{j}\right).$

Exercício 11

Sabendo que, numa base (\vec{a}, \vec{b}) os pares de coordenadas de \vec{u} e \vec{v} são, respetivamente, $(1,2)$ e $(3,4)$,

- 1 prove que (\vec{u}, \vec{v}) também é uma base;
- 2 determine na base (\vec{u}, \vec{v}) as coordenadas de \vec{a} e de \vec{b} .

Versor de um vetor

Definição

Versor de um vetor \vec{v} , não nulo, é o vetor colinear com \vec{v} e de norma 1. Representa-se por $\text{vers } \vec{v}$.

É claro que

$$\text{vers } \vec{v} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}.$$

Bases Ortonormadas

Definição

Base ortonormada de um plano é qualquer par ordenado, (\vec{i}, \vec{j}) , de vetores unitários ortogonais desse plano.

Simbolicamente,

$$(\vec{i}, \vec{j}) \text{ é uma base ortonormada} \Leftrightarrow \|\vec{i}\| = 1 \wedge \|\vec{j}\| = 1 \wedge \widehat{\vec{i}, \vec{j}} = 90^\circ.$$

- Com já referimos, para indicar que (\vec{i}, \vec{j}) é uma base ortonormada escreve-se **base o.n.** (\vec{i}, \vec{j}) .

Norma de um vetor $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$ em base ortonormada

Uma vez que a norma de um vetor é a medida do seu comprimento, tomando para unidade o comprimento dos vetores da base, o teorema de Pitágoras permite escrever:

$$\|\vec{u}\|^2 = \|a\vec{i}\|^2 + \|b\vec{j}\|^2$$

ou

$$\|\vec{u}\|^2 = |a|^2 \|\vec{i}\|^2 + |b|^2 \|\vec{j}\|^2.$$

Mas

$$\|\vec{i}\|^2 = \|\vec{j}\|^2 = 1, \quad |a|^2 = a^2 \text{ e } |b|^2 = b^2.$$

Logo,

$$\|\vec{u}\|^2 = a^2 + b^2$$

ou

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Versor de um vetor em base ortonormada

Sendo o vetor $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$, o versor de \vec{u} é, por definição,

$$\text{vers } \vec{u} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$$

ou seja

$$\text{vers } \vec{u} = \frac{a\vec{i} + b\vec{j}}{\|\vec{u}\|}$$

ou ainda

$$\text{vers } \vec{u} = \frac{a}{\|\vec{u}\|} \vec{i} + \frac{b}{\|\vec{u}\|} \vec{j}$$

Cossenos diretores de um vector \vec{u}

Numa dada base (\vec{i}, \vec{j}) , os cossenos diretores de um vector \vec{u} são os cossenos de $\widehat{\vec{u}, \vec{i}}$ e $\widehat{\vec{u}, \vec{j}}$. Designando por α e por β , respetivamente, os ângulos de \vec{u} com \vec{i} e de \vec{u} com \vec{j} , tem-se

$$\cos \alpha = \cos \left(\widehat{\vec{u}, \vec{i}} \right) \quad \text{e} \quad \cos \beta = \cos \left(\widehat{\vec{u}, \vec{j}} \right).$$

Se a base é ortonormada e $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$, então

$$\cos \alpha = \frac{a}{\|\vec{u}\|}, \quad \cos \beta = \frac{b}{\|\vec{u}\|}$$

e podemos concluir que

Definição

Numa base o.n. os cossenos diretores de um vector \vec{u} são as coordenadas do seu versor.

Exercício 12

Considere numa base o.n. (\vec{e}, \vec{f}) o vetor \vec{u} de coordenadas $(3, -4)$.
Calcule:

- 1 a norma de \vec{u} ;
- 2 o versor de \vec{u} ;
- 3 os cossenos diretores de \vec{u} .

Exercício 13

Calcule as amplitudes dos ângulos que o vetor \vec{u} de coordenadas $(\sqrt{3}, 3)$ faz com os vetores da base o.n. (\vec{a}, \vec{b}) .

Exercício 14

Dados os vetores \vec{a} e \vec{b} , respetivamente, por $(-2,1)$ e $(4,-3)$ numa base o.n. (\vec{e}, \vec{f}) ,

- 1 determine um vetor colinear com \vec{a} e de comprimento igual ao dobro do comprimento de \vec{a} ;
- 2 determine um vetor \vec{u} , de norma 3, de modo que $\widehat{\vec{u}, \vec{f}} = 45^\circ$

Distância entre dois pontos num referencial ortonormado

Consideremos, em relação a um referencial o.n. (O, \vec{i}, \vec{j}) , dois pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$. A distância de A a B é a norma de \overrightarrow{AB} .

Como $\overrightarrow{AB} = B - A = (x_2, y_2) - (x_1, y_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$,

então a norma de \overrightarrow{AB} é

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

e assim

$$d_{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Exercício 15

Considere, num referencial o. n. (O, \vec{i}, \vec{j}) , os pontos $A(1, 2)$, $B(3, 1)$ e $C(5, 2)$.

Prove que o triângulo $[ABC]$ é isósceles.

Coordenadas do ponto médio de um segmento de reta

Num referencial cartesiano o. n. Oxy do plano consideremos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$.

Designemos por x e y as coordenadas de um ponto M de $[AB]$.

$$M \text{ é ponto médio de } [AB] \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}.$$

Mas

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$$

$$M - A = B - M$$

$$(x, y) - (x_1, y_1) = (x_2, y_2) - (x, y)$$

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \wedge \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Coordenadas do ponto médio de um segmento de reta - alternativa

Num referencial cartesiano o. n. Oxy do plano, se $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$, tem-se

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (x_2 - x_1, y_2 - y_1).$$

Se M é o ponto médio de $[AB]$, então

$$M = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right).$$

Exercício 16

Considere, para cada caso, um referencial O. n. Oxy e determine as coordenadas do ponto médio, M , do segmento de reta $[AB]$, sendo:

① $A(1, 3); \quad B(-1, 2);$

② $A(-\frac{1}{2}, 5); \quad B(-1, -\frac{3}{4}).$

Exercício 17

Considere, num plano, um referencial $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ e sejam M_1 , M_2 e M_3 os pontos médios dos segmentos $[AB]$, $[BO]$ e $[OA]$, respectivamente.

- 1 Calcule as coordenadas dos vetores $\overrightarrow{M_2A}$ e $\overrightarrow{M_2M_3}$.
- 2 Prove que $\overrightarrow{M_2M_3} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$

Soluções dos exercícios propostos

2.1) \vec{AB} ; 2.2) $\vec{0}$; 2.3) $\vec{0}$; 2.4) $\vec{0}$

3.1) $5 \vec{MP}$; 3.2) $-\frac{3}{5} \vec{MP}$; 3.3) $6 \vec{MP}$; 3.4) $\frac{3}{10} \vec{MP}$

5.1) As componentes de \vec{AB} são $-5\vec{i}$ e $-9\vec{j}$ e as coordenadas são $(-5, -9)$; 5.2) D ; \vec{AC}

6.1) $(\frac{2}{5}, -3)$; 6.2) $(-1, 0)$; 6.3) $(0, \frac{\sqrt{3}-1}{2})$; 6.4) $(\sqrt{10}, 3\sqrt{5})$

7.1) $a = \sqrt{2}$ e $b = \frac{3}{2}$; 7.2) $k = 3$.

8.1) $a = -\frac{16}{5}$; 8.2) Os vetores dados não são colineares.

9.1) $2\vec{u} - \vec{v} = 7\vec{i} - 5\vec{j}$; 9.2) $2\vec{i} - \vec{u} + \vec{j} = -\vec{i} + 3\vec{j}$

10.1) Os vetores $\vec{i} + \vec{j}$ e $\vec{i} - \vec{j}$ não são colineares, pelo que $(\vec{i} + \vec{j}, \vec{i} - \vec{j})$ é uma base.

10.2) Os vetores $\vec{i} - 2\vec{j}$ e $\frac{1}{2}\vec{i} - \vec{j}$ não formam uma base, pois são colineares.

11.1) (\vec{u}, \vec{v}) é uma base, pois $\frac{1}{3} \neq \frac{2}{4}$

11.2) $\vec{a} = -2\vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{b} = \frac{3}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}$.

Soluções dos exercícios - continuação

$$12.1) \|\vec{u}\| = 5; \quad 12.2) \text{ vers } \vec{u} = \frac{3}{5}\vec{e} - \frac{4}{5}\vec{f}; \quad 12.3) \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{e}}) = \frac{3}{5}$$

e $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{f}}) = -\frac{4}{5}$.

13) As amplitudes dos ângulos de \vec{u} com \vec{a} e de \vec{u} com \vec{b} são 60° e 30° , respetivamente.

14.1) Há dois vetores nas condições pedidas: $-4\vec{e} + 2\vec{f}$ e $4\vec{e} - 2\vec{f}$

$$14.2) \vec{u} = \frac{3\sqrt{2}}{2}\vec{e} + \frac{3\sqrt{2}}{2}\vec{f}$$

15) O triângulo é isósceles pois $\overline{AB} = \overline{BC}$

$$16.1) M(0, \frac{5}{2}); \quad 16.2) (-\frac{3}{4}, \frac{17}{8})$$

$$17.1) \overrightarrow{M_2A} = (a, -\frac{b}{2}); \quad \overrightarrow{M_2M_3} = (\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$$

- Cremilde Falcão, Fernanda Gonçalves, Joaquim Tavares, *Vector 10 Exercícios*, vol.II, Areal Editores.
- Maria Augusta Ferreira Neves, Luís Guerreiro, António Leite, *Exercícios de Matemática A, 10º ano*, Porto Editora.

EQUAÇÃO da RETA no PLANO
POSIÇÃO RELATIVA entre duas RETAS
EQUAÇÃO da CIRCUNFERÊNCIA

Maria do Carmo Martins

Março de 2013

Sumário

- Equação vetorial de uma reta no plano;
- Equações paramétricas de uma reta no plano;
- Equação cartesiana de uma reta no plano;
- Equação geral de uma reta no plano;
- Equação reduzida de uma reta não vertical;
- Equação axial de uma reta no plano;
- Produto escalar ou produto interno de dois vetores;
- Posição relativa entre duas retas no plano;
- Ângulo de duas retas;
- Equação da mediatriz de um segmento de reta;
- Distância de um ponto a uma reta;
- Equação cartesiana da circunferência;
- Posição relativa de uma reta e uma circunferência;
- Equação da reta tangente a uma circunferência num dado ponto.

Introdução

A necessidade de localizar e relacionar os pontos de um plano levou à construção de um sistema de eixos em relação aos quais todos os pontos do plano se possam reportar. Tal sistema é chamado **referencial cartesiano**.

Tendo em conta o que foi mencionado nos pontos anteriores do programa desta disciplina, vamos abordar as **equações da reta**.

Faremos um breve resumo sobre algumas retas especiais com que lidamos vulgarmente.

Exercício 1

Represente graficamente, num referencial o.n., os conjuntos de pontos correspondentes às condições:

① $y = 2;$

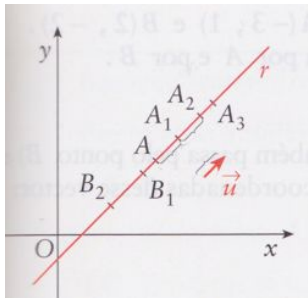
② $x = -2;$

③ $y = x;$

④ $y = -x.$

Equação vetorial de uma reta no plano

Considere a figura:



Repare que

- $A_1 = A + \vec{u}$
- $A_2 = A + 2\vec{u}$
- $A_3 = A + 2,5\vec{u}$
- $B_1 = A - 0,5\vec{u}$
- $B_2 = A - 2\vec{u}$

De um modo geral, sendo P um ponto qualquer da reta r , tem-se que

$$P = A + k\vec{u}, \quad k \in \mathbb{R}$$

Equação vetorial de uma reta no plano

Definição

Dados um ponto A e um vetor não nulo \vec{u} do plano existe uma única reta r que passa no ponto A e tem a direção de \vec{u} . Uma **equação vetorial da reta** r é:

$$P = A + k\vec{u}, \quad k \in \mathbb{R}$$

sendo P um ponto qualquer da reta.

- Ao vetor $\vec{u} = (u_1, u_2)$ chama-se **vetor diretor da reta**.

Considerando as coordenadas de $P(x, y)$, $A(x_0, y_0)$ e $\vec{u} = (u_1, u_2)$, a equação tem a forma:

$$(x, y) = (x_0, y_0) + k(u_1, u_2), \quad k \in \mathbb{R}$$

Exercício 2

Determine as equações vetoriais de cada uma das retas que passam por $A(-2, 3)$ e têm a direção de:

1 $\vec{u} = (2, 3);$

2 $\vec{v} = (-3, 1);$

3 $\vec{w} = (0, 1);$

4 $\vec{t} = (-2, 0).$

Equações paramétricas de uma reta no plano

Consideremos a equação vetorial da reta r

$$(x, y) = (x_0, y_0) + k(u_1, u_2), \quad k \in \mathbb{R}.$$

Determinemos as coordenadas (x, y) de P utilizando as propriedades da adição de vetores e do produto de um número real por um vetor. Assim,

$$(x, y) = (x_0, y_0) + k(u_1, u_2) \quad \Leftrightarrow \quad (x, y) = (x_0 + ku_1, y_0 + ku_2)$$

concluindo-se que os pontos (x, y) da reta r são os que satisfazem o sistema

$$\begin{cases} x = x_0 + ku_1 \\ y = y_0 + ku_2, \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}$$

a que chamamos **representação paramétrica** ou **equações paramétricas da reta r** relativamente ao referencial considerado.

Exercício 3

Determine um sistema de equações paramétricas de cada uma das retas que passam por $B(0, 3)$ e têm a direção de:

① $\vec{a} = (-1, 3);$

② $\vec{b} = (3, 1);$

③ $\vec{c} = (2, 0);$

④ $\vec{d} = (0, -1).$

Equação de uma reta no plano que passa por dois pontos

Dados os pontos $A(x_0, y_0)$ e $B(x_1, y_1)$ pretende-se a reta que tem a direção do vetor \overrightarrow{AB} . Ora,

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (x_1, y_1) - (x_0, y_0) = (x_1 - x_0, y_1 - y_0).$$

Uma **equação vetorial** da reta AB é pois

$$P = A + k \overrightarrow{AB}, \quad \text{com } k \in \mathbb{R}$$

ou ainda

$$(x, y) = (x_0, y_0) + k(x_1 - x_0, y_1 - y_0)$$

de onde se obtêm as **equações paramétricas**

$$\begin{cases} x = x_0 + k(x_1 - x_0) \\ y = y_0 + k(y_1 - y_0), \end{cases} \quad \text{com } k \in \mathbb{R}$$

Exercício 4

Determine equações vetoriais e paramétricas de cada uma das retas definidas pelos pontos:

- 1 $P(2, 1)$ e $Q(4, 5)$;
- 2 $P(-3, 2)$ e $Q(0, 5)$;
- 3 $P(0, -2)$ e $Q(2, 0)$;
- 4 $P(-1, -1)$ e $Q(3, 5)$.

Equação cartesiana de uma reta no plano

Se

$$\begin{cases} x = x_0 + k u_1 \\ y = y_0 + k u_2 \end{cases}$$

for um sistema de equações paramétricas de uma reta r , podemos dar-lhe outro aspecto

$$\begin{cases} k = \frac{x-x_0}{u_1} \\ k = \frac{y-y_0}{u_2} \end{cases} \quad (u_1 \neq 0 \text{ e } u_2 \neq 0)$$

e, eliminando k , obteremos

$$\frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2}$$

que é uma **equação cartesiana da reta r** .

Exercício 5

Determine uma equação cartesiana da reta que passa por $A(1, 1)$ e tem a direção o vetor $\vec{a} = (-3, 2)$.

Equação cartesiana de uma reta no plano que passa por dois pontos

Caso se tenha uma reta definida por dois pontos - $A(x_0, y_0)$ e $B(x_1, y_1)$ - um sistema de equações paramétricas é

$$\begin{cases} x = x_0 + k(x_1 - x_0) \\ y = y_0 + k(y_1 - y_0), \end{cases} \quad \text{com } k \in \mathbb{R}$$

Ao eliminar k entre as duas equações do sistema vem:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}$$

equação cartesiana da reta AB .

Exercício 6

Determine uma equação cartesiana da reta PQ sendo $P(0, -2)$ e $Q(-5, 1)$.

Equação geral de uma reta no plano

As equações cartesianas de uma reta podem revestir-se de várias formas, a que correspondem outras tantas designações.

De

$$\frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2}$$

podemos obter uma equação equivalente

$$u_2x - u_2x_0 = u_1y - u_1y_0$$

ou

$$\underbrace{u_2}_A x - \underbrace{u_1}_B y + \underbrace{u_1y_0 - u_2x_0}_C = 0$$

e, finalmente,

$$Ax + By + C = 0$$

conhecida como **equação geral da reta**.

Equação geral * de uma reta no plano - continuação

Para chegarmos a uma equação geral da reta fizemos $A = u_2$, $B = -u_1$ e $C = u_1y_0 - u_2x_0$. Então, se uma reta é dada pela equação geral $Ax + By + C = 0$, podemos afirmar que um **vetor diretor da reta** é

$$(u_1, u_2) = (-B, A).$$

Note-se desde já que A e B não podem ser simultaneamente nulos - o vetor diretor seria nulo...

* Diz-se *equação geral* pelo facto de representar qualquer reta seja qual for a sua posição no referencial cartesiano.

Casos particulares

Consideremos a equação geral da reta $Ax + By + C = 0$:

- Se $A = 0$, então
 $By + C = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{C}{B}$
sendo a reta paralela ao eixo Ox .

- Se $B = 0$, então
 $Ax + C = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{C}{A}$
sendo a reta paralela ao eixo Oy .

- Se $C = 0$, então
 $Ax + By = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{A}{B}x$
e a reta passa pela origem.

Exercício 7

Determine uma equação geral da reta que:

- 1 Passa por $A(-2, 5)$ e tem a direção de $\vec{a} = (-2, 1)$;
- 2 Passa por $P(5, -1)$ e $Q(3, 2)$;
- 3 Passa por $B(2, -2)$ e tem a direção de $\vec{b} = (3, 0)$;
- 4 Passa por $C(2, 1)$ e tem a direção de $\vec{b} = (0, -2)$.

Equação reduzida de uma reta no plano

A equação $Ax + By + C = 0$ é equivalente, desde que $B \neq 0$, a

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

Fazendo $-\frac{A}{B} = m$ e $-\frac{C}{B} = b$, obtemos:

$$y = mx + b$$

chamada **equação reduzida da reta** não vertical.

Refira-se que esta equação não pode representar retas paralelas ao eixo Oy já que $B \neq 0$.

Significado de m na equação $y = mx + b$

- $m = -\frac{A}{B}$

Ora, $-\frac{A}{B} = \frac{A}{-B} = \frac{u_2}{u_1}$. Então,

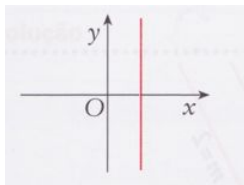
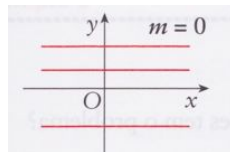
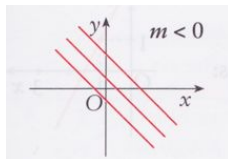
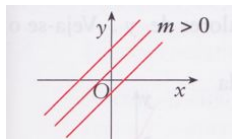
$$m = \frac{u_2}{u_1}$$

representa a tangente trigonométrica do ângulo α , ângulo que a reta faz com o eixo Ox .

- Ao ângulo α chama-se **inclinação da reta**
- e ao coeficiente m , **coeficiente angular** ou **declive da reta**.

Resulta desta definição que o declive de uma reta pode ter qualquer valor real, mas não está definido quando a reta for paralela ao eixo Oy .

Observação



Neste último caso não existe equação reduzida. Estas retas (verticais) têm equações do tipo $x = a$, com $a \in \mathbb{R}$

Vetor diretor e vetor normal de uma reta definida pela equação reduzida

Dada uma reta de declive m ,

- o vetor $(1, m)$ é o vetor diretor da reta
- e $(-m, 1)$ o vetor normal.

Significado de b na equação $y = mx + b$

- $b = -\frac{C}{B}$

Se em $Ax + By + C = 0$ fizermos $x = 0$, obteremos $y = -\frac{C}{B}$.

Então $(0, -\frac{C}{B})$ corresponde ao ponto onde a reta intersecta o eixo Oy (ponto de abcissa nula).

- A b chama-se **ordenada na origem**.

Abcissa na origem

Consideremos agora uma reta s , sendo $Ax + By + C = 0$ uma sua equação geral. Já vimos que a ordenada na origem é $b = -\frac{C}{B}$.

Faz sentido falar da **abcissa na origem**, ou seja, da abcissa do ponto de intersecção da reta com o eixo Ox .

Esse ponto tem **ordenada nula**, pelo que se em $Ax + By + C = 0$ fizermos $y = 0$, obteremos

$$Ax + C = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{C}{A}.$$

Então $(-\frac{C}{A}, 0)$ é o par de coordenadas correspondente ao ponto de intersecção da reta com o eixo Ox .

Ao número real $-\frac{C}{A}$, normalmente representado pela letra a , dá-se o nome de **abcissa na origem**.

Exercício 8

Determine a equação reduzida de cada uma das retas:

- 1 $2x - 3y + 7 = 0$;
- 2 AB , sendo $A(2, 1)$ e $B(-3, 2)$;
- 3 Passa por $P(3, -2)$ e tem a direção de $\vec{u} = (2, 5)$;
- 4 Tem declive 3 e passa por $Q(-2, 1)$.

Equação Axial de uma reta no plano

Sejam $A(a, 0)$ e $B(0, b)$ os pontos de intersecção de uma reta com os eixos de um dado referencial cartesiano ortonormado.

Uma equação vetorial da reta é

$$P = A + k\overrightarrow{AB}$$

ou seja

$$(x, y) = (a, 0) + k(-a, b).$$

Passando para uma equação cartesiana tem-se

$$\frac{x-a}{-a} = \frac{y}{b} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{x}{a} + 1 = \frac{y}{b}$$

que pode escrever-se como

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

chamada **equação axial da reta**.

Observação

A equação axial da reta, que nos indica imediatamente a abcissa e a ordenada na origem da reta dada, não pode, no entanto, representar retas paralelas aos eixos ou passando pela origem. É de facto evidente que não pode ser $a = 0$ nem $b = 0$.

Exercício 9

Determine a abscissa e ordenada na origem de cada uma das retas:

① $2x - 3y + 7 = 0;$

② $y = -2x + \frac{1}{2};$

③ $P = (2, 1) + k(-3, 2);$

④ $y = 3x.$

Exercício 10

Determine as equações axiais das retas:

① $2x + 5y - 10 = 0;$

② $y = 2x - 3y + 6;$

③ $P = (2, 1) + k(3, 2), \text{ com } k \in \mathbb{R};$

④ $\frac{x - 3}{2} = \frac{y + 1}{3}.$

Produto escalar ou produto interno de dois vetores

Definição

O **produto escalar** ou **produto interno** de dois vetores \vec{u} e \vec{v} representa-se por

$$\vec{u} \cdot \vec{v}$$

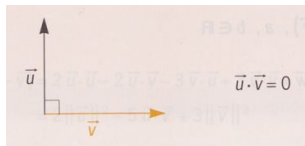
e tem-se por definição:

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ se $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$

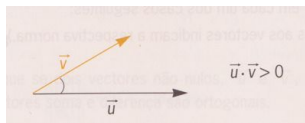
O **produto escalar** de dois vetores é um número, por isso se diz *produto escalar*.

Consequências da definição de produto escalar ou produto interno

- O produto escalar ou produto interno de dois vetores perpendiculares é nulo.

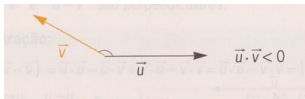


- Se $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$, então o ângulo dos dois vetores é agudo.



Consequências da definição de produto escalar ou produto interno - continuação

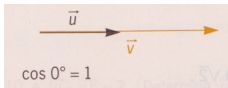
- Se $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$, então o ângulo dos dois vetores é obtuso.



- Se os dois vetores têm a mesma direção:

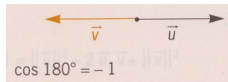
- e o mesmo sentido:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}||$$



- sentidos opostos:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -||\vec{u}|| \times ||\vec{v}||$$



Expressão do produto escalar ou produto interno nas coordenadas dos vetores

Definição

Se $\vec{u} = (a, b)$ e $\vec{v} = (c, d)$, então

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (a, b) \cdot (c, d) = ac + bd$$

- Ângulo de dois vetores no plano:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$$

$$\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$$

Exercício 11

Sendo $\vec{u} = (1, 2)$ e $\vec{v} = (3, 4)$, calcule:

① $\vec{u} \cdot \vec{v}$

② $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$

③ Sendo $\vec{w} = (a, 8)$, determine a de modo \vec{u} e \vec{w} sejam perpendiculares.

Posição relativa entre duas retas - retas paralelas

Consideremos duas retas r e s definidas pelas equações gerais:

$$r : Ax + By + C = 0$$

$$s : A'x + B'y + C' = 0$$

Se os vetores diretores das duas retas forem colineares, isto é, se $\vec{r} = (-B, A)$ for colinear com $\vec{s} = (-B', A')$, então as retas r e s são **paralelas**.

Deverá então verificar-se

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}$$

para que r seja paralela a s . Escreve-se $r \parallel s$.

Condição necessária e suficiente de paralelismo

Pode concluir-se que $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}$ é uma condição necessária e suficiente de **paralelismo** das retas r e s (não paralelas a qualquer dos eixos).

Notemos que:

- Se as retas forem definidas por equações vectoriais, reconhecer-se-á o seu paralelismo pela colinearidade dos vetores directores.
- Se forem definidas pelas equações reduzidas, os seus declives deverão ser iguais.

Retas coincidentes

Há dois casos de paralelismo a considerar:

1) Se $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$ podemos fazer

$$\frac{A}{A'} = k, \quad \frac{B}{B'} = k, \quad \frac{C}{C'} = k$$

pelo que

$$A = kA', \quad B = kB', \quad C = kC',$$

apresentando-se as equações gerais sob a forma

$$r: \quad kA'x + kB'y + kC' = 0$$

$$s: \quad A'x + B'y + C' = 0$$

Conclui-se então que r e s são a *mesma reta* ou **retas coincidentes**. Neste caso, escreve-se $r \cap s = r = s$.

Retas estritamente paralelas

2) Se $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$ as equações apresentar-se-ão assim:

$$r : kA' x + kB' y + C = 0$$

$$s : A'x + B'y + C' = 0$$

representando duas **retas estritamente paralelas** (paralelas, mas não coincidentes). Notemos que, neste caso as retas não têm nenhum ponto comum. Escreve-se $r \cap s = \{\}$.

Retas concorrentes

Se os vetores diretores das duas retas r e s não forem colineares, isto é, se

$$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'},$$

as retas não são paralelas; são **concorrentes**.

Duas retas concorrentes têm um e um só ponto comum, que corresponde à solução do sistema constituído pelas duas equações gerais

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ A'x + B'y + C' = 0 \end{cases}$$

Duas retas r e s , situadas no mesmo plano, podem ser

$$\left\{ \begin{array}{ll} \textit{paralelas} & \left\{ \begin{array}{ll} \textit{coincidentes} & r \cap s = r = s \\ \textit{estritamente} & r \cap s = \{\} \end{array} \right. \\ \textit{concorrentes} & r \cap s = \{I\} \end{array} \right.$$

Exercício 12

Determine as coordenadas do ponto de intersecção de cada par de retas:

① $2x + 3y - 7 = 0$ e $x - y - 1 = 0$;

② $x - 3y + 8 = 0$ e $5x + y - 3 = 0$.

Exercício 13

Averigue da posição relativa das retas indicadas:

① $x + 2y - 3 = 0$ e $3x + 6y + 9 = 0$;

② $2x - y + 10 = 0$ e $x - \frac{1}{2}y + 5 = 0$;

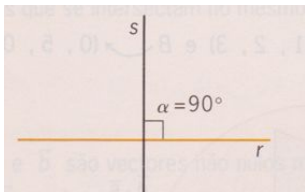
③ $x + y + 1 = 0$ e $x - y + 1 = 0$;

④ $P = (2, 1) + k(3, 2)$ e $Q = (-3, 2) + \lambda(6, 4)$, com $k, \lambda \in \mathbb{R}$

Ângulo de duas retas

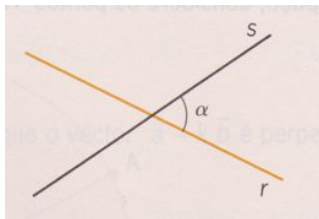
- Se as retas são estritamente paralelas ou coincidentes dizemos que são paralelas e que formam um ângulo de zero graus.
- Se as retas são concorrentes podem ser:

Retas perpendiculares



O ângulo das duas retas é 90° .
Para indicar que as retas são perpendiculares, escreve-se $r \perp s$.

Retas oblíquas



O ângulo das duas retas é inferior a 90°

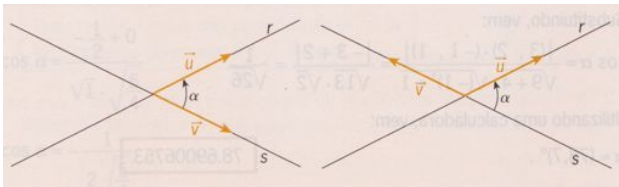
Ângulo de duas retas - definição

Definição

Dadas duas retas r e s concorrentes e não perpendiculares, chama-se ângulo das duas retas ao menor ângulo por elas definido.

Determinação do ângulo de duas retas

Nas figuras seguintes α representa o ângulo das retas r e s



Sendo \vec{u} e \vec{v} os vetores diretores das retas r e s , respetivamente,

$$\cos \alpha = |\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})|$$

pelo que

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$$

Exemplo - Determinação do ângulo entre duas retas

Consideremos duas retas dadas pelas equações vetoriais:

$$r : P = (2, 1) + k(2, -2), \quad k \in \mathbb{R}$$

$$s : Q = (1, 5) + \lambda(0, 3), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

O ângulo destas retas será α tal que

$$\cos \alpha = \frac{|(2, -2) \cdot (0, 3)|}{\sqrt{4+4} \sqrt{9}} = \frac{|-6|}{\sqrt{72}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

o que nos dá para ângulo das duas retas $\alpha = 45^\circ$.

Retas perpendiculares

Sejam r e s duas rectas definidas, respetivamente, pelas equações vectoriais:

$$P = A + k\vec{u} \quad \text{e} \quad Q = B + \lambda\vec{v}$$

Se $r \perp s$, então também \vec{u} é perpendicular a \vec{v} .

Sendo $\vec{u} = (u_1, u_2)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2)$, teremos:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow (u_1, u_2) \cdot (v_1, v_2) = 0 \Leftrightarrow u_1 v_1 + u_2 v_2 = 0$$

condição para que as retas r e s , dadas pelas equações vectoriais, sejam perpendiculares.

Retas perpendiculares - continuação

Estando as retas definidas por equações gerais

$$r: Ax + By + C = 0 \quad \text{e} \quad s: A'x + B'y + C' = 0$$

recordemos que $\vec{r} = (-B, A)$ é um vetor diretor de r e que $\vec{s} = (-B', A')$ é um vetor diretor de s .

Deverá então ser

$$\vec{r} \cdot \vec{s} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (-B, A) \cdot (-B', A') = 0 \quad \Leftrightarrow \quad AA' + BB' = 0$$

condição para que as retas r e s , dadas por equações gerais, sejam **perpendiculares**.

- Se $(-B, A)$ é um vetor diretor de r , então o vetor (A, B) é perpendicular a r .

Exercício 14

Determine equações gerais das retas:

- 1 Perpendicular a $2x + 5y - 2 = 0$ e passando por $(0, 0)$.
- 2 Perpendicular a $x - 3y + 5 = 0$ e passando por $(1, 2)$.

Observação

Se as retas r e s forem definidas, respetivamente, pelas equações reduzidas

$$y = mx + b \quad \text{e} \quad y = m'x + b',$$

- as retas serão perpendiculares se os seus declives estão relacionados pela expressão

$$m' = -\frac{1}{m}$$

dizendo-se que **o declive de uma reta é simétrico do inverso do declive da outra.**

- as retas serão paralelas se os seus declives forem iguais.

Exercício 15

- 1 Determine uma equação reduzida da reta r paralela à reta $x + 2y - 3 = 0$ e que passe pelo ponto $(1, -4)$.
- 2 Determine uma equação reduzida da reta que passa pela origem das coordenadas e é perpendicular à reta de equação $3x - 2y = 1$.

Equação da mediatriz de um segmento de reta

Se considerarmos um ponto $R(x, y)$ genérico que se *desloque* sobre a mediatriz de $[PQ]$, com $P(x_1, y_1)$ e $Q(x_2, y_2)$, verifica-se que

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{PR}\| &= \|\overrightarrow{QR}\| \\ \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} &= \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2} \\ (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 &= (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2\end{aligned}$$

equação que, depois de reduzir os termos semelhantes, se apresenta na forma

$$Ax + By + C = 0$$

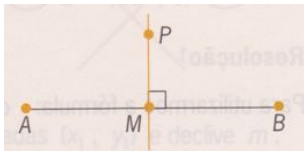
que é a **equação geral da mediatriz de $[PQ]$** .

Exercício 16

- 1 Determine uma equação da mediatriz do segmento $[AB]$ sendo $A(3, 1)$ e $B(2, 5)$.
- 2 Determine uma equação a mediatriz do segmento $[PQ]$ sendo $P(-4, 3)$ e $Q(2, 3)$.

Equação da mediatriz de um segmento de reta - alternativa

A mediatriz de um segmento de reta $[AB]$ é a reta perpendicular a $[AB]$ e que passa no seu ponto médio M .



Podemos então dizer que:

Definição

A mediatriz do segmento $[AB]$ é o conjunto dos pontos $P(x, y)$ tais que

$$\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

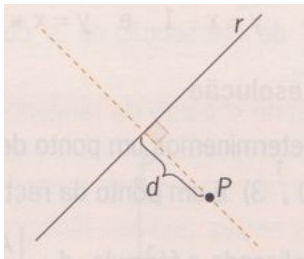
sendo M o ponto médio de $[AB]$.

Exercício 17

Resolva o exercício 16 pela determinação alternativa da equação da mediatriz de um segmento.

Pé da perpendicular

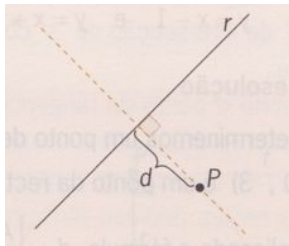
A determinação do **pé da perpendicular** traçada de um ponto P para uma reta r consiste na determinação do ponto de intersecção de duas retas: a reta dada (r) e a reta que, passando pelo ponto dado (P), é perpendicular à primeira.



Exercício 18

Determine o pé da perpendicular traçada por $P(6, 2)$ para a reta $y = 2x + 1$.

Distância de um ponto a uma reta



A **distância de um ponto P a uma reta r** é o comprimento do segmento que une o ponto com o pé da perpendicular traçada por P para r . Esta distância na figura é representada por d .

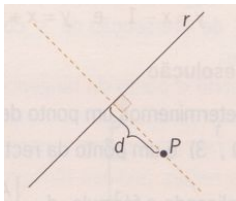
Poderemos pois determinar essa distância seguindo os passos:

- 1 Determinar o pé da perpendicular traçada por P para r .
- 2 Determinar a distância entre os dois pontos, P e o pé da perpendicular.

Exercício 19

- 1 Determine a distância do ponto $P(7, 4)$ à reta $x - y + 3 = 0$.
- 2 Determine a distância do ponto $P(8, 1)$ à reta $3x - 4y - 5 = 0$.

Distância de um ponto a uma reta - alternativa



A distância d de um ponto $P(x_0, y_0)$ à reta definida pela sua equação geral $Ax + By + C = 0$ é dada por:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Exercício 20

Resolva o Exercício 19 recorrendo à alternativa da distância de um ponto uma reta.

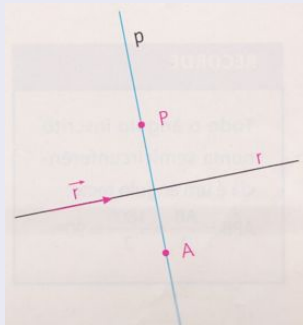
Equação da reta que passa por um ponto dado e é perpendicular a outra reta - alternativa

Definição

A reta p que passa pelo ponto A e é perpendicular a uma reta r é o conjunto dos pontos P tais que

$$\overrightarrow{AP} \cdot \vec{r} = 0$$

sendo \vec{r} um vetor diretor da reta r .



Exercício 21

Num referencial o.n., considere a reta r de equação

$$(x, y) = (2, 1) + k(-3, 4), \quad k \in \mathbb{R}.$$

Determine uma equação da reta perpendicular a r que passa pelo ponto $A(3, 5)$.

Equação cartesiana da circunferência

Dado um ponto $C(a, b)$, num referencial o.n., a sua distância a outro ponto $P(x, y)$ é, precisamente, a norma de \overrightarrow{CP} , ou seja,

$$\|\overrightarrow{CP}\| = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}.$$

Se chamarmos à norma $\|\overrightarrow{CP}\|$ raio da circunferência e a designarmos por r , teremos

$$\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r$$

ou

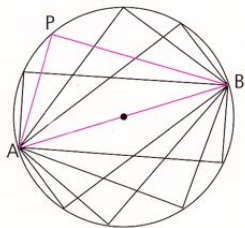
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

que é uma **equação cartesiana** da circunferência de centro $C(a, b)$ e raio r .

Exercício 22

- 1 Determine uma equação da circunferência com centro em $C(3, 4)$ e que passa pela origem de um referencial o.n.
- 2 Determine uma equação da circunferência tal que $[AB]$ seja um seu diâmetro, com $A(2, 1)$ e $B(-2, 5)$.
- 3 Determine uma equação da circunferência que passa pelos pontos $B(0, 5)$, $Q(6, 5)$ e $R(3, -4)$.

Circunferência de diâmetro $[AB]$ - alternativa



Consideremos uma circunferência de diâmetro $[AB]$. Dizer que P é ponto da circunferência distinto de A e de B equivale a dizer que o triângulo $[APB]$ é retângulo em P , ou seja, que $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$.

Definição

A circunferência de diâmetro $[AB]$ é o conjunto dos pontos $P(x, y)$ tais que

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0.$$

Exercício 23

Determine num referencial o.n. uma equação da circunferência de diâmetro $[AB]$ sendo $A(1, 2)$ e $B(-3, 1)$.

Como determinar a posição relativa de uma reta e uma circunferência?

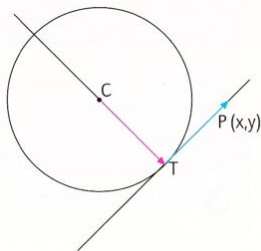
Para se averiguar da posição relativa de uma reta e uma circunferência bastará então tentar determinar a sua intersecção. O sistema que se obtém tem uma equação do 1º grau e outra do 2º grau, ambas com duas incógnitas.

- Se o sistema for impossível, não há pontos de intersecção e, portanto, a reta é exterior à circunferência.
- Se o sistema tiver uma única solução, a reta é tangente à circunferência.
- Se o sistema tiver duas soluções, estas são os pontos de intersecção com a circunferência, pelo que a reta é secante à circunferência.

Exercício 24

- 1 Averigue da posição relativa da reta $3x - 4y + 16 = 0$ e da circunferência de equação $x^2 + y^2 - 6x - 16 = 0$.
- 2 Averigue da posição relativa da reta $x - y + 3 = 0$ e da circunferência de equação $x^2 + y^2 = 9$.

Equação da reta tangente a uma circunferência num dado ponto



É conhecida a propriedade que afirma que toda a reta tangente à circunferência é perpendicular à reta que passa pelo centro e pelo ponto de tangência (T). Então, podemos dizer que

Definição

A reta tangente à circunferência de centro C no ponto T é o lugar geométrico dos pontos $P(x, y)$ tais que

$$\overrightarrow{TP} \cdot \overrightarrow{CT} = 0.$$

Exercício 25

- 1 Determine uma equação da reta tangente à circunferência de equação $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 25$ no ponto $T(2, 3)$.
- 2 Dada uma circunferência $x^2 + (y - 2)^2 = 13$ determine uma equação da tangente à circunferência no ponto $(3, 0)$.

- Paulo Abrantes, Raul Fernanado Carvalho, M_{10} , Texto Editora.
- Ana Maria Brito Jorge, Conceição Barroso Alves, Graziela Fonseca, Judite Barbedo, *Infinito 11*, Parte 1, Areal Editores.
- Maria Augusta Ferreira Neves, Maria Luísa Monteiro Faria, *Exercícios Matemática 11ºano - 1ª Parte*, Porto Editora.

Soluções dos exercícios propostos

$$2.1 \ (x, y) = (-2, 3) + k(2, 3), \ k \in \mathbb{R};$$

$$2.2 \ (x, y) = (-2, 3) + k(-3, 1), \ k \in \mathbb{R};$$

$$2.3 \ (x, y) = (-2, 3) + k(0, 1), \ k \in \mathbb{R};$$

$$2.4 \ (x, y) = (-2, 3) + k(-2, 0), \ k \in \mathbb{R};$$

$$3.1 \ \begin{cases} x = -k \\ y = 3 + 3k \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}$$

$$3.2 \ \begin{cases} x = 3k \\ y = 3 + k \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}$$

$$3.3 \ \begin{cases} x = 2k \\ y = 3 \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}$$

$$3.4 \ \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 - k \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}$$

$$4.1 \ (x, y) = (2, 1) + k(2, 4) \quad \text{e} \quad \begin{cases} x = 2 + 2k \\ y = 1 + 4k \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}$$

$$4.2 \ (x, y) = (-3, 2) + k(3, 3) \quad \text{e} \quad \begin{cases} x = -3 + 3k \\ y = 2 + 3k \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}$$

Soluções dos exercícios propostos - continuação

$$4.3 \ (x, y) = (0, -2) + k(2, 2) \quad \text{e} \quad \begin{cases} x = 2k \\ y = -2 + 2k \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}$$

$$4.4 \ (x, y) = (-3, 2) + k(3, 3) \quad \text{e} \quad \begin{cases} x = -1 + 4k \\ y = -1 + 6k \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}$$

$$5. \ \frac{x-1}{-3} = \frac{y-1}{2}$$

$$6. \ \text{Usando o ponto } P \text{ a equação pedida é } \frac{x}{-5} = \frac{y+2}{3}$$

$$7.1 \ 3x + 2y - 13 = 0$$

$$7.1 \ y + 2 = 0$$

$$7.1 \ x + 2y - 8 = 0$$

$$7.1 \ x - 2 = 0$$

$$8.1 \ y = \frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$$

$$8.1 \ y = \frac{5}{2}x - \frac{19}{2}$$

$$8.1 \ y = -\frac{1}{5}x + \frac{7}{5}$$

$$8.1 \ y = 3x + 7$$

$$9.1 \ \text{A abcissa na origem é } -\frac{7}{2} \text{ e a ordenada na origem é } \frac{7}{3};$$

$$9.2 \ \text{A abcissa na origem é } \frac{1}{4} \text{ e a ordenada na origem é } \frac{1}{2};$$

Soluções dos exercícios propostos - continuação

9.3 A abcissa na origem é $\frac{7}{2}$ e a ordenada na origem é $\frac{7}{3}$;

9.1 A abcissa na origem é 0 e a ordenada na origem é 0

$$10.1 \frac{x}{5} + \frac{y}{2} = 1$$

$$10.3 \frac{x}{1/2} + \frac{y}{-1/3} = 1$$

$$10.2 \frac{x}{-3} + \frac{y}{3/2} = 1$$

$$10.4 \frac{x}{11/3} + \frac{y}{-11/2} = 1$$

$$11.1 \vec{u} \cdot \vec{v} = 11$$

11.2 Aproximadamente $10,3^\circ$

$$11.3 a = -16.$$

$$12.1 (2, 1)$$

$$12.2 \left(\frac{1}{16}, \frac{43}{16}\right)$$

13.1 As retas são estritamente paralelas;

13.2 As retas são coincidentes;

13.3 As retas são coincidentes;

13.4 As retas são estritamente paralelas;

$$14.1 5x - 2y = 0$$

$$14.2 3x - y - 1 = 0$$

Soluções dos exercícios propostos - continuação

$$15.1 \ y = -\frac{x}{2} - \frac{7}{2}$$

$$15.2 \ y = -\frac{2}{3}x$$

$$16.1 \ -2x + 8y - 19 = 0$$

$$16.2 \ x + 1 = 0$$

$$18. \left(\frac{8}{5}, \frac{21}{5}\right)$$

$$19.1 \ d = 3\sqrt{2}$$

$$19.2 \ d = 3$$

$$21. \ y = \frac{3}{4}x + \frac{11}{4}$$

$$22.1 \ (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 5^2$$

$$22.3 \ (x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 5^2$$

$$22.2 \ x^2 + (y - 3)^2 = 8$$

$$23. \ (x + 1)^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = \frac{13}{2}$$

24.1 A reta é tangente à circunferência no ponto $T(0, 4)$

24.2 A reta é secante à circunferência. Os pontos de intersecção são $(0, 3)$ e $(-3, 0)$

$$25.1 \ y = -\frac{3}{4}x + \frac{9}{2}$$

25.2 $3x - 2y - 9 = 0$ é a equação geral da reta tangente pedida.

2. GEOMETRIA no ESPAÇO e NOÇÕES TOPOLÓGICAS

GEOMETRIA ANALÍTICA no ESPAÇO

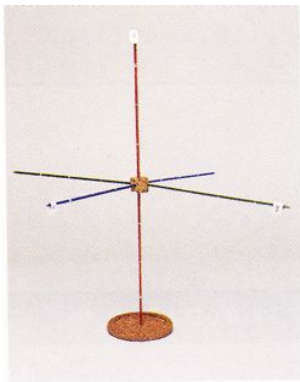
Maria do Carmo Martins

Abril de 2013

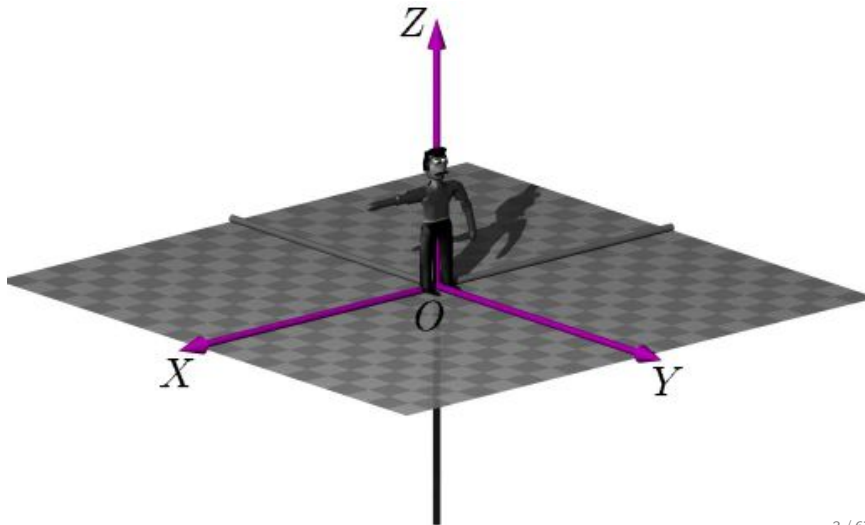
Referencial Cartesiano do espaço

É construído por três retas concorrentes no mesmo ponto, não coplanares, em que se fixaram unidades de comprimento.

Ao ponto comum das retas chamamos **origem do referencial**.



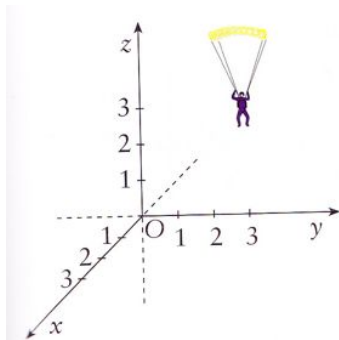
Visualização



Referencial ortogonal e monométrico do espaço

No espaço, a um sistema de três eixos com a mesma origem, com a mesma unidade de medida e cada um perpendicular aos outros dois, chama-se **referencial ortogonal e monométrico do espaço**.

O referencial ortogonal e monométrico (o. m.) do espaço representa-se por $Oxyz$ ou (O, x, y, z) .



- Ox é o eixo das abcissas.
- Oy é o eixo das ordenadas.
- Oz é o eixo das cotas.

Coordenadas no espaço

Dado um referencial do espaço (O, x, y, z) ou $Oxyz$ chamam-se **coordenadas de um ponto** aos números reais que constituem o terno ordenado que lhe corresponde e o identifica.

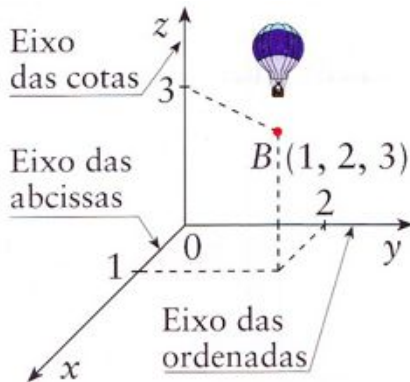
Assim, no espaço, um ponto fica definido conhecidas as suas coordenadas:

$$(x_1, y_1, z_1)$$

sendo:

- x_1 a abcissa;
- y_1 a ordenada;
- z_1 a cota.

Coordenadas no espaço - visualização



Eixos Coordenados

Os eixos Ox , Oy e Oz são os **eixos coordenados**.

Todos os pontos do eixo das abscissas têm ordenada nula e cota nula. O eixo **Ox** é definido pela condição $y = 0 \wedge z = 0$.

Diz-se que **$A(x, 0, 0)$** é um **ponto genérico do eixo das abscissas**, sendo x um número real qualquer.

Como todos os pontos do eixo das ordenadas têm abscissa igual a zero e cota igual a zero, o eixo **Oy** é definido pela condição $x = 0 \wedge z = 0$.

Um **ponto genérico do eixo das ordenadas** será, então, **$B(0, y, 0)$** é um sendo y um número real qualquer.

Eixos Coordenados - continuação

Como todos os pontos do eixo das cotas têm abscissa igual a zero e ordenada igual a zero, o eixo **Oz** é definido pela condição

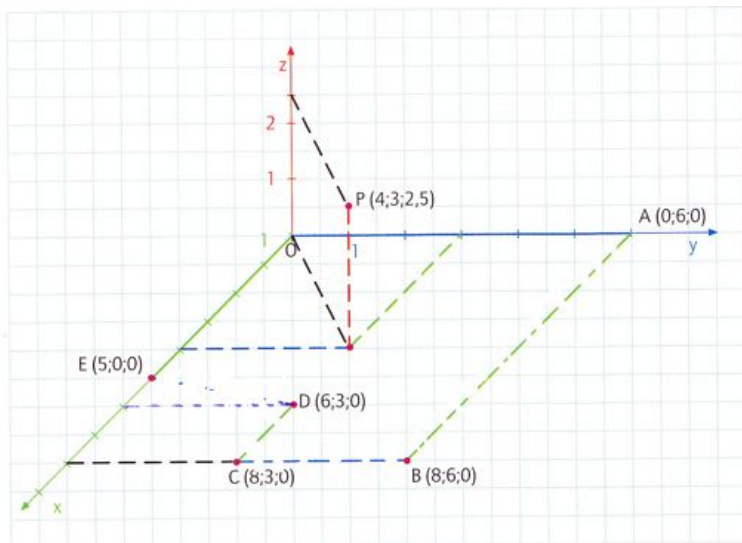
$$x = 0 \wedge y = 0.$$

Um **ponto genérico do eixo das cotas** será, então, **$C(0, 0, z)$** é um sendo z um número real qualquer.

Exercício 1

Represente os pontos $A(0, 6, 0)$; $B(8, 6, 0)$; $C(8, 3, 0)$; $D(6, 3, 0)$; $E(5, 0, 0)$ e $P(4, 3, \frac{5}{2})$.

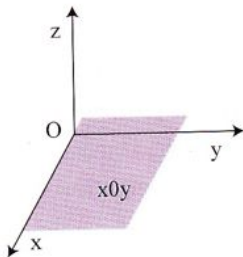
Solução do Exercício 1



Planos Coordenados - o plano xOy

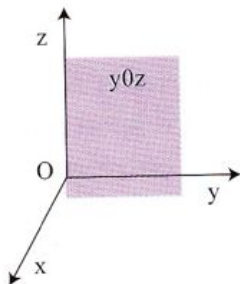
Num referencial $Oxyz$ do espaço, os eixos Ox , Oy e Oz definem, dois a dois, três planos.

- **plano xOy** definido pelos eixos das abscissas e das ordenadas; como todos os seus pontos têm cota nula, a sua equação é $z = 0$. Um ponto genérico deste plano é $M(x, y, 0)$, sendo x e y números reais quaisquer.



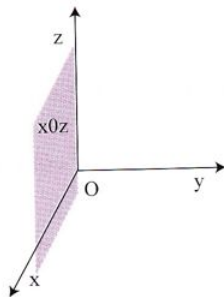
Planos Coordenados - o plano yOz

- **plano yOz** definido pelos eixos das ordenadas e das cotas; como todos os seus pontos têm abscissa nula, a sua equação é $x = 0$. Um ponto genérico deste plano é $N(0, y, z)$, sendo y e z números reais quaisquer.



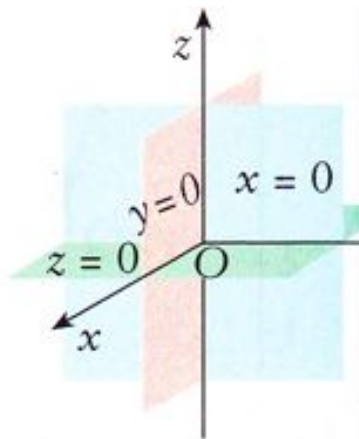
Planos Coordenados - o plano xOz

- **plano xOz** definido pelos eixos das abcissas e das cotas; como todos os seus pontos têm ordenada nula, a sua equação é $y = 0$. Um ponto genérico deste plano é $P(x, 0, z)$, sendo x e z números reais quaisquer.



Octantes

Os planos coordenados dividem o espaço em 8 partes iguais que têm o nome de **octantes**.



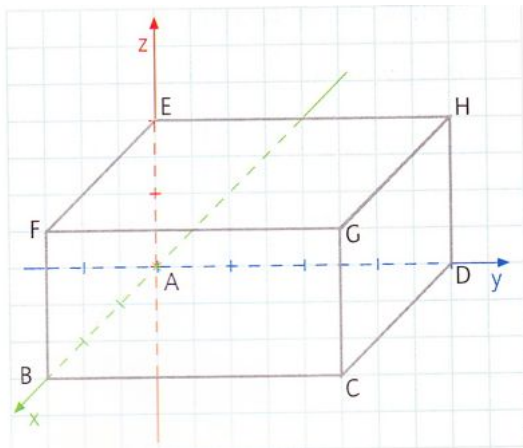
Observação

Enquanto no plano os valores absolutos de cada uma das coordenadas de um ponto representam distâncias do ponto aos eixos coordenados, no espaço:

- a distância de um ponto ao plano yOz é o valor absoluto da sua abcissa;
- a distância de um ponto ao plano xOz é o valor absoluto da sua ordenada;
- a distância de um ponto ao plano xOy é o valor absoluto da sua cota.

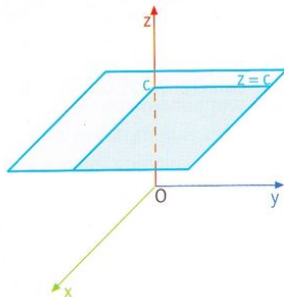
Exercício 2

Quais são as coordenadas dos vértices A, B, C, D, E, F, G e H do paralelepípedo $[ABCDEFGH]$?



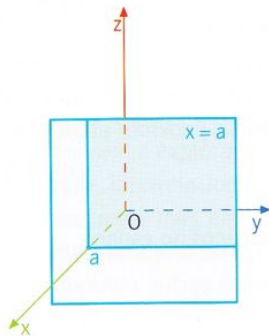
Planos paralelos aos planos coordenados

- Qualquer **plano paralelo ao plano xOy** que passa por um ponto de cota c tem por equação $z = c$.



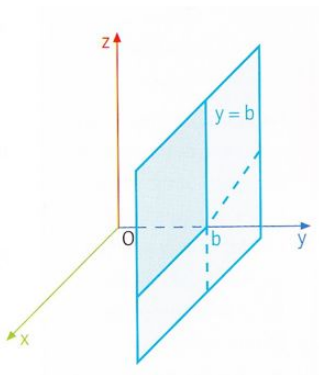
Planos paralelos aos planos coordenados

- Qualquer **plano paralelo ao plano yOz** que passa por um ponto de abscissa a tem por equação $x = a$.

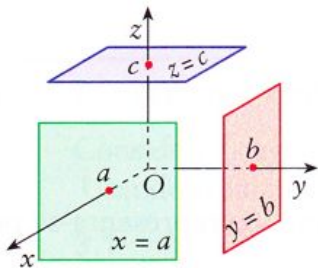


Planos paralelos aos planos coordenados

- Qualquer **plano paralelo ao plano xOz** que passa por um ponto de ordenada b tem por equação $y = b$.



Planos paralelos aos planos coordenados - resumo

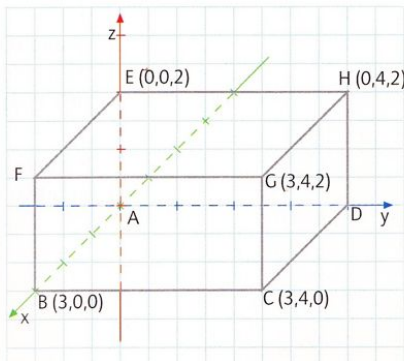


Complete:

- O plano $z = c$ é paralelo ao plano _____;
- O plano $y = b$ é paralelo ao plano _____;
- O plano $x = a$ é paralelo ao plano _____.

Exercício 3

Consideremos o paralelepípedo $[ABCDEFGH]$:



- 1 Determine a equação do plano da face $[EFGH]$.
- 2 Determine a equação do plano da face $[BCFG]$.
- 3 Determine a equação do plano da face $[CDHG]$.

Retas paralelas aos eixos coordenados

Observando ainda o paralelepípedo $[ABCDEFGH]$ do Exercício anterior, verificamos que a reta suporte da aresta $[CG]$ é a intersecção dos planos de equação $x = 3$ e $y = 4$, pelo que aquela reta fica definida pela condição

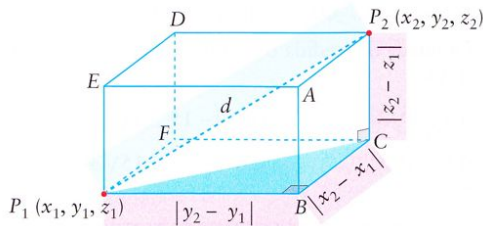
$$x = 3 \quad \wedge \quad y = 4.$$

Do mesmo modo, a condição que define:

- a reta FG é _____.
- a reta GH é _____.

Fórmula da distância entre dois pontos no espaço

Sendo $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$ dois pontos quaisquer do espaço, é sempre possível formar um paralelepípedo retângulo em que $\overline{P_1P_2}$ é uma das suas diagonais.



Sendo o triângulo $[P_1BC]$ retângulo em B , pelo Teorema de Pitágoras, tem-se:

$$\overline{P_1C}^2 = \overline{P_1B}^2 + \overline{BC}^2 \Leftrightarrow \overline{P_1C}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

Fórmula da distância entre dois pontos no espaço - continuação

Sendo o triângulo $[P_1CP_2]$ retângulo em C , pelo Teorema de Pitágoras, tem-se:

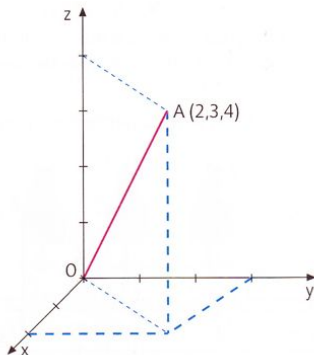
$$\begin{aligned}\overline{P_1P_2}^2 &= \overline{P_1C}^2 + \overline{CP_2}^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \overline{P_1C}^2 &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2\end{aligned}$$

Logo,

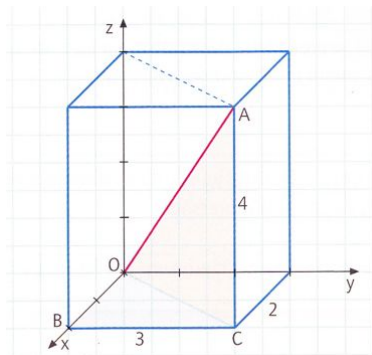
$$d = \overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Exercício 4

Considere no referencial ortogonal (O, x, y, z) , o ponto $A(2, 3, 4)$ e, seguindo a exposição anterior, calcule (detalhadamente) a distância entre A e O .



Exercício 4 - figura auxiliar



Distância entre dois pontos no espaço

Definição

Dados os pontos $P(x_P, y_P, z_P)$ e $Q(x_Q, y_Q, z_Q)$, num referencial ortogonal do espaço, a **distância d de P a Q** é dada pela expressão:

$$d = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2 + (z_P - z_Q)^2}$$

Exercício 5

Dados os pontos $A(1, 2, 3)$, $B(-1, -2, 5)$ e $C(0, -2, 3)$ determine a distância:

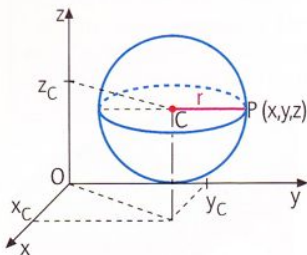
- 1 de A a B ;
- 2 de B a C ;
- 3 de A a C ;
- 4 de A ao simétrico de B em relação a O .

Definição de Superfície esférica

Definição

Superfície esférica de centro $C(x_C, y_C, z_C)$ e raio r ($r > 0$) é o conjunto de todos os pontos do espaço cuja distância a C é igual a r . Num referencial (o.m.), é definida pela equação

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 + (z - z_C)^2 = r^2$$



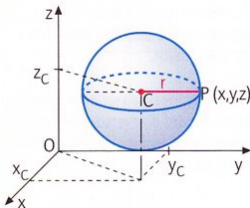
Definição da esfera

Definição

Esfera é o conjunto de todos os pontos do espaço que pertencem a uma superfície esférica ou são interiores a ela. Num referencial (o.m.), é definida pela condição

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 + (z - z_C)^2 \leq r^2$$

em que (x_C, y_C, z_C) é o centro e r é o raio da superfície esférica que a limita.



Exercício 6

Considere num referencial (o.m.) do espaço, o ponto $A(1, 3, 4)$.
Determine:

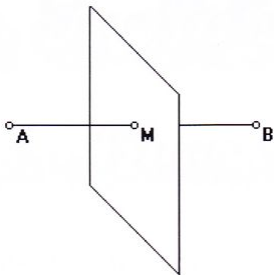
- 1 A equação da superfície esférica e da esfera com centro em A e raio 2.
- 2 A equação da esfera que tem centro no ponto $C(2, 3, 4)$ e é tangente ao plano xOy .

Plano mediador

Definição

O **plano mediador** de um segmento de reta $[AB]$ é o conjunto dos pontos do espaço equidistantes de A e de B .

Sendo $P(x, y, z)$ um ponto qualquer do plano mediador de $[AB]$, recorrendo à condição $\overline{AP} = \overline{BP}$, obtém-se uma equação deste plano.



Exercício 7

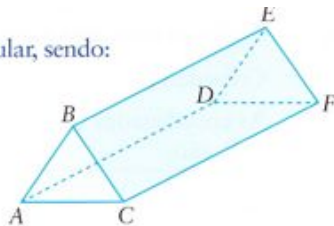
Sejam $A(0, 2, 1)$, $B(3, -1, 4)$ e $C(3, 5, 0)$. Determine uma equação do plano mediador de:

- 1 $[AB]$;
- 2 $[BC]$;
- 3 $[AC]$.

Exercício 8

Na figura está representado um prisma triangular, sendo:

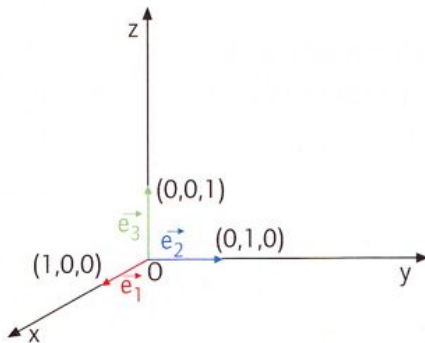
$$\begin{aligned} A &\curvearrowright (0, 1, 2); \\ B &\curvearrowright (2, 0, -1); \\ C &\curvearrowright (-1, 2, 0); \\ E &\curvearrowright (12, 14, 1). \end{aligned}$$



- 1 escreva uma equação do plano mediador de $[AC]$.
- 2 Verifique se os pontos B e E pertencem ao plano mediador de $[AC]$.

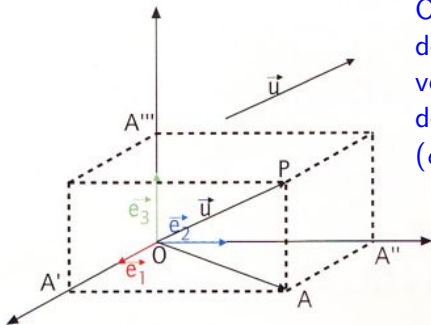
Componentes e coordenadas de um vetor no espaço

Consideremos um referencial ortogonal e monométrico do espaço, os vetores unitários \vec{e}_1 , \vec{e}_2 e \vec{e}_3 com a direção e o sentido dos eixos coordenados O_x , O_y e O_z , respetivamente. Obtemos assim o **referencial ortonormado**, **(o.n)**, $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ no espaço.



Componentes e coordenadas de um vetor no espaço - continuação

Consideremos no referencial $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, o vetor livre \vec{u} e o seu representante cuja origem é O . Tracemos o paralelepípedo de base assente no plano xOy , do qual $[OP]$ é diagonal.



O vetor \vec{OP} pode ser decomposto numa soma de vetores, cada um com a direção de um dos elementos da base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

$$\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{AP}$$

Componentes e coordenadas de um vetor no espaço - continuação

mas,

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OA''} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OA'''}.$$

então

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OA''} + \overrightarrow{OA'''}$$

e, portanto,

$$\vec{u} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OA''} + \overrightarrow{OA'''}$$

Como $\overrightarrow{OA'}$ é colinear com \vec{e}_1 , existe um número real a tal que $\overrightarrow{OA'} = a \vec{e}_1$.

Como $\overrightarrow{OA''}$ é colinear com \vec{e}_2 , existe um número real b tal que $\overrightarrow{OA''} = b \vec{e}_2$.

Como $\overrightarrow{OA'''}$ é colinear com \vec{e}_3 , existe um número real c tal que $\overrightarrow{OA'''} = c \vec{e}_3$.

Componentes e coordenadas de um vetor no espaço - continuação

Temos então

$$\vec{u} = a \vec{e}_1 + b \vec{e}_2 + c \vec{e}_3.$$

Diz-se que:

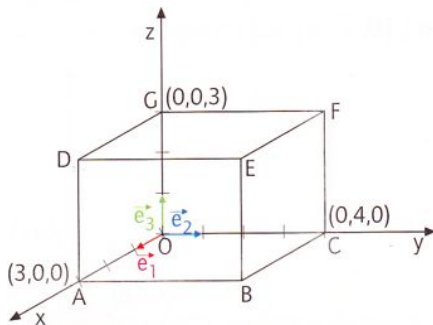
Definição

- $a \vec{e}_1$, $b \vec{e}_2$ e $c \vec{e}_3$ são os **vetores componentes** ou **componentes** do vetor \vec{u} .
- (a, b, c) são as **coordenadas** de \vec{u} na base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ e escreve-se

$$\vec{u} = (a, b, c) \quad \text{ou} \quad \vec{u}(a, b, c).$$

Exercício 9

Considere, num referencial o.n. do espaço, o paralelepípedo $[OABCDEFG]$



Determine as componentes e coordenadas dos vetores \vec{OA} , \vec{OC} , \vec{OB} , \vec{OG} , \vec{OD} , \vec{AC} e \vec{CD} .

Igualdade de vetores

Num referencial o.n. os vetores \vec{u} e \vec{v} são **iguais** se forem iguais as suas coordenadas correspondentes, isto é:

- **Igualdade de vetores**

Dados os vetores do espaço $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$,

$$\vec{u} = \vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad u_1 = v_1 \wedge u_2 = v_2 \wedge u_3 = v_3.$$

Diferença entre dois pontos.

Dados dois pontos A e B podemos obter as coordenadas de \overrightarrow{AB} calculando a diferença entre as coordenadas correspondentes do ponto B e do ponto A .

- **Diferença entre dois pontos**

No espaço, dados os pontos $A(x_A, y_A, z_A)$ e $B(x_B, y_B, z_B)$ tem-se

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$$

Exercício 10

Num referencial o.n. considere os pontos $A(0, 0, 2)$, $B(2, 0, 2)$ e $C(0, 2, 2)$. Determine as coordenadas dos vetores:

1 \overrightarrow{AB}

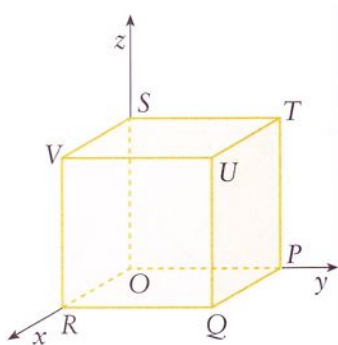
2 \overrightarrow{BC}

3 \overrightarrow{AC}

Exercício 11

Na figura está representado um cubo, em referencial o.n. $Oxyz$. Sabendo que:

- a face $[OPQR]$ está contida no plano xOy ;
- a face $[OSVR]$ está contida no plano xOz ;
- a face $[OSTP]$ está contida no plano yOz ;
- o volume do cubo é 27



Determine as coordenadas do vetor \overrightarrow{RT} .

Soma de um ponto com um vetor

Definição

Dados, num referencial o.n. do espaço, o ponto $P(x_P, y_P, z_P)$ e o vetor $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, a soma do ponto P com o vetor \vec{u} é o ponto Q que tem por coordenadas a soma das coordenadas correspondentes de P e de \vec{u} .

$$Q(x_P + u_1, y_P + u_2, z_P + u_3)$$

Exercício 12

Dado o ponto $A(1, -4, 5)$ e o vetor $\vec{u} = (3, 2, 1)$, determine B tal que:

$$B = A + \vec{u}.$$

Adição de vetores

Dadas, num referencial o.n., as coordenadas dos vetores \vec{u} e \vec{v} , as coordenadas do vetor $\vec{u} + \vec{v}$ são iguais à soma das coordenadas correspondentes dos vetores \vec{u} e \vec{v} .

- **Adição de vetores**

Dados os vetores do espaço $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$,

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$$

Produto de um número real por um vetor

Dado um número real k e um vetor \vec{u} definido pelas suas coordenadas, num referencial o.n., as coordenadas do vetor $k\vec{u}$ obtêm-se multiplicado por k as coordenadas do vetor \vec{u} .

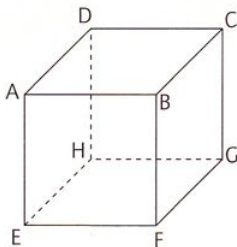
- **Produto de um número real por um vetor**

No espaço, sendo $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $k \in \mathbb{R}$ então

$$k \vec{u} = (ku_1, ku_2, ku_3)$$

Exercício 13

Considere num referencial o.n. do espaço, o cubo $[ABCDEFGH]$



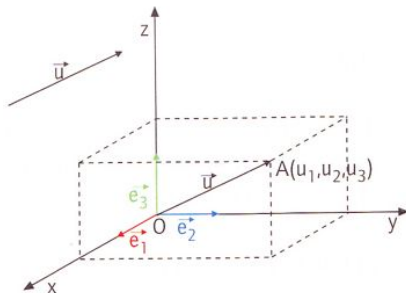
Os pontos A , E , F e H têm por coordenadas, respetivamente, $(1, 1, 3)$; $(1, 1, 1)$; $(1, 3, 1)$ e $(-1, 1, 1)$.

- 1 Calcule as coordenadas dos vértices B e D .
- 2 Determine as coordenadas do ponto P simétrico de A em relação ao vértice D .

Norma de um vetor

Sejam (u_1, u_2, u_3) as coordenadas do vetor \vec{u} num referencial o.n. $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ e seja \vec{OA} o seu representante com origem em O .

A norma de \vec{u} é igual a $\|\vec{OA}\|$ e igual à distância entre os pontos O e $A(u_1, u_2, u_3)$, logo



$$\|\vec{OA}\| = \sqrt{(u_1 - 0)^2 + (u_2 - 0)^2 + (u_3 - 0)^2}.$$

Consequentemente,

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

Exercício 14

Considere os pontos $A(1, 3, -2)$, $B(4, 1, -7)$ e $C(4, 5, -1)$.
Determine a norma dos vetores:

1 \overrightarrow{AB} ;

2 \overrightarrow{AC} ;

3 \overrightarrow{BC} .

Exercício 15

Determine a norma dos vetores seguintes:

1 $\vec{u} = (\sqrt{3}, \sqrt{2}, -\sqrt{2});$

2 $\vec{v} = (0, 1 + \sqrt{5}, -1);$

3 $\vec{w} = (\sqrt{2} - \sqrt{3}, 2, \sqrt{2} + \sqrt{3});$

4 $\vec{f} = (-\sqrt{5}, \sqrt{5}, 1).$

Coordenadas do ponto médio de um segmento

Sendo P e Q dois pontos do espaço tais que $P(x_P, y_P, z_P)$ e $Q(x_Q, y_Q, z_Q)$, então as coordenadas do ponto médio de $[PQ]$ são:

$$\left(\frac{x_P + x_Q}{2}, \frac{y_P + y_Q}{2}, \frac{z_P + z_Q}{2} \right)$$

Exercício 16

Considere, num referencial o.n. do espaço, os pontos $A(-1, 2, 0)$ e $B(-3, -2, 4)$. Determine:

- 1 as coordenadas do ponto médio de $[AB]$
- 2 uma equação da superfície esférica de diâmetro $[AB]$.

Exercício 17

Considere num referencial o.n. do espaço, os pontos $A(1, 1, 3)$, $B(4, 5, 6)$ e $C(-2, -3, 0)$. Sejam I e J os pontos médios de $[AB]$ e $[BC]$, respetivamente.

- 1 Os vetores \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{BC} são colineares?
- 2 Determine as coordenadas de I e J .
- 3 Calcule a norma de \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{BJ} e \overrightarrow{JI} .

Exercício 18

- 1 Determine as coordenadas dos pontos médios dos lados do triângulo $[ABC]$, sendo $A(0, 5, 0)$, $B(-5, 0, 10)$ e $C(0, 10, 0)$.
- 2 Classifique o triângulo $[ABC]$ quanto aos lados.
- 3 Determine a equação do plano mediador do lado $[AB]$.

Vetores perpendiculares

Definição

Num referencial o.n. do espaço, dois vetores $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ são **perpendiculares** (ortogonais) se e só se

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = 0.$$

Escreve-se:

$$\vec{u} \perp \vec{v}$$

Exercício 19

Verifique se os vetores $\vec{u} = (3, 4, 6)$ e $\vec{v} = (\frac{3}{2}, 4, -3)$ são perpendiculares.

Exercício 20

Considere os vetores $\vec{u} = (3, 5, 2)$, $\vec{v} = (5, -3, 2)$ e $\vec{w} = (x, 4, 2)$.

① $\vec{u} \perp \vec{v}$? Porquê?

② Qual o valor de x para o qual

$$(\vec{u} + \vec{v}) \perp \vec{w}?$$

Exercício 21

Dados os vetores $\vec{a} = (x + 1, 2x, -1)$ e $\vec{b} = (2x, -\frac{x}{2}, 2)$:

- 1 calcule x de modo que sejam perpendiculares.
- 2 Indique, em função de x , um vetor perpendicular a $\vec{a} + \vec{b}$.

Exercício 22

- 1 Para que valores de k são perpendiculares os vetores $\vec{a} = (3, -1, k)$ e $\vec{b} = (1, k, -2)$?
- 2 Os vetores \vec{a} e \vec{b} poderão ser paralelos para algum valor de k ?

Exercício 23

Determine um vetor perpendicular ao vetor $\vec{u} = (2, -1, 3)$.

Exercício 24

Determine um vetor de norma 5, em que a primeira coordenada é nula, e que seja perpendicular ao vetor $\vec{u} = (-3, 1, 2)$.

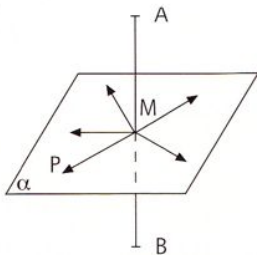
Equação do plano mediador recorrendo ao produto interno

Definição

O plano mediador de $[AB]$ é o conjunto dos pontos $P(x, y, z)$ tais que

$$\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

sendo M o ponto médio de $[AB]$.



Exercício 25

Determine uma equação do plano mediador do segmento de reta de extremos:

① $A(0, 2, 3)$ e $B(-2, 4, 5)$;

② $A(-1, 0, 3)$ e $B(0, 0, 3)$;

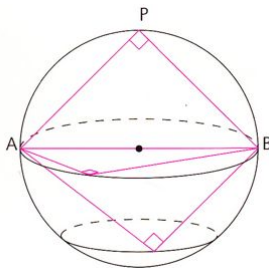
③ $A(2, 1, 5)$ e $B(0, 0, 1)$.

Equação da superfície esférica recorrendo ao produto interno

Definição

A superfície esférica de diâmetro $[AB]$ é o conjunto dos pontos $P(x, y, z)$ tais que

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$$



Exercício 26

Determine uma equação da superfície esférica de diâmetro $[AB]$ sendo:

- ① $A(0, 0, 1)$ e $B(1, 0, 3)$.
- ② $A(1, -1, 1)$ e $B(2, 0, 3)$.

- Ana Maria Brito Jorge, Conceição Barro Alves, Graziela Fonseca, Judite Barbedo, *Infinito 10*, vol.1, Areal Editores.
- Ana Maria Brito Jorge, Conceição Barro Alves, Graziela Fonseca, Judite Barbedo, *Infinito 11*, vol.1, Areal Editores.
- Maria Augusta Ferreira Neves, Luís Guerreiro, António Leite, *Exercícios de Matemática A*, 10º ano, Porto Editora.

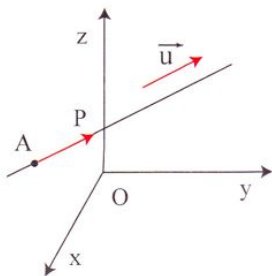
ESTUDO da RETA em \mathbb{R}^3

Maria do Carmo Martins

Maio de 2013

Equação vetorial da reta

Dados um ponto $A(x_1, y_1, z_1)$ e um vetor $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, existe uma única reta que passa pelo ponto A e tem a direção do vetor \vec{u} . Essa reta é definida por $P = A + k \vec{u}$ onde P representa um ponto genérico da reta e $k \in \mathbb{R}$.



Equação vetorial da reta - definição

Definição

A **equação vetorial da reta** que contém o ponto $A(x_1, y_1, z_1)$ e tem direção do vetor \vec{u} é

$$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + k (u_1, u_2, u_3), \quad k \in \mathbb{R}.$$

Equações paramétricas da reta

Considerando a equação vetorial

$$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + k (u_1, u_2, u_3), \quad k \in \mathbb{R}$$

temos que

$$\begin{cases} x = x_1 + k u_1 \\ y = y_1 + k u_2 \\ z = z_1 + k u_3, \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}$$

a que chamamos **equações paramétricas da reta**
(de parâmetro k).

Exercício 1

- 1 Escreva uma equação vetorial e as equações paramétricas da reta que contém o ponto $A(-1, 2, -3)$ e tem a direção do vetor $\vec{u} = (1, -1, 2)$.
- 2 O ponto $B(2, -1, 5)$ pertence à mesma reta?

Equação cartesiana

Partindo das equações paramétricas e tendo em conta que $u_1 \times u_2 \times u_3 \neq 0$, obtém-se por eliminação do parâmetro k

$$\frac{x - x_1}{u_1} = \frac{y - y_1}{u_2} = \frac{z - z_1}{u_3}$$

um sistema de duas equações que constituem uma representação **cartesiana** da reta oblíqua que passa no ponto $A(x_1, y_1, z_1)$ e tem a direção do vetor $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$.

- É uma representação cartesiana porque depende das coordenadas cartesianas de um ponto genérico da reta.

Equação geral da reta

Partindo da equação cartesiana da reta no espaço, podemos escrever

$$\begin{cases} \frac{x-x_1}{u_1} = \frac{y-y_1}{u_2} \\ \frac{x-x_1}{u_1} = \frac{z-z_1}{u_3} \end{cases}$$

donde, desembaraçando de denominadores e reduzindo os termos semelhantes, obtemos um sistema de equações do tipo

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$$

que representa a **equação geral da reta**.

Observação 1

Deduzimos a equação cartesiana e a equação geral da reta no caso das coordenadas do vetor da reta serem todas diferentes de zero ($u_1 \times u_2 \times u_3 \neq 0$).

- No caso de termos $u_1 = 0$ e $u_2 \times u_3 \neq 0$ as **equações paramétricas da reta** serão:

$$\begin{cases} x = x_1 \\ y = y_1 + k u_2 \\ z = z_1 + k u_3, \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}$$

donde obtemos

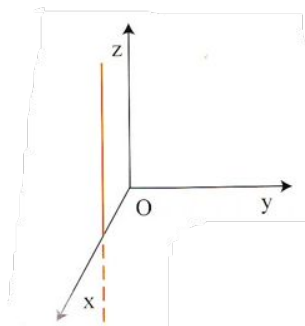
$$x = x_1 \quad \wedge \quad \frac{y - y_1}{u_2} = \frac{z - z_1}{u_3}$$

Observação 1 - continuação

Logo a **equação geral da reta** será

$$\begin{cases} x = x_1 \\ By + Cz + D = 0 \end{cases}$$

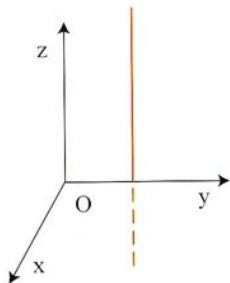
e trata-se de uma reta que é paralela ao plano yOz .



Observação 2

- De modo análogo, se $u_2 = 0$ e $u_1 \times u_3 \neq 0$ teremos uma reta que é paralela ao plano xOz .

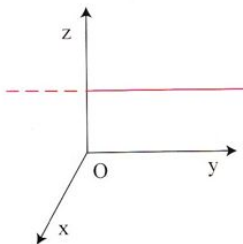
$$\begin{cases} y = y_1 \\ Ax + Cz + D = 0 \end{cases}$$



Observação 3

- Se $u_3 = 0$ e $u_1 \times u_2 \neq 0$ a reta é paralela ao plano xOy e terá a seguinte equação

$$\begin{cases} z = z_1 \\ Ax + By + D = 0 \end{cases}$$

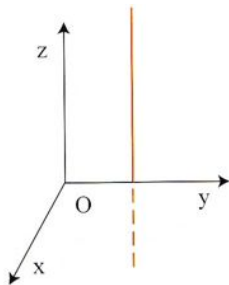


Observação 4

- Quando $u_1 = u_2 = 0$ e $u_3 \neq 0$ a reta terá de equação geral

$$\begin{cases} x = x_1 \\ y = y_1 \end{cases}$$

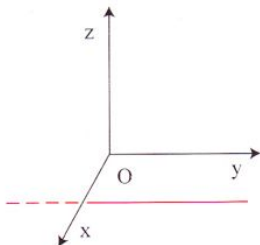
e trata-se de uma reta paralela ao eixo Oz .



Observação 5

- Quando $u_1 = u_3 = 0$ e $u_2 \neq 0$ a reta será paralela ao eixo Oy e a equação é

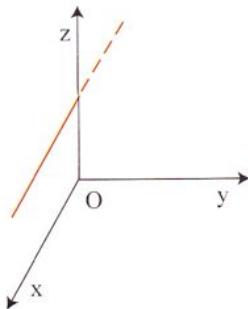
$$\begin{cases} x = x_1 \\ z = z_1 \end{cases}$$



Observação 6

- Quando $u_2 = u_3 = 0$ e $u_1 \neq 0$ então a reta será paralela ao eixo Ox e terá a equação

$$\begin{cases} y = y_1 \\ z = z_1 \end{cases}$$



Exercício 2

Determine as equações cartesianas e a equação geral da reta que passa pelo ponto $A(-1, 2, 3)$ e tem a direção do vetor $\vec{u} = (2, -1, 6)$.

Exercício 3

Dada a reta r definida pela equação cartesiana

$$\frac{x-3}{-5} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{3}$$

- 1 Represente-a na equação vetorial;
- 2 Represente-a nas equações paramétricas;
- 3 Verifique se o ponto $P(8, -3, -3)$ pertence à reta r .

Exercício 4

Escreva uma equação vetorial da reta

$$\begin{cases} 2x + y + z - 1 = 0 \\ x - y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

Exercício 5

Represente a reta definida pelos pontos $A(1, 2, 3)$ e $B(2, -2, 1)$ por:

- 1 uma equação vetorial;
- 2 pelas equações paramétricas;
- 3 pela equação cartesiana;
- 4 pela equação geral.

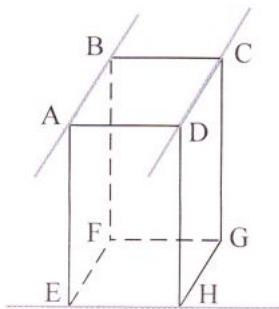
Condição de Paralelismo e Perpendicularidade de duas retas

No plano sabemos que duas retas distintas ou são paralelas, e não têm qualquer ponto em comum, ou são concorrentes, intersectando-se num ponto.

No espaço, o facto de duas retas não terem pontos em comum não nos permite concluir que são paralelas.

Ilustração 1

Consideremos a figura:



Na figura temos que:

- AB é paralela a CD;
- AB e EH não são paralelas.

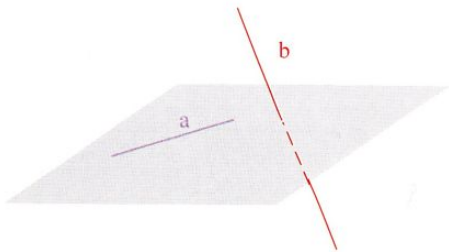
Retas Complanares

Definição

Retas complanares *são aquelas que estão contidas no mesmo plano.*

Ilustração 2

Consideremos a figura



- As retas a e b não têm qualquer ponto comum e não são paralelas.
- As retas a e b são não coplanares.

Observação 7

Podemos concluir que **no espaço duas retas são paralelas** se verificam simultaneamente as condições seguintes:

- 1 são coplanares
- 2 não têm nenhum ponto comum ou são coincidentes.

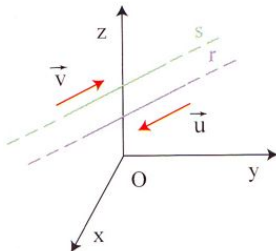
Condição de paralelismo de duas retas

Considere as retas r e s de equações vetoriais

$$r : (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + k_1(u_1, u_2, u_3), \quad k_1 \in \mathbb{R}$$

$$s : (x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + k_2(v_1, v_2, v_3), \quad k_2 \in \mathbb{R}$$

onde $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ são os vetores diretores de r e s , respectivamente.



Condição de paralelismo de duas retas - continuação

Sendo $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$

Definição

Duas retas no espaço são paralelas se e só se os seus vetores diretores são colineares.

A condição de paralelismo de duas retas é:

$$r//s \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : \vec{v} = k \vec{u}$$

Condição de paralelismo de duas retas - continuação

Ora,

$$\vec{v} = k \vec{u} \Leftrightarrow v_1 = k u_1 \wedge v_2 = k u_2 \wedge v_3 = k u_3$$

o que significa que os vetores diretores têm coordenadas diretamente proporcionais

$$\frac{v_1}{u_1} = \frac{v_2}{u_2} = \frac{v_3}{u_3}$$

- Para averiguarmos se **as retas são coincidentes**, basta verificar se um ponto de uma delas pertence à outra reta.

Exercício 6

Estude a posição das seguintes retas:

$$r : (x, y, z) = (3, 5, 2) + k_1(5, 1, -1), \quad k_1 \in \mathbb{R}$$

$$s : (x, y, z) = (1, 0, 4) + k_2(-10, -2, 2), \quad k_2 \in \mathbb{R}$$

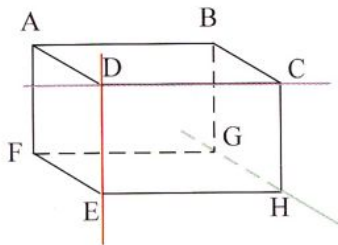
Exercício 7

Escreva uma equação cartesiana da reta que passa pelo ponto $A(-1, 3, 2)$ e é paralela à reta

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = z+3.$$

Ilustração 3

Considere o paralelepípedo retângulo



Podemos dizer que:

- as retas DC e DE são perpendiculares
- as retas DE e GH também são perpendiculares
- e ainda, se no ponto C considerarmos as retas paralelas a DE e GH, que são respectivamente CH e CB, então estas retas também são perpendiculares.

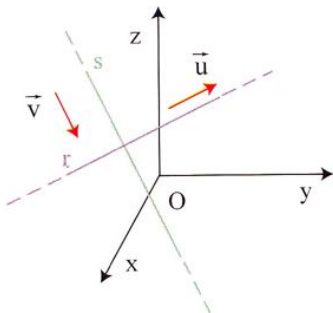
Condição de perpendicularidade de duas retas

Considere as retas r e s de equações vetoriais

$$r : (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + k_1(u_1, u_2, u_3), \quad k_1 \in \mathbb{R}$$

$$s : (x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + k_2(v_1, v_2, v_3), \quad k_2 \in \mathbb{R}$$

onde $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ são os vetores diretores de r e s , respetivamente, sendo $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$.



Condição de perpendicularidade de duas retas - continuação

Definição

Duas retas no espaço são perpendiculares se e só se os seus vetores diretores forem perpendiculares.

A condição de perpendicularidade de duas retas é:

$$r \perp s \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0.$$

Exercício 8

Verifique se as retas

$$r : (x, y, z) = (6, 1, -1) + k(2, -3, 1), \quad k \in \mathbb{R}$$

e

$$s : \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 2t, \\ z = 1 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

são perpendiculares.

Exercício 9

Escreva uma equação da reta que passa pelo ponto $(2, -1, 3)$ e é ortogonal às retas

$$r: \frac{x}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{-4}$$

e

$$s: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-1}{2}$$

- Deolinda Duarte Gomes, Maria Helena Rufino e Maria Teresa Graça. *Matemática 12º Ano*, vol.1, Plátano Editora.

Soluções dos exercícios propostos

1.1. A equação vetorial será $(x, y, z) = (-1, 2, -3) + k(1, -1, 2)$ a

que correspondem as equações paramétricas
$$\begin{cases} x = -1 + k \\ y = 2 - k \\ z = -3 + 2k \end{cases}$$

$(k \in \mathbb{R})$

2. A equação cartesiana é $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{6}$ e a equação geral é

$$\begin{cases} x + 2y - 3 = 0 \\ 3x - z + 6 = 0 \end{cases}$$

3.1 $(x, y, z) = (3, -1, 0) + k(-5, 2, 3), k \in \mathbb{R}$

$$3.2 \begin{cases} x = 3 - 5k \\ y = -1 + 2k \\ z = 3k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$$

3.3 O ponto pertence à reta.

Soluções dos exercícios propostos - conclusão

$$4. (x, y, z) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, 0\right) + k\left(0, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right), k \in \mathbb{R}$$

$$5.1 (x, y, z) = (1, 2, 3) + k(1, -4, -2), k \in \mathbb{R}$$

$$5.2 \begin{cases} x = 1 + k \\ y = 2 - 4k \\ z = 3 - 2k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$$

$$5.3 x - 1 = \frac{y-2}{-4} = \frac{z-3}{-2}$$

$$5.4 \begin{cases} 4x + y - 6 = 0 \\ 2x + z - 5 = 0 \end{cases}$$

6. As retas são paralelas.

$$7. \frac{x+1}{6} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-2}{2}$$

8. As retas não são perpendiculares.

$$9. (x, y, z) = (2, -1, 3) + k\left(1, \frac{7}{4}, \frac{13}{8}\right), k \in \mathbb{R}$$

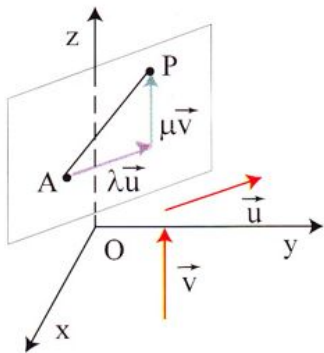
ESTUDO do PLANO em \mathbb{R}^3

Maria do Carmo Martins

Maio de 2013

Um plano é uma região infinita. Como já foi referido, para facilitar a sua visualização, utiliza-se um paralelogramo e representa-se por uma letra grega.

Plano definido por um ponto e duas direções



Sejam $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$ dois vetores não colineares num referencial o.n. $\{O, (x, y, z)\}$.

Dado o ponto $A(x_1, y_1, z_1)$ e os vetores \vec{u} e \vec{v} , existe um único plano que passa por A e é paralelo aos dois vetores.

Atendendo à figura, $\overrightarrow{AP} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$, pelo que

$$P = A + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}.$$

Equação vetorial do plano

Definição

Se designarmos o ponto genérico do plano por $P(x, y, z)$, e sendo $A(x_1, y_1, z_1)$, $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, temos

$$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + \lambda (u_1, u_2, u_3) + \mu (v_1, v_2, v_3) \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

que representa a **equação vetorial do plano** que contém o ponto A e é definido pelos vetores \vec{u} e \vec{v} .

Equações paramétricas do plano

Considerando a equação vetorial do plano

$$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + \lambda (u_1, u_2, u_3) + \mu (v_1, v_2, v_3) \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

obtemos as equações paramétricas

$$\begin{cases} x = x_1 + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y = y_1 + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z = z_1 + \lambda u_3 + \mu v_3, \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Exercício 1

Escreva uma equação vetorial e as equações paramétricas do plano que passa pelo ponto $B(1, 0, 2)$ e é paralelo aos vetores $\vec{u} = (5, -1, 3)$ e $\vec{v} = (-1, 1, 2)$.

Determine as coordenadas de um ponto do plano.

Exercício 2

Escreva uma equação vetorial do plano que passa pelos pontos $A(3, 1, 2)$ e $B(-1, 4, -2)$ e é paralelo ao vetor $\vec{u} = (5, 1, -1)$.

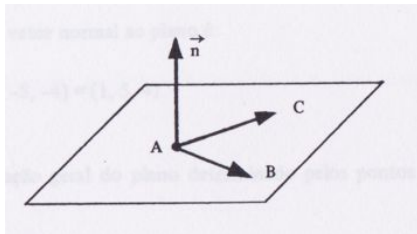
Outras formas de definir um plano

Podemos definir um plano através de:

- três pontos não colineares;
- uma reta e um ponto exterior;
- duas retas paralelas distintas;
- duas retas concorrentes.

Exercício 3

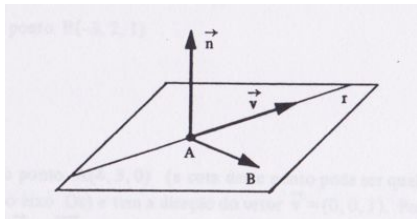
Escreva uma equação vetorial do plano definido pelos pontos $A(2, 1, 1)$ e $B(-1, 3, 2)$ e $C(-3, 2, 4)$.



Exercício 4

Escreva uma equação vetorial do plano que contém o ponto $B(-1, 2, 1)$ e a reta de equação

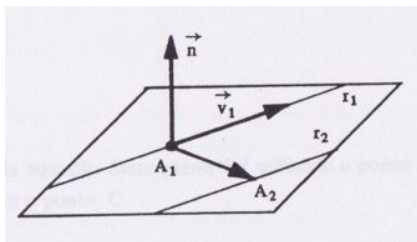
$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = z+2.$$



Exercício 5

Escreva as equações paramétricas do plano que contém as retas paralelas r_1 e r_2 , de equações

$$r: \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{-2} = z \quad \text{e} \quad s: P = O + k(6, -4, 2), \quad k \in \mathbb{R}.$$



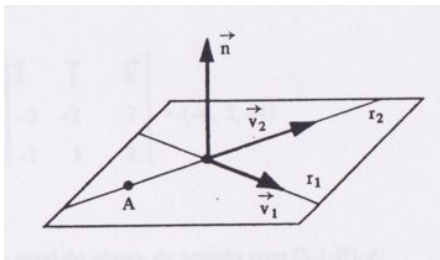
Exercício 6

Verifique que as retas r_1 e r_2 , de equações

$$r_1 : P = (5, 1, 3) + k(2, 0, 1), \quad k \in \mathbb{R}$$

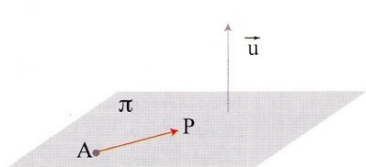
$$r_2 : \frac{x+2}{3} = \frac{y+4}{5} = \frac{z-3}{-2}$$

são concorrentes no ponto $(1, 1, 1)$ e escreva uma equação vetorial do plano que contém as duas retas.



Plano definido por um ponto e um vetor normal

- Defina analiticamente o plano que passa pelo ponto $A(1, 5, 3)$ e é perpendicular ao vetor $\vec{u} = (-1, 1, 2)$.



Se o vetor \vec{u} é perpendicular a um plano então é perpendicular a todas as retas desse plano. Logo para qualquer ponto $P(x, y, z)$ do plano teremos

$$\overrightarrow{AP} \cdot \vec{u} = 0$$

Da expressão anterior obtemos a equação $-x + y + 2z - 10 = 0$, que representa o plano pretendido.

O vector \vec{u} chama-se **vetor normal ao plano**.

Plano definido por um ponto e um vetor normal

Se pretendermos definir analiticamente um plano que passe pelo ponto $A(x_1, y_1, z_1)$ e é perpendicular ao vetor, não nulo, $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, teremos de encontrar uma condição que represente os pontos genéricos $P(x, y, z)$ que satisfazem a condição

$$\overrightarrow{AP} \cdot \vec{u} = 0$$

$$(P - A) \cdot \vec{u} = 0$$

$$(x - x_1, y - y_1, z - z_1) \cdot \vec{u} = 0$$

$$u_1(x - x_1) + u_2(y - y_1) + u_3(z - z_1) = 0$$

$$u_1x - u_1x_1 + u_2y - u_2y_1 + u_3z - u_3z_1 = 0$$

Fazendo $u_1 = A$, $u_2 = B$, $u_3 = C$ e $-u_1x_1 - u_2y_1 - u_3z_1 = D$ obtemos $Ax + By + Cz + D = 0$, que corresponde à **equação cartesiana do plano**.

Observação 1

A equação anterior,

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

fornece-nos, de imediato, as coordenadas de um vetor normal (ortogonal) ao plano. De facto,

- (A, B, C) são as coordenadas desse vetor

Podemos afirmar ainda que, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ é um vetor com a direcção do plano se e só se

$$v_1A + v_2B + v_3C = 0 \quad (\text{Porquê?})$$

Exercício 7

Determine uma equação do plano que passa no ponto $A(1, 3, 0)$ e é normal ao vetor $\vec{n} = (2, -1, 1)$.

Observação 2

Se de um plano conhecermos as coordenadas de um ponto $A(x_0, y_0, z_0)$ e um vetor normal $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ podemos escrever directamente a equação cartesiana do plano, que virá:

$$n_1(x - x_0) + n_2(y - y_0) + n_3(z - z_0) = 0.$$

Exercício 8

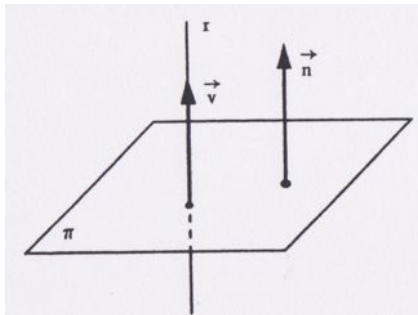
Escreva uma equação vetorial do plano definido por

$$2y - 3z + 4 = 0.$$

Exercício 9

Escreva uma equação cartesiana do plano que passa pelo ponto $P(0, 3, -4)$ e é paralelo aos vetores $\vec{u} = (-2, 1, -5)$ e $\vec{v} = (3, -4, 9)$.

Perpendicularidade de retas e planos



Dada uma reta r e um plano π ,
sendo

- $\vec{v} \neq \vec{0}$ o vetor diretor de r e
- $\vec{n} \neq \vec{0}$ um vetor normal ao plano π , de equação $Ax + By + Cz + D = 0$, então $\vec{n} = (A, B, C)$.

A reta r e o plano π são perpendiculares se e só se os vetores \vec{v} e \vec{n} forem colineares.

Perpendicularidade de retas e planos

r é perpendicular a $\pi \Leftrightarrow \vec{v}$ e \vec{n} são colineares

$$\Leftrightarrow \vec{v} = k \vec{n} \text{ sendo } k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\Leftrightarrow \frac{v_1}{A} = \frac{v_2}{B} = \frac{v_3}{C}, \text{ com } \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \text{ e}$$

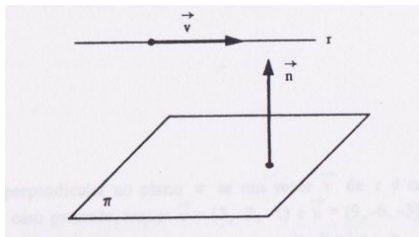
$$\vec{n} = (A, B, C)$$

- **A condição de perpendicularidade da reta r ao plano π é:**

$$\frac{v_1}{A} = \frac{v_2}{B} = \frac{v_3}{C}$$

sendo $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vetor diretor da reta r e π o plano de equação $Ax + By + Cz + D = 0$.

Paralelismo de retas e planos



Sendo

- r a reta cujo vetor diretor é $\vec{v} \neq \vec{0}$;
- $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ o plano cujo vetor normal é $\vec{n} = (A, B, C)$

A reta r e o plano π são paralelos se e só se os vetores \vec{v} e \vec{n} forem perpendiculares.

Paralelismo de retas e planos

A reta r é paralela ao plano $\pi \Leftrightarrow \vec{v} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{n} = 0$.

- **A condição de paralelismo da reta r ao plano π é:**

$$v_1 \cdot A + v_2 \cdot B + v_3 \cdot C = 0$$

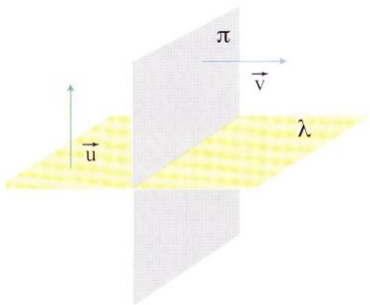
sendo $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vetor diretor da reta r e

$\pi : Ax + By + Cz + D = 0$.

Exercício 10

Determine o valor do parâmetro k por forma que a reta definida pelos pontos $A(-2, 1, 3)$ e $B(k, -1, 2)$ seja paralela ao plano definido por $x - 2y + 3z - 1 = 0$.

Perpendicularidade de dois planos



Dados os planos λ e π de equações

$$\lambda : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$\pi : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

então os vetores

$$\vec{u} = (A_1, B_1, C_1) \quad \text{e} \quad \vec{v} = (A_2, B_2, C_2)$$

são perpendiculares ou normais aos planos dados.

Perpendicularidade de dois planos

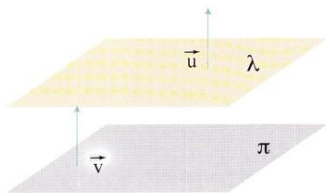
Dois planos são perpendiculares se e só se os seus vetores normais são perpendiculares.

$$\begin{aligned}\lambda \perp \pi &\Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v} \\ &\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0\end{aligned}$$

- A condição de perpendicularidade de dois planos é:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

Paralelismo de dois planos



Dados os planos paralelos λ e π
de equações

$$\lambda : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$\pi : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

então os vetores

$$\vec{u} = (A_1, B_1, C_1) \quad \text{e} \quad \vec{v} = (A_2, B_2, C_2)$$

são colineares.

Paralelismo de dois planos

Dois planos são paralelos se e só se os seus vetores normais são colineares.

$$\lambda // \pi \Leftrightarrow \vec{u} \text{ é colinear com } \vec{v}$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \vec{v} = k\vec{u}$$

$$\Leftrightarrow (A_2, B_2, C_2) = k(A_1, B_1, C_1), k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

- **A condição de paralelismo de dois planos é:**

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1} = \frac{C_2}{C_1}$$

Exercício 11

Determine uma equação cartesiana do plano que passa no ponto $P(1, -2, 4)$ e é paralelo ao plano $3x - y + z = 0$.

Exercício 12

Escreva uma equação cartesiana do plano que passa pelo ponto $A(-1, 3, 2)$ e é perpendicular à reta definida por

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 1 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$$

Posições relativas no espaço de uma recta e um plano

Atendendo a que a cada recta no espaço está associado um sistema de equações do tipo

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$$

e a cada plano podemos associar, também, uma equação $A''x + B''y + C''z + D'' = 0$, temos portanto três situações possíveis, quanto à posição relativa de uma recta e um plano:

Posições relativas no espaço de uma reta e um plano

1. A reta intersecta o plano



A reta e o plano são concorrentes; $r \cap \lambda = \{P\}$.

Neste caso o sistema:

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \\ A''x + B''y + C''z + D'' = 0 \end{cases}$$

é possível e determinado, tendo uma só solução $S = \{(x_1, y_1, z_1)\}$

Posições relativas no espaço de uma reta e um plano

2. A reta e o plano são paralelos



A reta e o plano são paralelos em sentido estrito, não têm nenhum ponto em comum; $r \cap \lambda = \emptyset$.

Neste caso o sistema:

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \\ A''x + B''y + C''z + D'' = 0 \end{cases}$$

é impossível, não tem nenhuma solução $S = \emptyset$

Posições relativas no espaço de uma reta e um plano

3. A reta está contida ou oposta ao plano



A reta está contida no plano, têm mais de um ponto comum
 $r \cap \lambda = r$.

Neste caso o sistema:

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \\ A''x + B''y + C''z + D'' = 0 \end{cases}$$

tem infinitas soluções, é possível e indeterminado.

Posições relativas no espaço de três planos

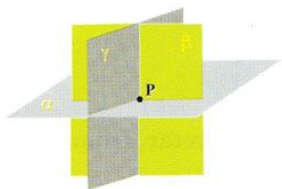
A cada um dos planos podemos associar uma equação do tipo

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Consideremos algumas situações geométricas interpretando-as analiticamente:

Posições relativas no espaço três planos

1. Os três planos intersectam-se num ponto



$$\alpha \cap \beta \cap \gamma = \{P\}.$$

Neste caso o sistema:

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \\ A''x + B''y + C''z + D'' = 0 \end{cases}$$

é possível e determinado, tendo uma só solução $S = \{(x_1, y_1, z_1)\}$

Posições relativas no espaço três planos

2. Os três planos intersectam-se segundo uma reta



$$\alpha \cap \beta \cap \gamma = r.$$

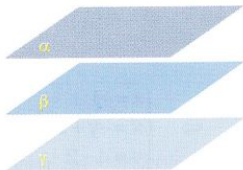
Neste caso o sistema:

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \\ A''x + B''y + C''z + D'' = 0 \end{cases}$$

tem infinitas soluções, que representam as coordenadas dos pontos da reta. É um sistema possível e indeterminado.

Posições relativas no espaço três planos

3. Os três planos são paralelos



$$\alpha \cap \beta \cap \gamma = \emptyset.$$

Neste caso o sistema:

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \\ A''x + B''y + C''z + D'' = 0 \end{cases}$$

é impossível.

Posições relativas no espaço três planos

4. Os três planos são coincidentes



Os três planos são paralelos em sentido lato, representam um só plano; $\alpha \cap \beta \cap \gamma = \alpha$.

Neste caso o sistema:

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \\ A''x + B''y + C''z + D'' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow Ax + By + Cz + D = 0$$

tem infinitas soluções. É um sistema possível e indeterminado.

Resolução de sistemas de três equações a três incógnitas

- **Método de Substituição**

Dado o sistema:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x + y + z = 0 \\ x + 2y - z = 4 \end{cases}$$

resolva-o recorrendo ao método de substituição e interprete geometricamente a solução obtida.

Exercício 13

Determine a solução do sistema

$$\begin{cases} x + y - z = 5 \\ x - y - z = 7 \\ 2x + 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

e interprete-a geometricamente.

Resolução de sistemas de três equações a três incógnitas

- **Método de Redução ou de Adição Ordenada**

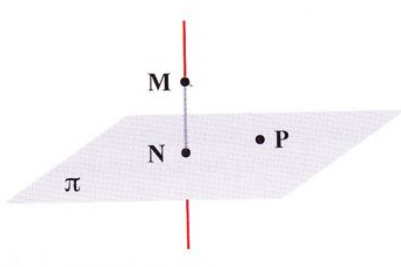
Dado o sistema:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 4y + 3z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

resolva-o recorrendo ao método de redução.

Distância de um ponto a um plano

- A distância de um ponto a um plano é a menor das distâncias do ponto aos pontos do plano.



Da definição anterior podemos concluir que a distância do ponto M ao plano π é igual à distância do ponto M ao ponto de intersecção do plano π com a reta que passa por M e é perpendicular a π .

Distância de um ponto a um plano - fórmula

Seja $P(x_0, y_0, z_0)$ um ponto exterior (isto é, não pertencente) ao plano definido pela equação $Ax + By + Cz + D = 0$. Como já vimos, um vetor normal ao plano é (A, B, C) .

A distância do ponto P ao plano é dada por

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Exercício 14

Determine a distância do ponto $M(1, 0, -2)$ ao plano $2x + y - z - 1 = 0$.

Exercício 15

Determine a distância do ponto $P(1, 4, 2)$ ao plano $4x - 3y + 12z - 6 = 0$.

Exercício 16

Calcule a distância do ponto $N(1, 1, 1)$ ao plano $2x + 2y + z = 3$.

- Deolinda Duarte Gomes, Maria Helena Rufino e Maria Teresa Graça. *Matemática 12º Ano*, vol.1, Plátano Editora.

Soluções dos exercícios propostos

1. $(x, y, z) = (1, 0, 2) + k(5, -1, 3) + \lambda(-1, 1, 2)$, $k, \lambda \in \mathbb{R}$ e um ponto do plano é $(8, -3, 1)$, por exemplo.

2. $(x, y, z) = (3, 1, 2) + k(-4, 3, -4) + \lambda(5, 1, -1)$, $k, \lambda \in \mathbb{R}$

3. $(x, y, z) = (2, 1, 1) + k(-3, 2, 1) + \lambda(-5, 1, 3)$, $k, \lambda \in \mathbb{R}$

4. $(x, y, z) = (-1, 2, 1) + k(2, 3, 1) + \lambda(-2, 2, 3)$, $k, \lambda \in \mathbb{R}$

$$5. \begin{cases} x = -1 + 3k + \lambda \\ y = 2 - 2k - 2\lambda \\ x = k \end{cases} \quad k, \lambda \in \mathbb{R}$$

6. $(x, y, z) = (1, 1, 1) + k(2, 0, 1) + \lambda(3, 5, -2)$, $k, \lambda \in \mathbb{R}$

7. $2x - y + z + 1 = 0$

8. $(x, y, z) = (2, 1, 2) + k(0, 3, 2) + \lambda(-1, 1, \frac{2}{3})$, $k, \lambda \in \mathbb{R}$

Soluções dos exercícios propostos - conclusão

9. $11x - 3y - 5z - 11 = 0$

10. $k = -3$

11. $6x - 2y + 2z - 18 = 0$

12. $2x + 5y + 3z - 19 = 0$

13. A solução do sistema é $(-\frac{1}{4}, 1, \frac{1}{4})$

14. $d = \frac{\sqrt{6}}{2}$

15. $d = \frac{10}{13}$

16. $d = \frac{2}{3}$

GEOMETRIA do ESPAÇO

Maria do Carmo Martins

Maio de 2013

Introdução

No quotidiano contactamos com diversos objetos e habituamo-nos a designar alguns deles por determinados nomes cujo significado matemático, não sendo rigorosamente o mesmo, tem, contudo muito em comum.

Vejamos alguns exemplos:

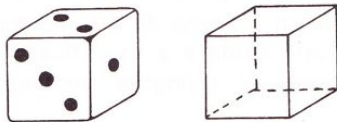


Uns são limitados por superfícies planas, outros por superfícies curvas, outros ainda por superfícies curvas e por superfícies planas.

Introdução - continuação

A alguns destes objetos chamamos **cubo**, **esfera**, **paralelepípedo**, **cone**, etc. Porém, cada um desses nomes designa, não propriamente um desses objetos, mas sim um sólido geométrico ideal, (isto é, não existente fisicamente) que matematicamente representa o conjunto de todos os sólidos com uma dada forma.

Por exemplo, um **dado** é um objeto de *forma cúbica* a que podemos chamar, embora *grosseiramente*, **cubo**.



Porém, **cubo**, mais rigorosamente falando, é um **sólido geométrico** ideal constituído por:

- seis *faces* (quadrados iguais);
- oito *vértices* (pontos);
- doze *arestas* (segmentos de reta).

Este processo, em que se prescindiu da matérias de que é feito o dado, das marcas das suas faces, da sua cor, etc., aproveitando apenas a sua forma mais ideal, designa-se por **abstração**.

Noção de Volume

Todos os objetos que nos circundam ocupam um determinado *espaço*, tendo também uma determinada *superfície* de contacto com o exterior.

De vários objetos que ocupem o mesmo espaço, embora com formas diferentes, diremos que têm o mesmo **volume**.

Uma bola de futebol cheia ocupa um determinado espaço e tem uma certa superfície.

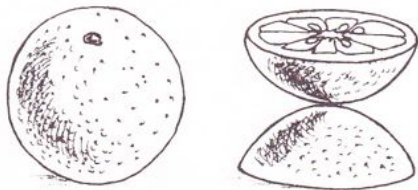
Contudo, se a esvaziarmos, amachucando-a, a sua superfície mantém-se, mas ela passa a ocupar menos espaço.



Diremos que se manteve a **área** da superfície e que o **volume** diminuiu.

Noção de Volume (continuação)

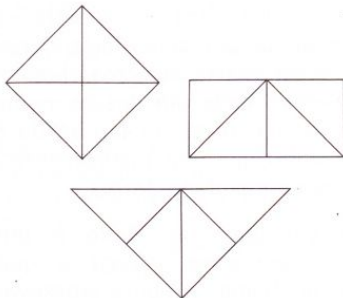
Do mesmo modo se cortarmos uma laranja ao meio e colocarmos as duas metades, como se indica na figura ao lado, a **área** do *novo* sólido aumentou enquanto o **volume** se manteve.



- Dois sólidos geométricos com o mesmo volume dizem-se **equivalentes**.

Princípio de Cavalieri

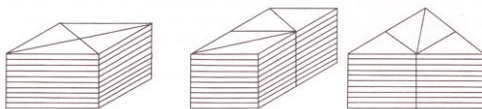
Recordemos a pavimentação e pensemos agora em várias maneiras de empilhar quarenta mosaicos (em forma de triângulo retângulo isósceles) colocando sempre 4 em cada andar.



- Um dos processos é unir todos os mosaicos pelo vértice do ângulo reto.
- Outra possibilidade é ficar a base com a forma de um retângulo.
- Outra ainda é a base ficar com a forma de triângulo retângulo.

Princípio de Cavalieri

As pilhas poderão ficar então com formas como as que aqui se apresentam:



Todos estes sólidos são **equivalentes**, pois, sendo constituídos pelo mesmo número de mosaicos, têm o mesmo volume.

Têm também todos a mesma altura e, se os imaginarmos assentes sobre o mesmo plano e as secções produzidas neles por um qualquer plano paralelo àquele tiverem a mesma área, então os sólidos são equivalentes (têm o mesmo volume).

Princípio de Cavalieri

As conclusões anteriores podem ser enunciadas numa proposição que é conhecida por **princípio de Cavalieri***:

- **Se dois sólidos, assentes sobre um plano, são seccionados por todo o plano paralelo ao plano dado, segundo figuras com a mesma área, então os sólidos têm o mesmo volume.**

* Bonaventura Cavalieri foi discípulo de Galileu e professor de Matemática na Universidade de Bolonha durante a primeira metade do século XVIII.

Este princípio ser-nos-á útil quando começarmos a determinar o volume dos vários sólidos geométricos que estudaremos ao longo deste capítulo.

Poliedros

Dos vários sólidos a que, no princípio, nos referimos, alguns são limitados por polígonos. A esses sólidos damos o nome de **poliedros**.

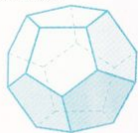
Definições

- Chama-se **poliedro** ao sólido limitado por faces planas.
- Se as faces do poliedro são todas iguais, o poliedro diz-se **regular**
- As faces intersectam-se segundo segmentos de reta chamados **arestas**.
- Os extremos das arestas têm o nome de **vértices**.

Platão e os poliedros regulares

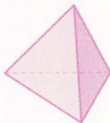
Platão (400 a. C.) associou ao Universo e aos seus quatro elementos os seguintes poliedros regulares:

Universo



Dodecaedro

Fogo



Tetraedro

Água



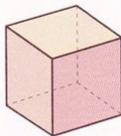
Icosaedro

Ar



Octaedro

Terra



Cubo

Relação de Euler

- Em todo o poliedro, o número de faces adicionado com o número de vértices é igual ao número de arestas mais dois, isto é:

$$F + V = A + 2.$$

- Complete:

Nome	A	V	F	F+V	A+2
Tetraedro					
Hexaedro (cubo)					
Octaedro					
Dodecaedro					
Icosaedro					

Exemplos de poliedros

Cubo



Paralelepípedo



Pirâmide



Exemplos de poliedros - continuação

Prisma		
Octaedro		Encontram-se em alguns cristais de pirite
Icosaedro 20 faces		Encontram-se em esqueletos de animais marinhos microscópicos.

Não são poliedros

Esfera



Cilindro



Cone

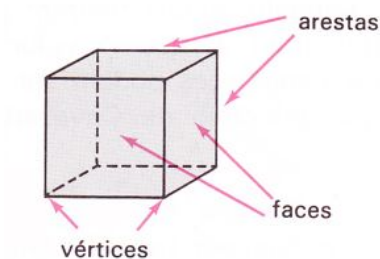


Cubo

É, de entre todos os poliedros, talvez o mais conhecido, dado haver muitos objetos de uso corrente de forma cúbica.

O **cubo**, como já foi referido, tem:

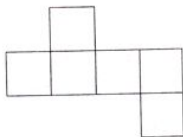
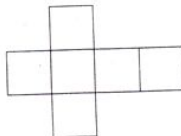
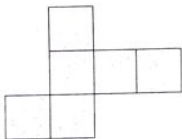
- seis faces que são quadrados geometricamente iguais;
- doze arestas (segmentos de reta);
- oito vértices (pontos).



Planificação do cubo

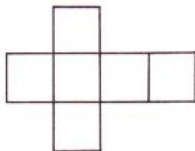
Sabemos já que um sólido inteiramente limitado por polígonos se pode planificar.

Assim, o cubo admite como planificação qualquer uma das figuras seguintes (além de outras).



A área da superfície do cubo

A **área da superfície do cubo** pode calcular-se facilmente atendendo ao facto de as suas faces serem seis quadrados iguais. Tendo em conta uma das planificações anteriores:



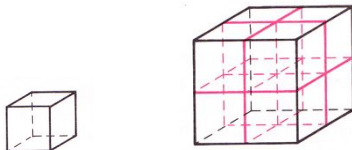
sendo a o comprimento da aresta do cubo, a área de cada face será a^2 , pelo que a **área do cubo** é

$$A = 6 a^2.$$

Volume do cubo

De um cubo com 1 m de aresta diz-se que tem 1 m^3 de volume. Então 1 dm^3 é o volume de um cubo com 1 dm de aresta e 1 cm^3 é o volume de um cubo com 1 cm de aresta.

Na primeira figura representa-se um cubo com 1 cm de aresta, portanto com 1 cm^3 de volume. Na segunda figura está um outro cubo com 2 cm de aresta. Qual será o seu volume?



Podemos verificar que num cubo com 2 cm de aresta *cabem* exatamente _____ pequenos cubos de 1 cm . O volume deste novo cubo é, pois, _____.

Volume do cubo

Façamos então um resumo para tentarmos tirar conclusões:

Aresta	Volume do cubo
1 <i>cm</i>	
2 <i>cm</i>	
3 <i>cm</i>	
4 <i>cm</i>	

Há portanto uma lei que sugere que o volume do cubo é sempre dado pelo *cubo* (terceira potência) do comprimento da aresta.

Assim, sendo a o comprimento da aresta do cubo, o seu volume é:

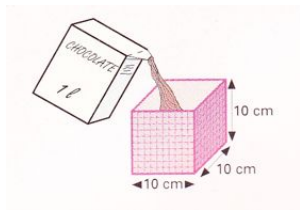
$$V = a^3$$

Observação 1

O litro é a unidade de volume ou capacidade mais utilizada no cotidiano.

1 litro corresponde a 1 dm^3

$$1 \text{ litro} = 1 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ cm}^3$$



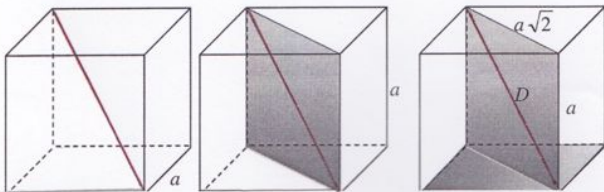
É necessário 1 litro de leite para encher um cubo com _____ cm ($= 1 \text{ dm}$) de aresta.

Diagonal do Cubo (diagonal espacial)

Definição

Chama-se **diagonal do cubo**, D , ao segmento de reta que une dois vértices não pertencentes à mesma face.

- Determine em função da aresta a de um cubo a diagonal espacial.

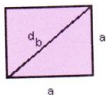


Diagonal do Cubo (diagonal espacial) - continuação

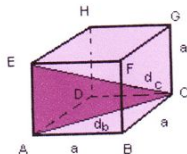
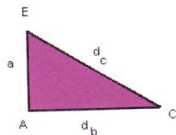
Consideremos a figura, onde

- d_c é a diagonal do cubo e
- d_b é a diagonal da base.

Na base $ABCD$, temos:



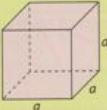
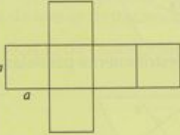
No triângulo $[ACE]$, temos



$$d_b^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow d_b = a\sqrt{2}$$

$$d_c^2 = a^2 + d_b^2 \Rightarrow d_c = a\sqrt{3}$$

Área e volume do cubo - resumo

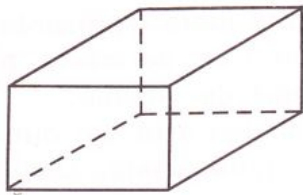
Sólido	Uma planificação	Área lateral	Área total	Volume
<p>Cubo</p> 		$A_l = 4a^2$	$A_t = 6a^2$	$V = A_b \times h$ $V = a^3$ A_b - área da base

Paralelepípedo Retângulo

Uma caixa de fósforos, uma embalagem de detergente, um tijolo, são objetos com os quais lidamos diariamente e cuja forma se associa a um sólido geométrico a que chamamos **paralelepípedo retângulo**.

Este sólido geométrico tem por elementos:

- seis faces (retângulos iguais dois a dois);
- doze arestas (iguais quatro a quatro);
- e oito vértices.

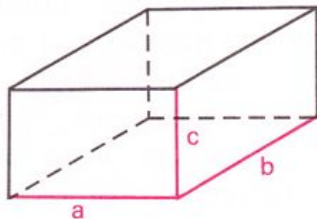


Área de um paralelepípedo retângulo

A área da superfície de um paralelepípedo retângulo é a soma das áreas das várias faces.

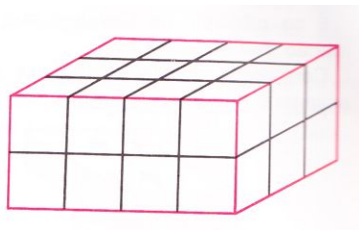
Designando, então, por a e b e c os comprimentos das arestas concorrentes num mesmo vértice e que representam, portanto, os três comprimentos possíveis das doze arestas, teremos como área do paralelepípedo retângulo

$$A = 2(ab + ac + bc).$$



Volume de um paralelepípedo retângulo

Para determinar o **volume** de um paralelepípedo retângulo, ajuda imaginar um, construído à custa de vários cubos de 1 cm^3 de volume, como se pretende representar na figura.



Constata-se que o volume deste paralelepípedo retângulo é igual a 24 cm^3 . Ora $24 = 12 \times 2$, o que equivale a dizer que o volume é igual ao produto da área da base ($12\text{ cm}^2 = 4\text{ cm} \times 3\text{ cm}$) pela altura (2 cm).

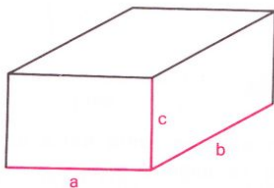
Volume de um paralelepípedo retângulo - continuação

A conclusão anterior é generalizável, pelo que o volume do paralelepípedo retângulo é

$$V = A_b \cdot c$$

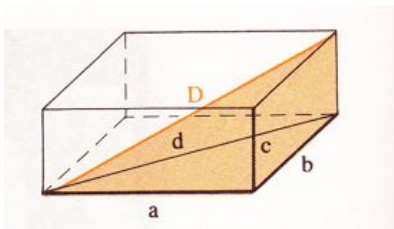
sendo $A_b = a \cdot b$ a área da base e c a altura, vindo então

$$V = a \cdot b \cdot c$$

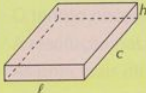
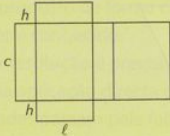


Diagonal do paralelepípedo retângulo

- Qual é a diagonal do paralelepípedo retângulo com arestas a , b e c ?



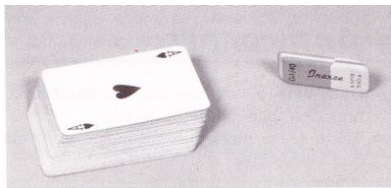
Área e volume do paralelepípedo retângulo - resumo

Sólido	Uma planificação	Área lateral	Área total	Volume
<p>Paralelepípedo rectângulo</p> 		$A_l = P_b \times h$ <p>P_b – perímetro da base</p>	$A_t = A_l + 2A_b$	$V = A_b \times h$ $V = c \cdot \ell \cdot h$

Observação 2

Notemos que nem todos os paralelepípedos são retângulos.

Alguns objetos de uso comum constituem exemplos de **paralelepípedos oblíquos** - poliedros cujas faces são seis paralelogramos iguais dois a dois.



- O volume do paralelepípedo oblíquo é também dado pelo produto da área da base pela altura, isto é:

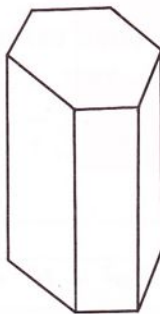
$$V = A_b \cdot c$$

Prisma

Um **prisma** é um sólido geométrico limitado por duas bases (polígonos iguais) situadas em planos paralelos e várias faces (paralelogramos).

Há, então, a considerar num prisma os seguintes elementos:

- bases (polígonos)
- faces (paralelogramos)
- arestas das bases (lados das bases)
- arestas laterais (lados das faces que não pertencem às bases)
- vértices (pontos de encontro das arestas)
- altura (distância entre os planos das bases)



Classificação dos prismas

O número de faces é igual ao número de lados de cada base e condiciona o nome a que se dá ao prisma. Assim, um prisma com três faces diz-se **triangular**, com quatro faces é **quadrangular** e, sucessivamente, **pentagonal**, **hexagonal**, **octogonal**, etc.



Triangular
(as bases são triângulos)



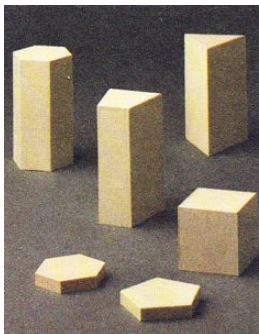
Quadrangular
(as bases são quadriláteros)



Hexagonal
(as bases são hexágonos)

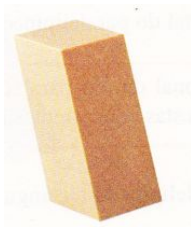
Prismas retos

- Quando as faces são retângulos o prisma diz-se **reto**.



Prismas oblíquos e prismas regulares

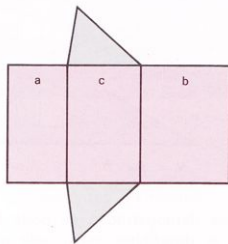
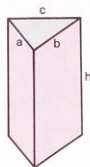
- Se as faces são paralelogramos não retângulos, o prisma é **oblíquo**.



- Um prisma reto em que as bases são polígonos regulares diz-se um **prisma regular**.

Área de um prisma reto

Para aprender a determinar a área da superfície de um prisma reto podemos utilizar como exemplo um prisma triangular cuja planificação se apresenta ao lado, à direita.



Sombreada a vermelho está a superfície lateral cuja área, a que chamaremos A_l , é dada por $A_l = (a + b + c) \cdot h$. A cinzento está sombreada a superfície correspondente às duas bases. Sendo A_b a área de cada base, a área total será

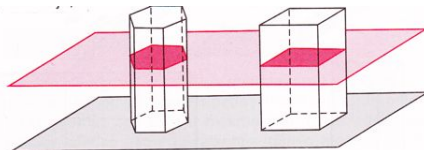
$$A_t = 2A_b + A_l$$

Volume de um prisma

O volume do prisma pode ser obtido por aplicação do princípio de Cavalieri. Para tal, considera-se um prisma qualquer e um paralelepípedo com a mesma altura e cuja base tenha a mesma área da base do prisma.

Cortadas por planos paralelos aos que contêm as bases, as secções serão sempre polígonos com a mesma área (equivalentes) e, assim, os dois sólidos têm o mesmo volume.


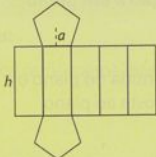
Podemos portanto afirmar que o volume do prisma é igual ao do paralelepípedo, ou seja



$$V = A_b \cdot h$$

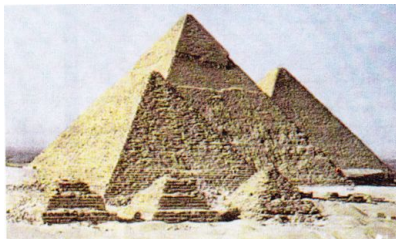
A_b — área da base
 h — altura

Área e volume de um prisma - resumo

Sólido	Uma planificação	Área lateral	Área total	Volume
<p>Prisma regular</p> 		$A_l = P_b \times h$	$A_t = A_l + 2A_b$	$V = A_b \times h$

Pirâmides

A arquitectura andou desde sempre ligada à Geometria...



Há mais de 4000 anos foram contruídas no Egipto três grandes pirâmides quadrangulares.

A maior delas, a de Quéops, é o maior sólido geométrico feito pelo Homem.

Para realçar a grandiosidade de alguns destes monumentos, que serviam de túmulo aos Faraós, basta saber que a base de algumas pirâmides contruídas ocupam a superfície correspondente a seis campos de futebol e a sua altura chega a atingir os 150 *m*.

Pirâmides

- **Pirâmides** são sólidos limitados por uma base poligonal e por faces laterais triangulares.

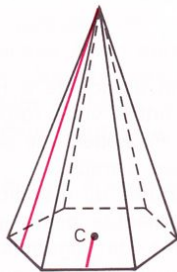
Numa pirâmide podemos considerar os seguintes elementos:

- base (polígono);
- faces (triângulos);
- arestas da base (lados da bases);
- arestas laterais (lados das faces que não pertençam à base);
- vértices da base (vértices do polígono da base);
- vértice da pirâmide (ponto de encontro ds arestas laterais)
- altura (distância do vértice ao plano da base)



Pirâmide regular

Se a base da pirâmide for um polígono regular e se a perpendicular ao plano da base, tirada pelo vértice da pirâmide, intersectar a base no seu centro, a pirâmide diz-se **regular**.



Nas pirâmides regulares as faces são *triângulos isóceles* e à altura dos triângulos isósceles dá-se o nome de **apótema da pirâmide**.

É evidente que, sendo a base um polígono regular, este também tem um apótema a que chamamos **apótema da base**.

Ilustração

C — centro da base

M — ponto médio da aresta da base

$[VC]$ — altura

$[VM]$ — apótema da pirâmide

$[MC]$ — apótema da base



Hexagonal regular

Classificação das pirâmides segundo a sua base

O número de faces, como aliás também sucede nos prismas, condiciona o nome das pirâmides.

Assim, se a pirâmide tem três faces, a base será um triângulo e ela chama-se **triangular**; é **quadrangular** se tiver quatro faces e, sucessivamente, **pentagonal**, **hexagonal**, etc.



Triangular
(a base é um triângulo)



Quadrangular
(a base é um quadrado)



Hexagonal
(a base é um hexágono)

Pirâmide oblíqua

Uma pirâmide diz-se **oblíqua** se a perpendicular à base contendo o vértice não passa pelo centro da base. Se a base não for regular, a pirâmide diz-se sempre oblíqua. Mas há pirâmides com base regular e oblíquas.



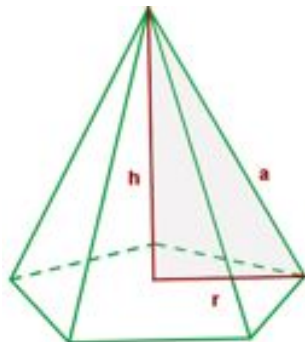
Cálculo da aresta lateral de uma pirâmide (pentagonal)

Conhecendo-se:

- a altura h da pirâmide e
- o raio r da base (raio da circunferência circunscrita ao pentágono),

calculamos a **aresta lateral a** da pirâmide aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo sombreado, tendo-se

$$a^2 = h^2 + r^2 \text{ ou seja } a = \sqrt{h^2 + r^2}.$$



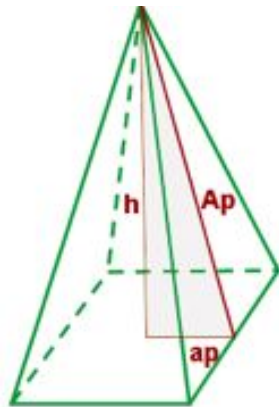
Cálculo da apótema lateral uma pirâmide (quadrangular)

Conhecendo-se:

- a altura h da pirâmide e
- apótema da base (ap)

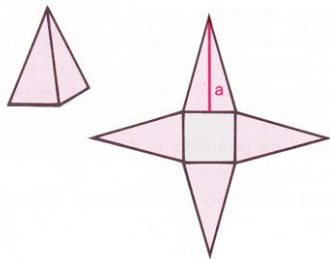
calculamos a **apótema lateral** Ap da pirâmide aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo sombreado, tendo-se

$$Ap^2 = h^2 + ap^2 \text{ ou seja } Ap = \sqrt{h^2 + ap^2}.$$



Área da superfície de uma pirâmide

Atendendo à planificação, podemos ver que a **área** não é mais do que a soma da área lateral, A_l (sombreada a vermelho) com a área da base A_b (sombreada a cinzento).



A área lateral é a soma das áreas das faces (triângulos isósceles). Sendo p o perímetro da base e a o apótema da pirâmide,

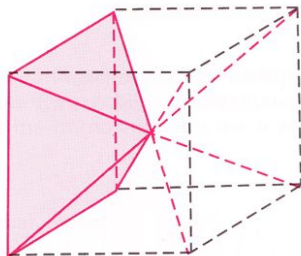
$$A_l = 4 \frac{\frac{p}{4} \cdot a}{2} = \frac{p \cdot a}{2}$$

A área total será então:

$$A_t = A_l + A_b = \frac{p \cdot a}{2} + A_b.$$

Volume de uma pirâmide

A fórmula para a determinação do volume de uma pirâmide pode ser generalizada a partir de um caso muito evidente - o de uma pirâmide quadrangular regular cuja base é uma face de um cubo e cujo vértice é o centro desse cubo.



Vê-se que no cubo cabem seis pirâmides iguais àquela - tantas quantas as faces do cubo.

Volume de uma pirâmide - continuação

O volume de cada uma (pirâmide) é pois

$$V = \frac{a^3}{6}.$$

Entretanto e como a altura de cada pirâmide é $h = \frac{a}{2}$ e atendendo que a^2 é a área da base, A_b , teremos

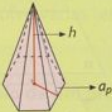
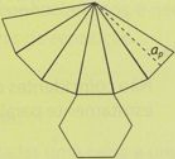
$$V = \frac{a^3}{6} = \frac{a^2 \times a}{6} = \frac{A_b \times 2h}{6} = \frac{A_b \times h}{3}$$

ou seja, $V = \frac{A_b \times h}{3}$ é o volume desta pirâmide quadrangular.

O princípio de Cavalieri permite-nos afirmar que esta conclusão é válida para qualquer pirâmide. O volume de uma pirâmide é então

$$V = \frac{1}{3} A_b \times h.$$

Área e volume de uma pirâmide - resumo

Sólido	Uma planificação	Área lateral	Área total	Volume
<p>Pirâmide</p>  <p>a_p - apótema da pirâmide</p>		$A_l = \frac{P_b}{2} \times a_p$	$A_t = A_l + A_b$	$V = \frac{1}{3} A_b \times h$

Sólidos de revolução

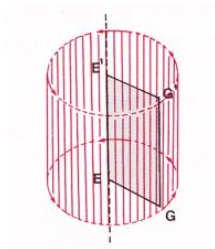


Há sólidos cuja superfície fronteira é, na totalidade ou em parte, curva: são os não poliedros. De entre estes são particularmente importantes os sólidos de revolução.

- **Sólidos de revolução** são os sólidos gerados por uma superfície plana que roda em torno de uma reta até dar uma volta completa (revolução).

Cilindro de revolução

O retângulo $[EE'G'G]$, rodando em torno do lado $[EE']$, a que chamamos **eixo**, vai varrendo o espaço, gerando o sólido a que se dá o nome de **cilindro de revolução**.



O lado $[GG']$ que gera a superfície lateral chama-se **geratriz** e os lados $[EG]$ e $[EG']$, geradores das bases, são raios.

É fácil constatar que as bases do cilindro são **círculos** uma vez que G se mantém sempre à mesma distância de E , o mesmo sucedendo relativamente a G' e E' .

A altura de um cilindro de revolução é igual ao comprimento da geratriz.

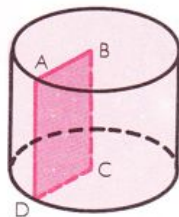
Ilustração

$[ABCD]$ — rectângulo gerador

$[AB]$ — raio da base

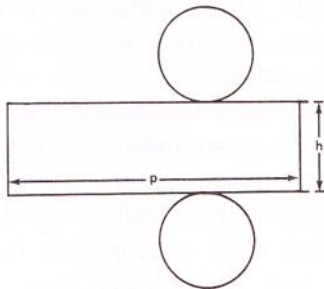
$[AD]$ — geratriz

$[BC]$ — eixo da rotação



Área de um cilindro

Numa planificação de um cilindro a superfície lateral como se “desenrolou”, apresentando agora a forma de um rectângulo cujos lados são, um, o perímetro da base, o outro, a altura do cilindro.



Assim, a **área lateral** é dada por

$$A_l = p \cdot h \quad \text{ou} \quad A_l = 2\pi r h$$

A **área total** é a soma das áreas das bases com a área lateral

$$A_t = A_l + 2A_b \quad \text{ou} \quad A_t = 2\pi r h + 2\pi r^2.$$

Volume de um cilindro

O **volume** de um cilindro de revolução pode calcular-se utilizando a sua grande analogia com o prisma regular.


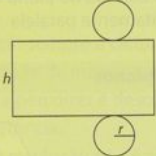
Se imaginarmos diversos prismas inscritos num cilindro, com um número cada vez maior de faces, não é difícil aceitar que eles se tornam cada vez mais iguais ao cilindro.



Assim, o volume do cilindro será o volume do prisma com um número infinito de faces e, portanto,

$$V = A_b \cdot h \quad \text{ou} \quad V = \pi r^2 h$$

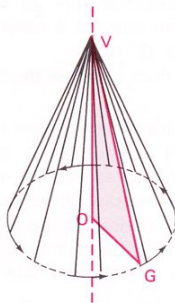
Área e volume de um cilindro- resumo

Sólido	Uma planificação	Área lateral	Área total	Volume
<p>Cilindro de revolução</p> 		$A_l = P_b \times h$ $= 2\pi r \times h$	$A_t = A_l + 2A_b$ $= 2\pi rh + 2\pi r^2$	$V = A_b \times h$ $V = \pi r^2 \times h$

Cone de revolução

Outro dos sólidos muito conhecidos e cuja forma está patente em muitos dos objetos que nos envolvem é o **cone**.

Vamos estudar com pormenor o **cone de revolução**. Este sólido pode ser gerado pela revolução de um triângulo retângulo em torno de um dos seus catetos (na figura, $[VO]$) a que chamamos **eixo**.



Enquanto o outro cateto, $[GO]$, vai gerando a base, a hipotenusa, a que se dá o nome de **geratriz**, gera a superfície lateral.

A **altura** é o comprimento do eixo.

Ilustração

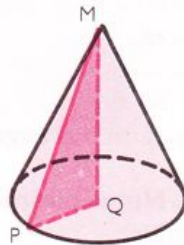
$[MPQ]$ — triângulo gerador

$[MP]$ — geratriz

$[MQ]$ — altura

$[PQ]$ — raio da base

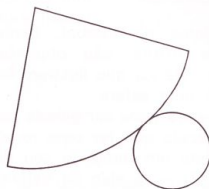
$[MQ]$ — eixo da rotação



Área de um cone de revolução

A planificação de um cone de revolução dá uma figura geométrica composta por um sector circular e um círculo. Por analogia com a pirâmide, e uma vez que podemos considerar que um cone é uma pirâmide com infinitas faces, a sua **área lateral** é calculada

através do semiproduto do perímetro, p , da base pelo comprimento da geratriz, g .



Assim,

$$A_l = \frac{p \cdot g}{2}$$

e, portanto a **área total** do cone de revolução é

$$A_t = A_l + A_b \quad \text{ou} \quad A_t = \pi r g + \pi r^2$$


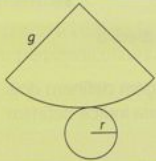
Volume de um cone de revolução

Para a determinação do **volume** do cone de revolução, usa-se também a analogia, já referida, com as pirâmides de que falámos atrás.

O volume do cone é então dado, como o da pirâmide, por

$$V = \frac{A_b \cdot h}{3} \quad \text{ou} \quad V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

Área e volume de um cone - resumo

Sólido	Uma planificação	Área lateral	Área total	Volume
<p>Cone</p>  <p>g – geratriz do cone</p>		$A_l = \frac{p_b}{2} \times g$ $= \pi r \times g$	$A_t = A_l + A_b$ $= \pi r g + \pi r^2$	$V = \frac{1}{3} A_b \times h$



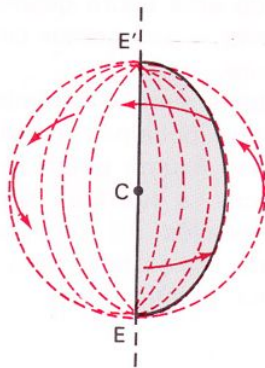
Construída em 1986, “La Géode” é uma esfera muito grande (36 *m* de diâmetro). Está colocada sobre um espelho de água e tem no seu interior uma imensa sala de espetáculos. “La Géode” fica situada em “La Villette”, próximo de Paris.

Esfera - continuação

Bolas de futebol, berlines, alguns frutos, são objetos que ilustram bem o que é uma **esfera**.

A esfera pode ser gerada por um semicírculo que faz uma revolução completa em torno do seu diâmetro $[EE']$ - o **eixo** da esfera.

A semicircunferência EE' é a geratriz e o seu centro, o centro da esfera.

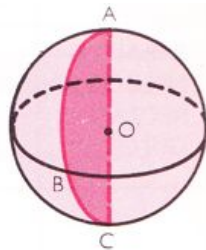


Ilustração

$[ABC]$ — semicírculo gérador

$[OB]$ — raio da esfera

$[AC]$ — eixo da rotação



Área e Volume de uma esfera


- A **área** de uma esfera é dada por

$$A = 4\pi r^2$$

- O **volume** de uma esfera é dado por

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Área e volume de uma esfera - resumo

Sólido	Uma planificação	Área lateral	Área total	Volume
<p>Esfera</p> 			$A_{\text{superfície esférica}} = 4\pi r^2$	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

- Paulo Abrantes, Raul F. Carvalho, *O Novo M₉*, Texto Editora, 1991.
- M. Augusta F. Neves, M. Teresa C. Vieira, Alfredo G. Alves, *exercícios de Matemática 9º ano*, Porto Editora, 1991.
- Inez Santos, Judite Barros, *Compêndio de Matemática 9º ano*, Didáctica Editora, 1991.
- M. Augusta F. Neves, M. Luísa C. Brito, *Matemática Livro de texto 7º ano de escolaridade*, Porto Editora, 1992.
- Iolanda C. Passos, Nélia Amado, Olga F. Correia, *Matemática em Acção (Teoria e prática) 7º ano*, Lisboa Editora.