

Capítulo 1 - SISTEMAS e SINAIS

Maria do Carmo Martins

Fevereiro de 2012

§ 1.1 Conceitos básicos de sinais. Sinais contínuos e discretos

As noções de **sinais** e **sistemas** são comuns a uma grande variedade de áreas científicas. Os métodos e as técnicas que lhes estão associados desempenham um papel importante em diversas áreas da ciência e da tecnologia, tais como:

- comunicações
- projectos de circuitos
- sistemas de geração e de distribuição de energia
- controlo de processos químicos
- acústica
- sismologia
- etc.

Introdução - continuação

- Os **sinais** são funções de uma ou mais variáveis independentes que tipicamente contêm informação sobre o comportamento ou as características de determinado fenómeno físico.
- Os **sistemas** são modelos matemáticos, ou abstrações sobre a realidade, que excitados por uma ou mais entradas (sinais) produzem nas saídas as respostas (sinais) correspondentes. Entrada e saída partilham entre si uma relação de causa-efeito.

Exemplos

- Num circuito eléctrico, tensões e correntes como funções do tempo são exemplos de sinais, enquanto que o circuito representa um sistema.
- Quando um automobilista pressiona o acelerador, o automóvel responde aumentando a velocidade. Neste caso, o sistema é o automóvel; a posição do acelerador é o sinal de entrada e a velocidade do veículo a resposta do sistema.
- Uma máquina fotográfica é um sistema que recebe luz oriunda de diferentes fontes luminosas e reflectidas por diversos objectos e produz como saída uma fotografia.

Sinais descrevem uma grande variedade de fenómenos físicos, traduzíveis em grandezas que variam no tempo ou no espaço.

Definição

Sinais são funções de uma ou mais variáveis independentes que contêm informação acerca do comportamento e características de determinados fenómenos físicos. São representados matematicamente como funções de uma ou mais variáveis independentes.

Sinais Contínuos e Discretos

Podemos distinguir dois tipos de sinais com base no tipo de domínio que os caracteriza:

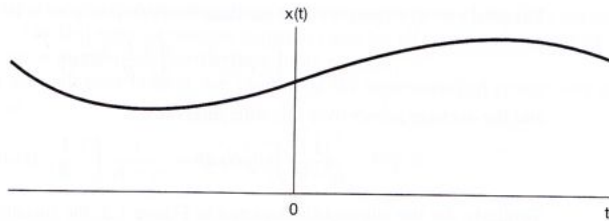
- **Sinais contínuos** (no tempo): $x(t)$
quando o domínio é um subconjunto dos números reais, isto é,

$$x(t), \quad -\infty < t < +\infty, \quad \text{em geral } t \in \mathbb{R}$$

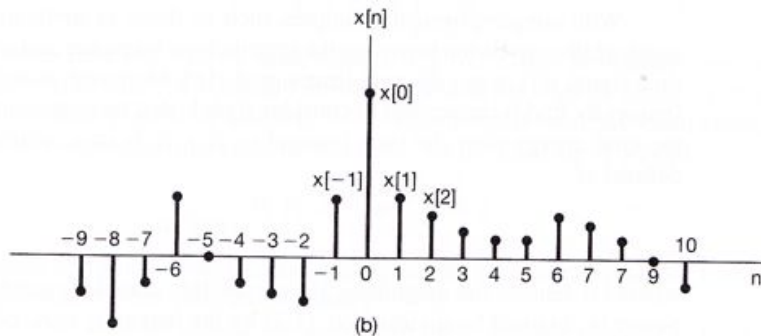
- **Sinais discretos** (no tempo): $x[n]$
quando o domínio é um subconjunto dos números inteiros;

$$x[n], \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \text{em geral } -\infty < n < +\infty$$

Exemplo de um sinal contínuo



Exemplo de um sinal discreto



Energia e potência associadas a um sinal - Exemplo 1

Num circuito com uma só resistência R , a potência (instantânea) dissipada é definida por

$$p(t) = R i^2(t) = v(t) i(t) = \frac{1}{R} v^2(t),$$

sendo $v(t)$ a queda de potencial aos terminais da resistência. A **energia** dissipada nessa resistência no intervalo de tempo $t_1 \leq t \leq t_2$ será dada por

$$E(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{R} v^2(t) dt.$$

Energia e potência associadas a um sinal - Exemplo 1 - continuação

Por seu lado, a **potência média** dissipada no mesmo intervalo de tempo será

$$P(t_1, t_2) = \frac{1}{t_2 - t_1} E(t_1, t_2) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt,$$

onde $p(t) = \frac{1}{R} v^2(t)$ é a potência instantânea. Tem-se assim,

$$P(t_1, t_2) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{R} v^2(t) dt.$$

Energia e potência associadas a um sinal - Exemplo 2

Se um automóvel sofre uma força de atrito $F_{\text{atrito}} = \rho v$, sendo v a sua velocidade instantânea, então a energia dissipada por este atrito num intervalo de tempo Δt (pequeno) será

$$F_{\text{atrito}}(\Delta t) = F_{\text{atrito}} v \Delta t = \rho v v \Delta t = \rho v^2(t) \Delta t,$$

ou seja, a potência instantânea dissipada por atrito é $p(t) = \rho v^2(t)$. Então a energia dissipada num intervalo de tempo qualquer $t_1 \leq t \leq t_2$ será dada por

$$E(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \rho v^2(t) dt$$

e a respectiva potência média será

$$P(t_1, t_2) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \rho v^2(t) dt.$$

Energia e potência associadas a um sinal contínuo

Considerando a queda de potencial no 1º exemplo e a velocidade no 2º como sinais contínuos no tempo, verificamos que a **energia** que lhes está associada num intervalo de tempo $t_1 \leq t \leq t_2$ é dada basicamente pelo integral temporal, sobre esse intervalo, do quadrado do sinal.

Generalizando, podemos definir a **energia** de um qualquer sinal $x(t)$ sobre um intervalo temporal $t_1 \leq t \leq t_2$ pelo integral

$$E(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt.$$

Energia e potência associadas a um sinal contínuo - continuação

Considerando a possibilidade de termos de utilizar sinais que sejam **grandezas complexas**, podemos ainda generalizar a definição anterior e escrever

$$E(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt$$

e também

$$P(t_1, t_2) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt,$$

onde $x(t)$ é, por hipótese, um sinal contínuo.

Energia e potência associadas a um sinal discreto

Para o caso discreto temos

$$E(n_1, n_2) = \sum_{n_1}^{n_2} |x[n]|^2$$

e também

$$P(n_1, n_2) = \frac{1}{n_2 - n_1 + 1} \sum_{n_1}^{n_2} |x[n]|^2.$$

Observação

Quando os intervalos na variável independente (t ou n) são de extensão infinita, temos por definição,

- para um sinal contínuo $x(t)$

$$E_{\infty} = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^{+T} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

$$P_{\infty} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |x(t)|^2 dt$$

- para um sinal discreto $x[n]$

$$E_{\infty} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^{+N} |x[n]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2$$

$$P_{\infty} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{+N} |x[n]|^2$$

i) Quando a energia E_∞ é finita

Pode suceder que

$$\int_{-T}^{+T} |x(t)|^2 dt \quad \text{ou} \quad \sum_{n=-N}^{+N} |x[n]|^2$$

converjam, por maiores que sejam T e N , em especial quando $T \rightarrow \infty$ ou $N \rightarrow \infty$. Neste caso, as energias E_∞ tomam valores finitos. Consequentemente, as potências médias tomarão o valor zero.

Exemplo 1:

Calcule E_∞ e P_∞ , sendo o sinal definido por

$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & t < 0 \text{ ou } t > 1 \end{cases}$$

ii) A potência média P_∞ não é nula (nem infinita)

Contrariamente ao caso anterior, podemos ter sinais cuja potência média não seja nula (nem infinita). Neste caso,

$$E_\infty = \infty,$$

como é evidente.

Exemplo 2:

Calcule E_∞ e P_∞ , sendo o sinal discreto (constante) definido por

$$x[n] = 4.$$

iii) Energia e potência ambas infinitas

Existem sinais cuja energia e potência, num intervalo infinito, são ambas infinitas.

Exemplo 3:

Calcule E_∞ e P_∞ , sendo o sinal contínuo definido por

$$x(t) = t.$$

§ 1.2. Transformações da variável independente

É vulgar a transformação de sinais por variadas operações:

- a conversão de um dado sinal num outro, de diferente natureza física (num sistema aviónico “fly-by-wire”, por exemplo, acção do piloto é transformada em sinais eléctricos que depois são transformados em posições das superfícies móveis do avião),
- a filtragem de um sinal codificado que posteriormente será transformado em música, etc...

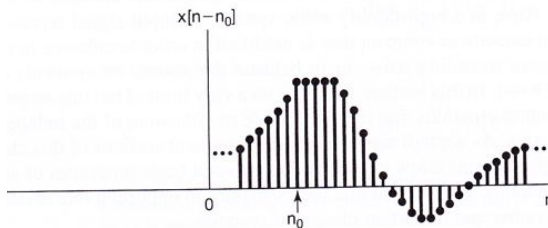
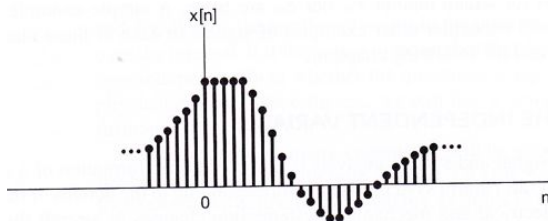
De todas estas possíveis transformações, consideremos agora uma só, a **transformação da variável independente de um dado sinal**, t ou n , chamando-lhe “*tempo*”, mesmo que o não seja realmente.

Exemplos de transformações da variável independente

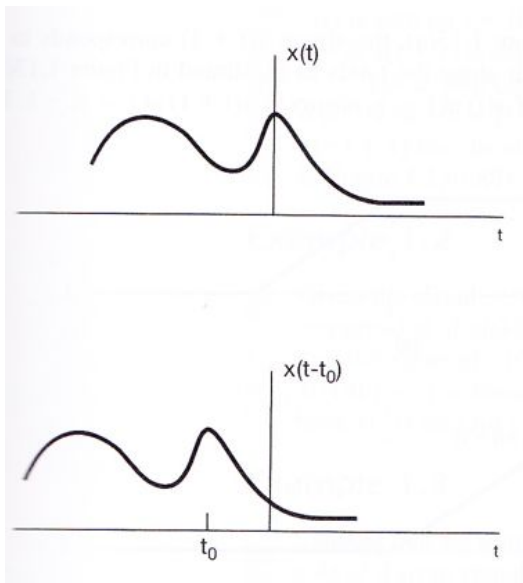
Iremos considerar algumas transformações para sinais contínuos ou discretos:

- (i) Desvio temporal (ou translação no tempo)
- (ii) Inversão temporal (ou reflexão em relação à origem)
- (iii) Escalamento temporal (ou mudança de escala)

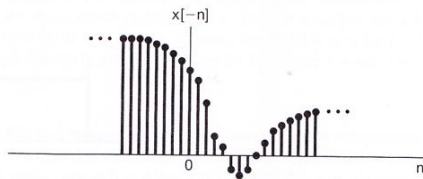
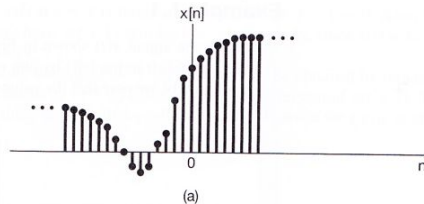
Desvio temporal (ou translação no tempo) - caso discreto



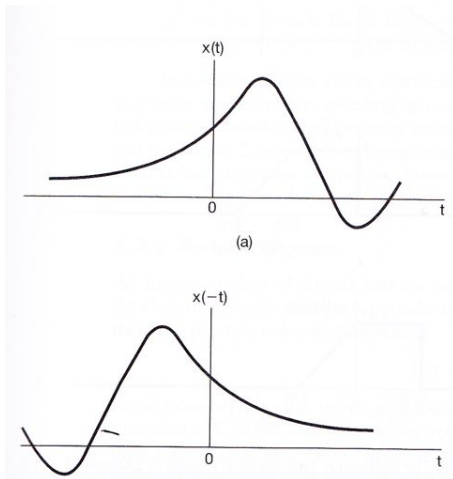
Desvio temporal (ou translação no tempo) - caso contínuo



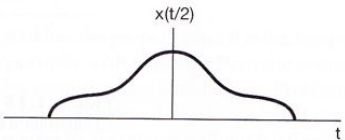
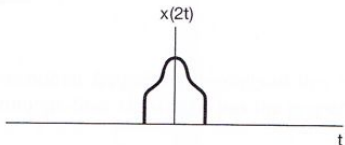
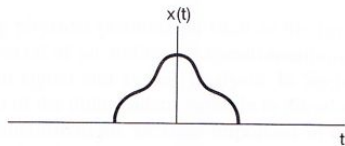
Inversão temporal (ou reflexão em relação à origem) - caso discreto



Inversão temporal (ou reflexão em relação à origem) - caso contínuo



Escalamento temporal (ou mudança de escala) - caso contínuo



Transformações da variável independente - resumo

Em geral, estaremos interessados em **transformações lineares da variável independente** da forma:

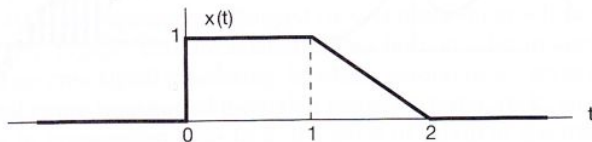
$$t \rightarrow \alpha t + \beta \quad \text{e, consequentemente,} \quad x(t) \rightarrow x(\alpha t + \beta)$$

Consoante os valores de α e de β , assim a transformação linear da variável independente corresponde a diferentes operações, nomeadamente:

- Se $|\alpha| > 1$ tem-se uma compressão linear;
- Se $|\alpha| < 1$ tem-se uma dilatação linear;
- Se $\alpha < 0$ tem-se uma inversão temporal (com ou sem compressão ou dilatação);
- Se $\beta \neq 0$ tem-se um desvio temporal;

Exemplo 1.1

Dado o sinal:



esboce os seguintes sinais:

a) $x(t + 1)$;

d) $x(-t + 1)$;

b) $x(-t)$;

e) $x\left(\frac{3}{2}t\right)$;

c) $x(-t - 1)$;

f) $x\left(\frac{3}{2}t + 1\right)$.

g) Defina analiticamente o sinal e comprove os resultados anteriores.

Sinais periódicos

- Um sinal contínuo, $x(t)$, diz-se **periódico** quando existe $T \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$x(t) = x(t + T), \quad \forall t.$$

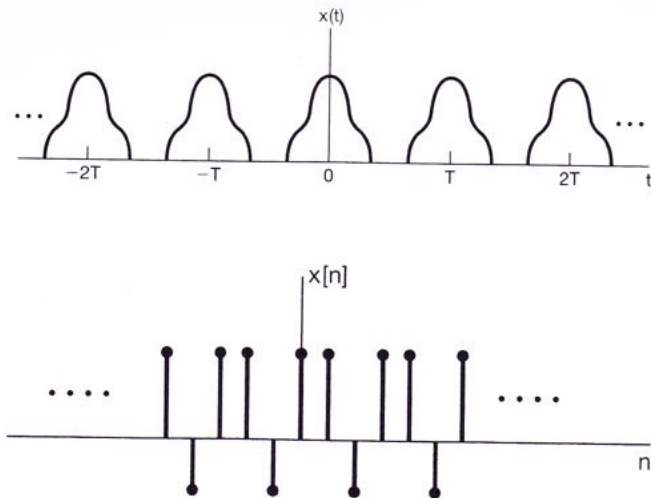
- Um sinal discreto, $x[n]$, diz-se **periódico** quando existe $N \in \mathbb{Z}^+$ (N é um número inteiro positivo) tal que

$$x[n] = x[n + N], \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

O parâmetro $T \in \mathbb{R}^+$ (ou $N \in \mathbb{Z}^+$) representa o **período do sinal**.
Corresponde ao valor da translação no tempo que efectuada sobre o sinal original conduz exactamente ao mesmo sinal.

Se um sinal não é periódico, diz-se **aperiódico**.

Exemplos de sinais periódicos



Observação 1

Um sinal periódico é, necessariamente, um sinal de comprimento infinito (sinal bilateral).

Observação 2

- Se $x(t)$ é periódico com período T , então

$$x(t) = x(t + mT) \quad \forall t,$$

com $m = 1, 2, 3, \dots$. Isto é, $x(t)$ é também periódico com período $2T, 3T, \dots$.

- Se $x[n]$ é periódico com período N , então

$$x[n] = x[n + mN] \quad \forall n,$$

com $m = 1, 2, 3, \dots$. Isto é, $x[n]$ é também periódico com período $2N, 3N, \dots$.

Período fundamental

- Define-se como **período fundamental** T_0 o menor valor positivo T_0 para o qual

$$x(t) = x(t + T_0) \quad \forall t.$$

- Define-se como **período fundamental** N_0 o menor valor positivo N_0 para o qual

$$x[n] = x[n + N_0] \quad \forall n.$$

Observação 3 ***

Um sinal constante, $x(t) = c^{te}$ (ou $x[n] = c^{te}$) é periódico, mas sem período definido.

Relativamente ao período fundamental, para sinais contínuos não se define T_0 e para sinais discretos tem-se $N_0 = 1$.

Exemplo 1.4

Verifique se o sinal contínuo definido por

$$x(t) = \begin{cases} \cos t, & t < 0 \\ \sin t, & t \geq 0 \end{cases}$$

é periódico.

Sinais pares ou ímpares

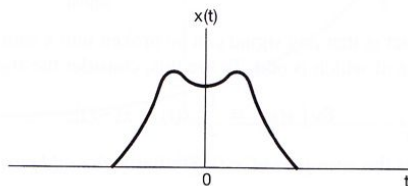
- Um sinal contínuo (ou discreto) diz-se **par** quando

$$x(t) = x(-t) \quad (\text{ou} \quad x[n] = x[-n])$$

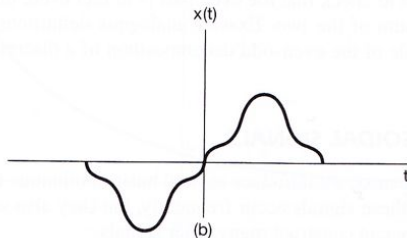
- Um sinal contínuo (ou discreto) diz-se **ímpar** quando

$$x(-t) = -x(t) \quad (\text{ou} \quad x[-n] = -x[n])$$

Exemplo de um sinal par e de um sinal ímpar



(a)



(b)

a) Sinal par; b) Sinal ímpar

Observações

- ① Um sinal par é aquele que é idêntico à sua inversão temporal.
- ② Um sinal ímpar é aquele que é simétrico em relação à origem.
- ③ Para um sinal ímpar que esteja definido no instante $t = 0$, tem-se *sempre*

$$x(0) = 0 \quad \text{ou} \quad x[0] = 0.$$

Propriedade

Qualquer sinal x pode ser decomposto na soma de um sinal par com um sinal ímpar, isto é, pode ser decomposto na soma da sua extensão (ou componente) par com a sua extensão (ou componente) ímpar. Com efeito, sendo Ev a extensão par e Od a extensão ímpar de x tem-se $x = Ev + Od$ onde

$$Ev \{x(t)\} = \frac{1}{2} [x(t) + x(-t)]$$

$$Od \{x(t)\} = \frac{1}{2} [x(t) - x(-t)]$$

no caso contínuo, ou

$$Ev \{x[n]\} = \frac{1}{2} [x[n] + x[-n]]$$

$$Od \{x[n]\} = \frac{1}{2} [x[n] - x[-n]]$$

no caso discreto.

Exemplo 4

Considere o sinal discreto definido por

$$x[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

Determine e represente graficamente $Ev \{x[n]\}$ e $Od \{x[n]\}$.

§ 1.3 Sinais exponenciais e sinais sinusoidais

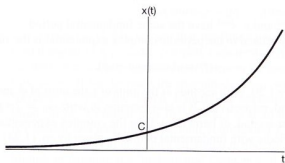
Vamos agora apresentar sinais básicos contínuos e discretos. Estes sinais não só aparecem frequentemente, como também servem para construir outros sinais.

- O sinal exponencial contínuo é da forma

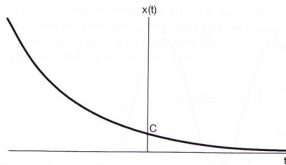
$$x(t) = C e^{at}, \quad \text{com } a, C \in \mathbb{C}, \text{ em geral.}$$

Consoante os valores dos parâmetros a e C , a exponencial complexa pode ter comportamentos diferentes. Por exemplo:

i) $C \in \mathbb{R}^+, a \in \mathbb{R}^+$



ii) $C \in \mathbb{R}^+, a \in \mathbb{R}^-$



Sinais exponenciais e sinais sinusoidais (ou senoidais) complexos, periódicos

Uma classe importante de exponenciais complexas é obtida restringindo os valores do **parâmetro a** a valores imaginários puros.

a) Exponenciais

Seja

$$x(t) = e^{j\omega_0 t},$$

onde $j \equiv i$ e i é o valor tal que $i^2 = -1$ e $\omega_0 \in \mathbb{R}$.

Uma propriedade importante deste sinal é ele ser **periódico**.

Sinais exponenciais e sinais sinusoidais (ou senoidais) complexos, periódicos - continuação

b) Sinusoidais ou Senoidais

São sinais da forma

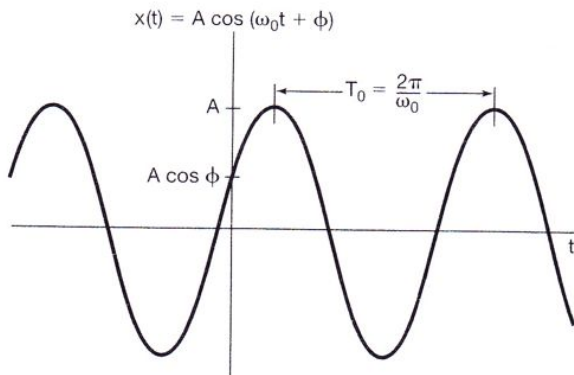
$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi) \quad \text{ou} \quad x(t) = A \sin(\omega_0 t + \phi).$$

Se as unidades de t são segundos, as unidades de ϕ e ω_0 são radianos e radianos por segundo, respectivamente. Para estes sinais também temos $\omega_0 = 2\pi f_0$, onde as unidades da frequência f_0 são hertz (Hz).

Tal como no caso da exponencial complexa, o sinal sinusoidal é periódico com período fundamental T_0 dado por:

$$T_0 = \frac{2\pi}{|\omega_0|}.$$

Exemplo de um sinal sinusoidal contínuo



Relação entre os sinais exponenciais e sinusoidais

Tendo em conta a **relação de Euler**,

$$e^{\pm j\theta} = \cos \theta \pm j \sin \theta,$$

tem-se que

$$\cos \theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} \quad \text{e} \quad \sin \theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}.$$

Consequentemente, o sinal sinusoidal $A \cos(\omega_0 t + \phi)$ pode ser escrito em termos de **exponenciais complexas**:

$$\begin{aligned} A \cos(\omega_0 t + \phi) &= A \frac{e^{j(\omega_0 t + \phi)} + e^{-j(\omega_0 t + \phi)}}{2} = \\ &= \frac{A}{2} e^{j\phi} e^{j\omega_0 t} + \frac{A}{2} e^{-j\phi} e^{-j\omega_0 t} \end{aligned}$$

Outras relações entre os sinais exponenciais e sinusoidais

Podemos ainda escrever:

$$A \cos(\omega_0 t + \phi) = A \Re\{e^{(\omega_0 t + \phi)}\}, \quad \text{com } A \in \mathbb{R}$$

$$A \sin(\omega_0 t + \phi) = A \Im\{e^{(\omega_0 t + \phi)}\}, \quad \text{com } A \in \mathbb{R}$$

onde, se c é um número complexo, $\Re\{c\}$ denota a sua parte real e $\Im\{c\}$ a sua parte imaginária.

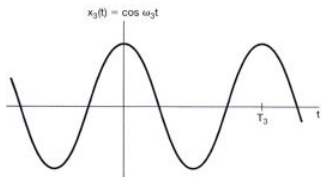
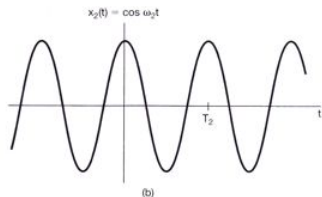
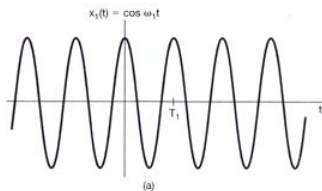
Observação

Da equação $T_0 = \frac{2\pi}{|\omega_0|}$, vemos que o período fundamental T_0 de um sinal sinusoidal contínuo ou de uma exponencial complexa é inversamente proporcional a $|\omega_0|$.

O que isso significa?

Na figura seguinte é possível visualizar graficamente a relação entre T_0 e $|\omega_0|$ num sinal de tempo contínuo.

Observação - continuação



$\omega_1 > \omega_2 > \omega_3$,
o que implica que
 $T_1 < T_2 < T_3$.

Energia total e potência média de sinais periódicos

Os sinais periódicos contêm uma energia total infinita e uma potência média finita. São exemplos os sinais exponencial e sinusoidal anteriormente já referidos.

Exemplo 5

- A energia do sinal exponencial $x(t) = e^{j\omega_0 t}$ ao longo de um período T_0 é:

$$E_{\text{período}} = \int_0^{T_0} |e^{j\omega_0 t}|^2 dt = \int_0^{T_0} dt = T_0$$

- A potência média do sinal exponencial $x(t) = e^{j\omega_0 t}$ ao longo do mesmo período T_0 é:

$$P_{\text{período}} = \frac{1}{T_0} E_{\text{período}} = 1$$

- E no intervalo $]-\infty, +\infty[$?

Harmónicas da frequência fundamental - introdução

As exponenciais complexas periódicas desempenham um papel central no estudo dos sinais e sistemas, em parte porque são extremamente úteis para construir muitos outros sinais.

Muitas vezes é imprescindível considerar conjuntos de exponenciais complexas relacionadas harmonicamente, isto é, conjuntos de exponenciais periódicas, em que todas são periódicas com um período comum T_0 .

Harmônicas da frequência fundamental

Ora, uma condição necessária para uma exponencial complexa $e^{j\omega t}$ ser periódica com período T_0 é que

$$e^{j\omega T_0} = 1,$$

o que implica que ωT_0 seja um múltiplo de 2π , isto é,

$$\omega T_0 = 2k\pi, \quad \text{com } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1)$$

Assim, se definirmos

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0},$$

vemos que para satisfazer a equação (1), ω tem de ser um múltiplo de ω_0 . Isto é, um conjunto de exponenciais harmonicamente relacionadas é um conjunto de exponenciais periódicas com frequências fundamentais que são múltiplos de uma única frequência positiva ω_0 :

$$\phi_k(t) = e^{j k \omega_0 T}, \quad \text{com } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Harmônicas da frequência fundamental - continuação

- Para $k = 0$, $\phi_k(t)$ é uma constante;
- Para $k \neq 0$, $\phi_k(t)$ é periódica com frequência fundamental

$$|k|\omega_0$$

e período fundamental

$$\frac{2\pi}{|k|\omega_0} = \frac{T_0}{|k|}.$$

Às vezes pretende-se escrever a soma de duas exponenciais complexas como um **produto** de uma única exponencial complexa e uma única sinusoidal.

Exemplo 1.5

Escreva como o produto de uma exponencial complexa por uma senoidal, o sinal contínuo definido

$$x(t) = e^{j2t} + e^{j3t}$$

e determine a sua magnitude.

Sinais da forma exponencial complexa mais geral

Consideremos sinais da forma

$$x(t) = C e^{at}, \quad \text{onde } C = |C| e^{j\theta} \in \mathbb{C} \quad \text{e } a = r + j\omega_0 \in \mathbb{C}.$$

Então,

$$x(t) = |C| e^{j\theta} e^{(r+j\omega_0)t} = |C| e^{rt} e^{j(\omega_0 t + \theta)}.$$

Usando a relação de Euler, vem

$$x(t) = |C| e^{rt} \cos(\omega_0 t + \theta) + j |C| e^{rt} \sin(\omega_0 t + \theta).$$

Sinais da forma exponencial complexa mais geral - continuação

Analise o sinal anterior,

$$x(t) = |C|e^{rt} \cos(\omega_0 t + \theta) + j |C|e^{rt} \sin(\omega_0 t + \theta),$$

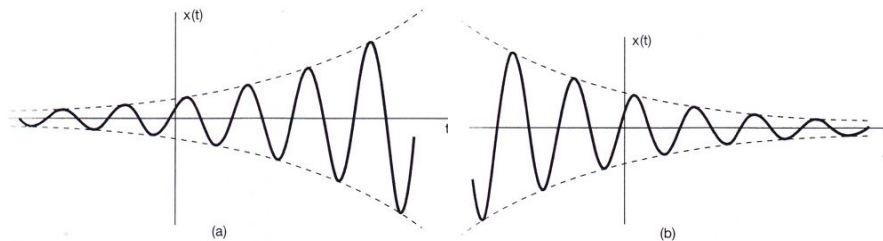
nos casos em que

a) $r = 0$;

b) $r > 0$;

c) $r < 0$.

Ilustração



a) Sinal sinusoidal $x(t) = |C|e^{rt} \cos(\omega_0 t + \theta)$ com $r > 0$;

b) Sinal sinusoidal $x(t) = |C|e^{rt} \cos(\omega_0 t + \theta)$ com $r < 0$;

Sinais exponenciais complexos e sinusoidais em tempo discreto

O sinal exponencial complexo discreto é definido por

$$x[n] = C e^{\beta n}.$$

Fazendo

$$\alpha = e^{\beta}$$

podemos escrever aquele sinal na forma

$$x[n] = C \alpha^n \quad (\text{mais conveniente na prática}).$$

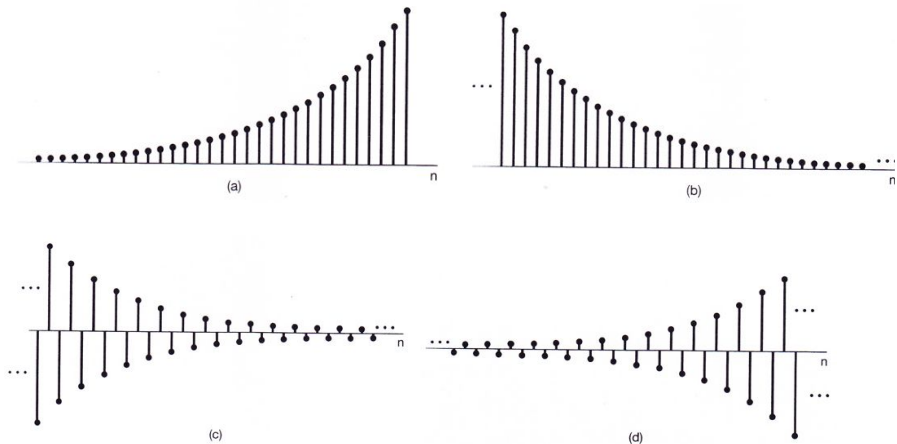
Em geral, C , α e β são números complexos.

Sinal exponencial real

Se C e α são reais, o sinal exponencial real $x[n] = C \alpha^n$ pode ter vários comportamentos:

- a) Se $|\alpha| > 1$, a magnitude do sinal cresce exponencialmente com n ;
- b) Se $|\alpha| < 1$ a magnitude do sinal decresce exponencialmente com n ;
- c) Se α é positivo, todos os valores de $C\alpha^n$ são ou positivos ou negativos;
- d) Se α é negativo, o sinal de $x[n]$ alterna;
- e) Se $\alpha = 1$, então $x[n]$ é constante;
- f) Se $\alpha = -1$, então $x[n]$ alterna entre os valores $-C$ e C .

Ilustração do sinal exponencial real $x[n] = C\alpha^n$



a) $\alpha > 1$; b) $0 < \alpha < 1$; c) $-1 < \alpha < 0$; d) $\alpha < -1$

Sinais sinusoidais

Outra exponencial complexa importante é obtida usando

$$x[n] = C e^{\beta n}$$

e restringindo β a valores imaginários puros (e portanto, $|\alpha| = |e^{\beta}| = 1$). Especificamente, consideremos

$$x[n] = e^{j\omega_0 n}.$$

Tal como no caso contínuo, este sinal está relacionado com o sinal

$$x[n] = A \cos(\omega_0 n + \phi).$$

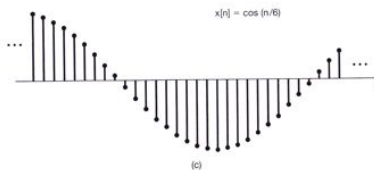
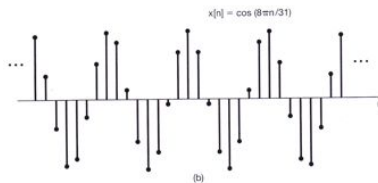
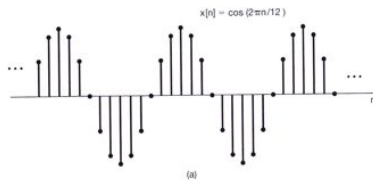
Uma vez mais, a relação de Euler permite-nos relacionar exponenciais complexas e sinusoidais:

$$e^{j\omega_0 n} = \cos(\omega_0 n) + j \sin(\omega_0 n)$$

e

$$A \cos(\omega_0 n + \phi) = \frac{A}{2} e^{j\phi} e^{j\omega_0 n} + \frac{A}{2} e^{-j\phi} e^{-j\omega_0 n}, \quad \text{com } A \in \mathbb{R}.$$

Exemplos de sinais sinusoidais em tempo discreto



Os sinais

$$x[n] = e^{j\omega_0 n} \quad \text{e} \quad x[n] = A \cos(\omega_0 n + \phi)$$

são exemplos de sinais discretos com energia total infinita em $-\infty < n < +\infty$ e potência média finita, tal como no caso contínuo.

Sinais exponenciais complexos, em geral

A exponencial complexa discreta geral pode ser escrita e interpretada em termos de sinais exponenciais reais e sinusoidais. Concretamente, escrevendo C e α na forma polar

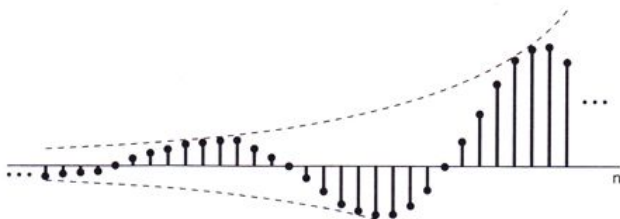
$$C = |C|e^{j\theta} \quad \text{e} \quad \alpha = |\alpha|e^{j\omega_0},$$

então

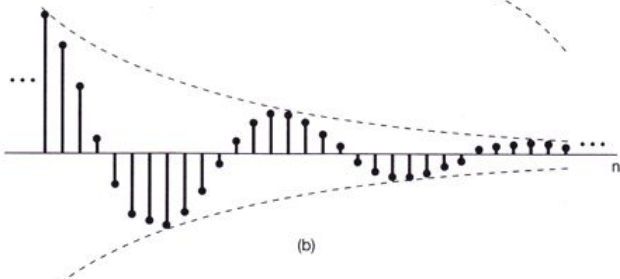
$$C\alpha^n = |C| |\alpha|^n \cos(\omega_0 n + \theta) + j |C| |\alpha|^n \sin(\omega_0 n + \theta).$$

- Para $|\alpha| = 1$ as partes real e imaginária da exponencial complexa são sinusoidais;
- Para $|\alpha| < 1$ as partes real e imaginária correspondem a sinusoidais multiplicadas por uma exponencial decrescente;
- Para $|\alpha| > 1$ as partes real e imaginária correspondem a sinusoidais multiplicadas por uma exponencial crescente.

Exemplos de sinais sinusoidais multiplicados por exponenciais crescentes e decrescentes



(a)



(b)

Propriedades de periodicidade de sinais complexos exponenciais em tempo discreto

Embora haja muitas semelhanças entre sinais de tempo contínuo e de tempo discreto, há também um número importante de diferenças. Uma dessas diferenças está relacionada com o sinal exponencial $e^{j\omega_0 n}$ (tempo discreto) e $e^{j\omega_0 t}$ (tempo contínuo). Vejamos então alguns contrastes entre o caso contínuo e o caso discreto.

- No caso do tempo contínuo, t , tem-se:
 - 1 Quanto maior for o valor de ω_0 , mais rapidamente oscila o sinal $x(t) = e^{j\omega_0 t}$.
 - 2 $x(t) = e^{j\omega_0 t}$ é periódico, qualquer que seja o valor de ω_0 .

Propriedades de periodicidade de sinais complexos exponenciais em tempo discreto - continuação

- No caso discreto, há diferenças:

1) De facto,

$$e^{j\omega_0 n} = e^{j(\omega_0 \pm 2k\pi)n}, \quad \text{com } k = 0, 1, 2, \dots$$

visto que $e^{\pm j2k\pi} = 1$.

Consequentemente, todos aqueles sinais exponenciais são afinal o mesmo e bastará considerar valores de ω_0 num intervalo de comprimento 2π . Os intervalos mais usuais são:

$$0 \leq \omega_0 \leq 2\pi \quad \text{ou} \quad -\pi \leq \omega_0 \leq \pi.$$

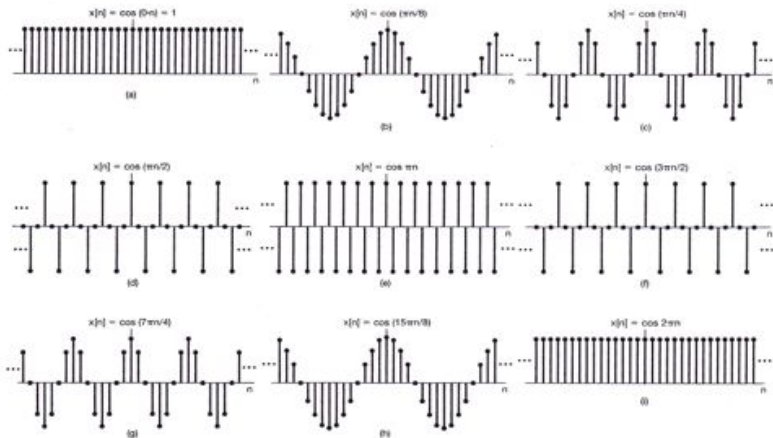
Assim, já não podemos afirmar que o ritmo de oscilação do sinal $e^{j\omega_0 n}$ aumente com o crescimento de ω_0 , por exemplo entre 0 e 2π .

Exemplos

(i) $\omega_0 = 0$ e $\omega_0 = 2\pi$ correspondem ao mesmo sinal constante, embora seja $\omega_0 = 2\pi > 0$;

(ii) $\omega_{0_1} = \frac{\pi}{4}$ e $\omega_{0_2} = \frac{9\pi}{4}$:

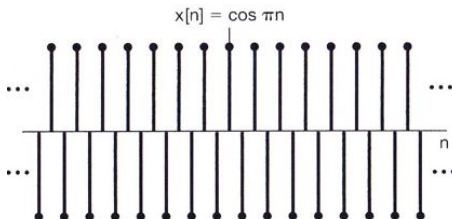
Exemplos - sequências de sinusoidais em tempo discreto para diferentes frequências



Em particular, para $\omega_0 = \pi$ ou para qualquer outro múltiplo ímpar de π ,

$$e^{j\pi n} = (e^{j\pi})^n = (-1)^n$$

e, portanto, este sinal oscila rapidamente, mudando de sinal (positivo ou negativo) em cada instante de tempo.



Periodicidade da exponencial complexa em tempo discreto

2) Para que o sinal $e^{j\omega_0 n}$ seja periódico com período $N > 0$ deverá ter-se

$$e^{j\omega_0(n+N)} = e^{j\omega_0 n} e^{j\omega_0 N} = e^{j\omega_0 n}$$

ou equivalentemente,

$$e^{j\omega_0 N} = 1.$$

Ora, para que a equação anterior se verifique $\omega_0 N$ deverá ser um múltiplo de 2π . Isto é, deverá existir um inteiro m tal que

$$\omega_0 N = 2\pi m$$

ou seja,

$$\frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{m}{N}.$$

Observação

O critério de periodicidade, com período $N > 0$, é que $\frac{\omega_0}{2\pi}$ seja um número racional. Se não for, N não será período e o sinal não será periódico se nenhum N satisfizer aquela igualdade.

Note-se que, sendo periódico com período N , também teremos

$$N = \frac{2\pi m}{\omega_0} = m \left(\frac{2\pi}{\omega_0} \right)$$

e a frequência fundamental é dada por

$$\frac{2\pi}{N} = \frac{\omega_0}{m}.$$

SISTEMAS e SINAIS

Conceitos básicos - continuação

Maria do Carmo Martins

Fevereiro de 2012

Comparação entre os sinais $e^{j\omega_0 t}$ e $e^{j\omega_0 n}$

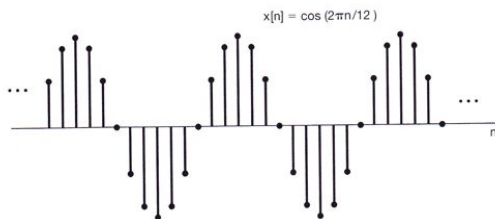
- **Sinal $e^{j\omega_0 t}$**
 - Diferentes sinais para diferentes valores de ω_0
 - Periódico para qualquer valor de ω_0
 - A frequência fundamental toma o valor ω_0
 - O período fundamental é
 - 1 $\frac{2\pi}{\omega_0}$, se $\omega_0 \neq 0$
 - 2 indefinido, se $\omega_0 = 0$
- **Sinal $e^{j\omega_0 n}$**
 - Sinais iguais para valores de ω_0 separados por múltiplos inteiros de 2π
 - Periódico somente se for $\omega_0 = \frac{2\pi m}{N}$ com m e N inteiros
 - A frequência fundamental toma o valor $\frac{\omega_0}{m}$
 - O período fundamental é
 - 1 $m \times \frac{2\pi}{\omega_0}$, se $\omega_0 \neq 0$
 - 2 indefinido, se $\omega_0 = 0$

Exemplo 1

Considere o sinal discreto

$$x[n] = \cos\left(\frac{2\pi n}{12}\right)$$

representado por



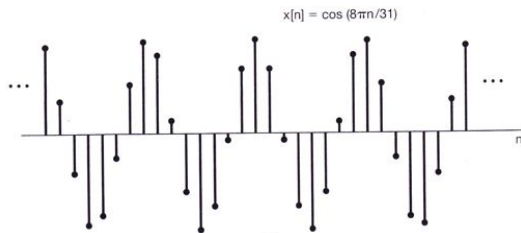
Indique ω_0 , o período fundamental e a envolvente contínua do sinal.

Exemplo 2

Considere o sinal discreto

$$x[n] = \cos\left(\frac{8\pi n}{31}\right).$$

representado por



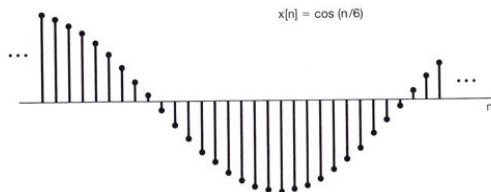
Indique ω_0 , o período fundamental e a envolvente contínua do sinal.

Exemplo 3

Consideremos o sinal discreto

$$x[n] = \cos\left(\frac{n}{6}\right).$$

representado por



Indique ω_0 . Será este sinal periódico?

Exemplo 1.6

Considere o sinal discreto

$$x[n] = e^{j\frac{2\pi}{3}n} + e^{j\frac{3\pi}{4}n}.$$

No caso do sinal ser periódico, qual será o seu período?

Harmónicas de exponenciais e senoidais discretos

No caso de **sinais exponenciais e senoidais discretos**, teremos também a ocorrência de harmónicas, semelhantes à do caso contínuo, mas também com algumas diferenças.

Harmónicas de exponenciais e senoidais discretos - continuação

Seja então $x[n] = e^{j\omega_0 n}$ um sinal exponencial complexo. Sabemos que o seu período, se existir, será

$$N = m \times \frac{2\pi}{\omega_0}, \quad \text{com } N \text{ e } m \text{ inteiros.}$$

Suponhamos que se obtém um número N inteiro mínimo quando $m = 1$.

Para sinais exponenciais complexos discretos, as harmónicas são da forma

$$\phi_k[n] = e^{jk(\frac{2\pi}{N})n}, \quad \text{com } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

e temos

$$\phi_{k+N}[n] = e^{j(k+N)(\frac{2\pi}{N})n} = e^{jk(\frac{2\pi}{N})n} \times \underbrace{e^{j2\pi n}}_{=1} = e^{jk(\frac{2\pi}{N})n} = \phi_k[n].$$

Harmónicas de exponenciais e sinusóides discretos - continuação

ou seja, o incremento de k de um valor N leva-nos de volta ao sinal $\phi_k[n]$. Consequentemente, **só haverá um número N de exponenciais complexas da forma $\phi_k[n]$ distintas**. São, por exemplo, a colecção

$$\begin{array}{ccccc} \phi_0[n] = 1, & \phi_1[n] = e^{j\frac{2\pi}{N}n}, & \cdots, & \phi_{N-1}[n] = e^{j\frac{(N-1)2\pi}{N}n} \\ \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ k = 0 & k = 1 & & k = N - 1 \end{array}$$

Note-se que aqui escolheu-se $k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$, mas outras escolhas (de N termos) são possíveis.

1.4 As funções impulso unitário e degrau unitário

Vamos agora definir outros sinais básicos:

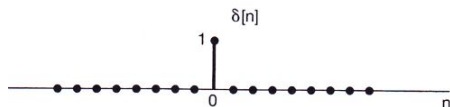
- o **impulso unitário** (em tempo contínuo e discreto) e o
- **degrau unitário** (em tempo contínuo e discreto),

os quais são importantes na análise de sinais e sistemas. Como iremos ver, podemos usar o impulso unitário na construção e representação de outros sinais genéricos.

1.4.1 Impulso unitário e degrau unitário - caso discreto

O sinal **impulso unitário** é definido por

$$\delta[n] = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ 1, & n = 0 \end{cases}$$



O sinal **degrau unitário** é definido por

$$u[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1, & n \geq 0 \end{cases}$$



1.4.1 Relação entre o impulso unitário e degrau unitário - caso discreto

Obviamente que podemos translacionar o impulso ou o degrau unitários.

Calculando $u[n] - u[n - 1]$, é evidente que:

$$\delta[n] = u[n] - u[n - 1].$$

Esta equação realça a existência de uma relação próxima entre o degrau e o impulso unitários.

1.4.1 Relação entre o impulso unitário e degrau unitário - caso discreto

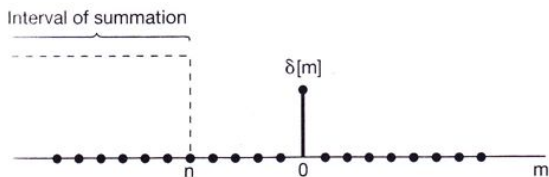
Por outro lado, dado que $\delta[m] = \delta[m - 0]$ é um impulso unitário centrado em $m = 0$, podemos também escrever

$$u[n] = \sum_{m=-\infty}^n \delta[m].$$

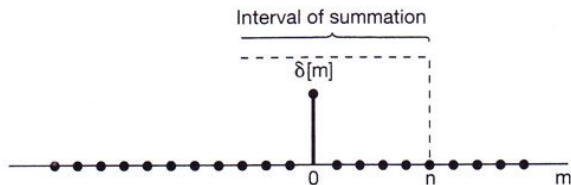
- Se $n < 0$, virá $\delta[m] = 0 \ \forall m$ neste intervalo e portanto, $\sum \delta[m] = 0 = u[n]$, $n < 0$, como queremos.
- Se $n \geq 0$ no somatório, este passará pela origem em $n = 0$ onde “armazena” o valor unitário, com $\delta[0] = 1$

Visualização

- Se $n < 0$



- Se $n > 0$



1.4.1 Relação entre o impulso unitário e degrau unitário - caso discreto

Consideremos $u[n] = \sum_{m=-\infty}^n \delta[m]$.

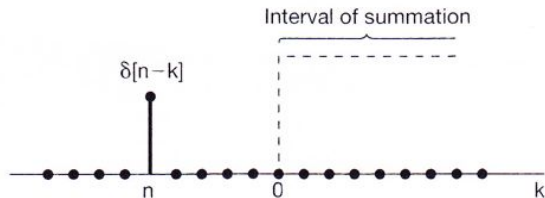
Efectuando a substituição $m = n - k$ tem-se

$$u[n] = \sum_{k=+\infty}^0 \delta[n - k] \equiv \sum_{k=0}^{+\infty} \delta[n - k].$$

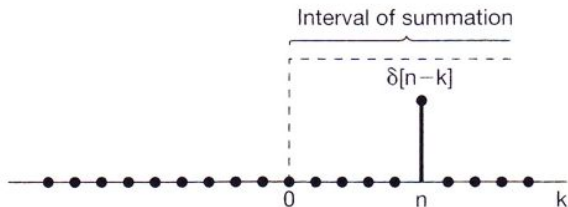
que não é mais do que uma soma de impulsos unitários centrados em $k = 0, 1, 2, \dots$, consoante o valor de n .

Visualização

- Se $n < 0$



- Se $n > 0$



Outras propriedades

- ① Como $\delta[n]$ só não é nulo em $n = 0$ e aí vale 1, tem-se

$$x[n] \delta[n] = x[0] \delta[n]$$

- ② Ou, mais geralmente, considerando o impulso unitário $\delta[n - n_0]$ centrado em $n = n_0$, tem-se

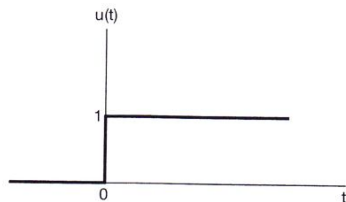
$$x[n] \delta[n - n_0] = x[n_0] \delta[n - n_0].$$

1.4.2 - Degrau unitário - caso contínuo

A função **degrau unitário** ou **escalão unitário** $u(t)$ define-se por

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

e é representado por



Note-se que em $t = 0$ o degrau unitário está indefinido.

1.4.2 Relação entre o impulso unitário e degrau unitário - caso contínuo

Tal como no caso discreto, o **impulso unitário em tempo contínuo** $\delta(t)$ está relacionado com o degrau unitário, tendo-se:

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau.$$

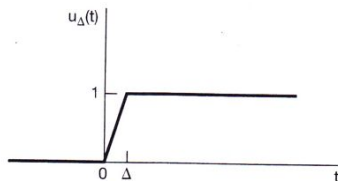
Em particular, o impulso unitário em tempo contínuo pode ser pensado como a primeira derivada do degrau unitário:

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

formalmente, já que $u(t)$ é descontínua em $t = 0$ e, consequentemente, é formalmente não diferenciável.

1.4.2 Relação entre o impulso unitário e degrau unitário - caso contínuo

Para interpretar a “pseudo-função” $\delta(t)$ “suavizamos” $u(t)$, considerando uma aproximação do degrau unitário $u_{\Delta}(t)$ a qual toma valores entre 0 e 1 num pequeno intervalo comprimento Δ : Então, virá



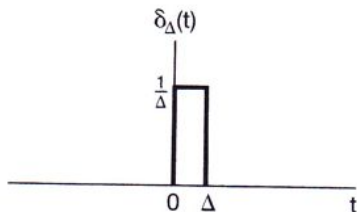
O degrau unitário muda instantaneamente e assim pode ser pensado como uma idealização de $u_{\Delta}(t)$ para Δ tão pequeno que a sua duração não interessa na prática. Formalmente, $u(t)$ é o limite de $u_{\Delta}(t)$ quando $\Delta \rightarrow 0$.

1.4.2 Relação entre o impulso unitário e degrau unitário - caso contínuo

Considerando a derivada

$$\delta_{\Delta}(t) = \frac{du_{\Delta}(t)}{dt} = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{\Delta}, & 0 < t < \Delta \\ 0, & t > \Delta \end{cases}$$

o seu gráfico é



1.4.2 Relação entre o impulso unitário e degrau unitário - caso contínuo

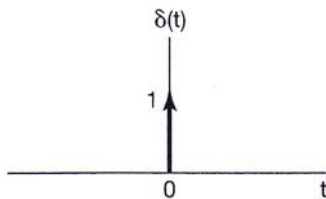
À medida que fazemos $\Delta \rightarrow 0$, o impulso $\delta_\Delta(t)$ torna-se cada vez mais estreito e aumenta em altura, ao mesmo tempo que mantém a área unitária e também $u_\Delta(t)$ se aproxima de $u(t)$. Graficamente teremos então a representação:

Note-se que

$$\delta(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \delta_\Delta(t).$$

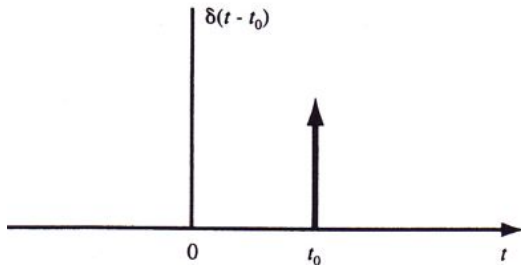
1.4.2 Representação do impulso unitário - caso contínuo

Convencionou-se representar $\delta(t)$ como uma seta em $t = 0$, com uma altura igual a 1, para indicar o facto de a área ser unitária:



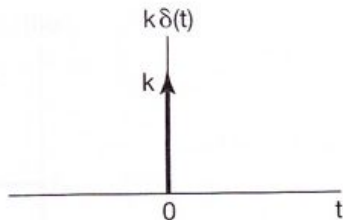
1.4.2 Impulso unitário centrado em $t = t_0$ (caso contínuo)

A representação gráfica para o impulso unitário translacionado e centrado em $t = t_0$, é:



Observação

Notemos que $k\delta(t)$ terá a altura k e área k :



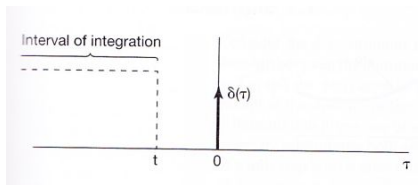
e

$$\int_{-\infty}^t k \delta(\tau) d\tau = k u(t).$$

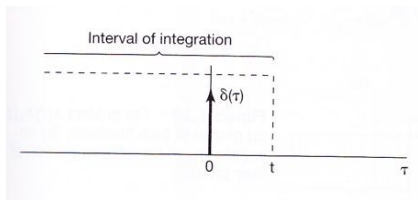
Interpretação gráfica de $u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$

Tal como no caso discreto, podemos visualizar uma interpretação gráfica da equação $u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$.

- Para $t < 0$



- Para $t > 0$

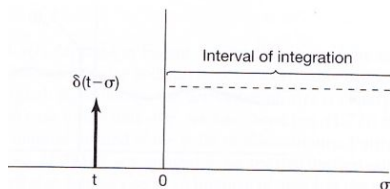


Observação

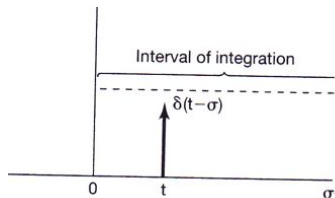
Consideremos $u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$. Efectuando uma mudança da variável de integração $\sigma = t - \tau$

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \int_{+\infty}^0 \delta(t - \sigma) d(t - \sigma) = \int_0^{+\infty} \delta(t - \sigma) d\sigma$$

Para $t < 0$



Para $t > 0$

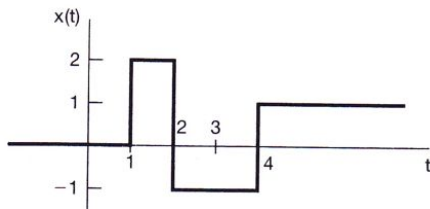


Outras propriedades

- 1 $x(t) \delta(t) = x(0) \delta(t)$ se $x(t)$ é contínua em $t = 0$ (já que $\delta(t)$ só não se anula em $t = 0$).
- 2 $x(t) \delta(t - t_0) = x(t_0) \delta(t - t_0)$ se $x(t)$ é contínua em $t = t_0$

Exemplo 1.7

Dado o sinal descontínuo $x(t)$



calcule e esboce a derivada do referido sinal

SISTEMAS e SINAIS

Conceitos básicos sobre sistemas

Maria do Carmo Martins

Fevereiro de 2012

§ 1.5 Sistemas em tempos contínuo e discreto

Num sentido amplo, um sistema é uma combinação de elementos que actuam em conjunto a fim de atingir um dado objectivo.

Aqui, um “sistema” será qualquer dispositivo físico com uma entrada (sinal) e uma saída (sinal), tais que, à entrada $x(t)$ corresponde a saída $y(t)$,

- no tempo contínuo

$$x(t) \rightarrow \boxed{\text{sistema em tempo contínuo}} \rightarrow y(t)$$

- no tempo discreto

$$x[n] \rightarrow \boxed{\text{sistema em tempo discreto}} \rightarrow y[n]$$

Sistemas simples - Exemplo 1.8

Consideremos um circuito RC. Sejam $v_s(t)$ o sinal de entrada e $v_c(t)$ o sinal de saída. Da análise deste circuito, sabemos que

$$-v_s(t) + v_R(t) + v_c(t) = 0 \quad (*)$$

onde $v_R(t) = R i(t)$ e $v_c(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau$, pelo que

$$\frac{dv_c(t)}{dt} = \frac{1}{C} i(t) \quad \Rightarrow \quad v_R(t) = RC \frac{dv_c(t)}{dt}.$$

Substituindo $V_R(t)$ na equação (*), tem-se

$$RC \frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t) = v_s(t) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{1}{RC} v_c(t) = \frac{1}{RC} v_s(t)$$

uma equação diferencial que nos dá a relação entre a entrada $v_s(t)$ e a saída $v_c(t)$.

Exemplo 1.9

Um carro propulsionado por uma força $f(t)$ e travado por um atrito $\rho v(t)$ devido à atmosfera, desloca-se a uma velocidade $v(t)$ que obedece à equação do movimento

$$m a = F$$

donde

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{1}{m} [f(t) - \rho v(t)].$$

Naturalmente que aqui consideramos o sinal de entrada como sendo a força $f(t)$ e o sinal de saída a velocidade $v(t)$. A equação diferencial acima pode ser escrita na forma canónica

$$\frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{m}\rho v(t) = \frac{1}{m}f(t),$$

que também é da forma geral $\frac{dy(t)}{dt} + a y(t) = b x(t)$. A função $y(t)$ será o sinal de saída e $x(t)$ o de entrada.

Exemplo 1.10

Consideremos a situação de uma conta bancária à ordem, com um juro mensal de 1%. Ora, se em cada mês n , a diferença entre depósitos e levantamentos for de $x[n]$, o saldo da conta $y[n]$ nesse mês será

$$\begin{aligned}y[n] &= y[n-1] + x[n] + 0,01y[n-1] \\ \Leftrightarrow y[n] &= 1,01y[n-1] + x[n] \\ \Leftrightarrow y[n] - 1,01y[n-1] &= x[n] \quad \text{forma canónica}\end{aligned}$$

Aqui a entrada do sistema será $x[n]$ e a saída $y[n]$.

Exemplo 1.11

A simulação numérica da derivada de uma função $v(t)$ pode ser feita através de um algoritmo.

$$\frac{dv(t)}{dt} \rightarrow \frac{v[n\Delta] - v[(n-1)\Delta]}{\Delta}$$

com $t \rightarrow n\Delta$, sendo Δ uma variação finita, pequena, da variável t .
Aplicando esta aproximação à equação diferencial do Exemplo 1.9

$$\frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{m}\rho v(t) = \frac{1}{m}f(t)$$

e fazendo $v[n\Delta] \equiv v[n]$, $f[n\Delta] \equiv f[n]$, tem-se

$$v[n] - \frac{m}{m + \rho\Delta}v[n-1] = \frac{\Delta}{m + \rho\Delta}f[n]$$

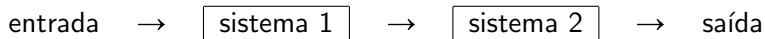
que também é da forma $y[n] + a y[n-1] = b x[n]$, aqui com $f[n]$ como sinal de entrada e $v[n]$ como sinal de saída.

1.5.2 Interconexões de sistemas

Muitos sistemas reais são construídos como interconexões de muitos subsistemas. A ideia fundamental é que com sistemas individuais, representados abaixo por blocos, constroem-se sistemas mais complexos, por associação.

Os tipos de associações fundamentais são:

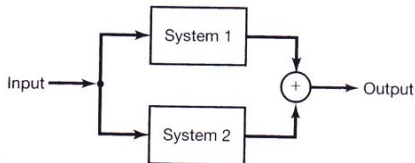
i) Em série ou em cascata



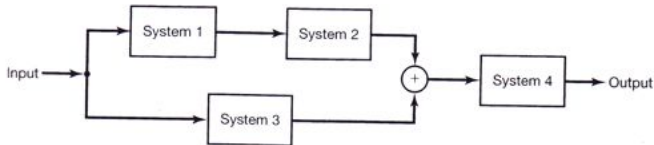
Note-se que a entrada do sistema 2 é a saída do sistema 1.

1.5.2 Interconexões de sistemas - continuação

ii) **Em paralelo**, com adição de saídas, e aplicação do mesmo sinal de entrada em dois sistemas.

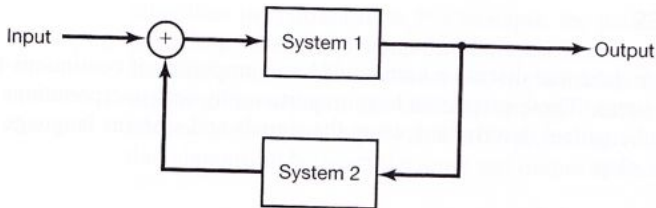


iii) **Mistos**



1.5.2 Interconexões de sistemas - continuação

iv) Com realimentação (feedback)



O sinal de saída do sistema global depende não só do sinal de entrada, mas também do próprio sinal de saída.

1.6 Propriedades básicas dos sistemas

Vamos agora apresentar algumas propriedades básicas de sistemas contínuos e discretos. Estas propriedades têm interpretações físicas importantes e descrições matemáticas relativamente simples usando uma linguagem de sistemas e sinais que desenvolvemos até agora.

1.6.1 Propriedades de sistemas: Memória

i) **Sistema sem memória:** a saída num dado tempo só depende da entrada nesse mesmo tempo.

Exemplo 1:

$$y[n] = (2x[n] - x^2[n])^2$$

Exemplo 2:

$$v_R(t) = R i(t)$$

Exemplo 3:

$$y[n] = x[n] \quad \text{ou} \quad y(t) = x(t)$$

1.6.1 Propriedades de sistemas: Memória - continuação

ii) **Sistema com memória:** a saída num dado tempo depende de valores da entrada em tempos anteriores ou posteriores.

Exemplo 1:

$$y[n] = x[n - 1]$$

Exemplo 2:

$$v_c(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_c(t) dt$$

a tensão aos terminais de um condensador dependerá de toda a “história” da corrente que o percorre.

Exemplo 3:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k] = \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k] + x[n] = y[n - 1] + x[n]$$

Também terão memória aqueles sistemas cuja saída, num dado instante, dependem da entrada em instantes posteriores, futuros.

Exemplo:

A saída $y[n]$ no instante n é a média dos $2M + 1$ valores da entrada

$$y[n] = \frac{1}{2M + 1} \sum_{k=-M}^M x[n - k]$$

1.6.2 Propriedades de sistemas: Invertibilidade

Sistema invertível: quando entradas diferentes levam a saídas diferentes.

$$x[n] \longrightarrow \boxed{S_1} \xrightarrow{y[n]} \boxed{S_1^{-1}} \longrightarrow w[n] = x[n]$$

Se um sistema é invertível, então existirá o sistema inverso correspondente, o qual em série com o sistema original, terá como saída a entrada do primeiro.

- Ao sistema que permite reproduzir a entrada do sistema original a partir da sua saída chama-se **sistema inverso**.

O problema da invertibilidade pode acontecer em sistemas de telecomunicações, onde um equalizador é utilizado para compensar as distorções do canal, funcionando como o inverso deste.

Exemplos de sistemas invertíveis

Exemplo 1:

$$y(t) = 2x(t) \quad \text{e} \quad w(t) = \frac{1}{2}y(t)$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{y(t) = 2x(t)} \xrightarrow{y(t)} \boxed{w(t) = \frac{1}{2}y(t)} \longrightarrow w(t) = x(t)$$

Exemplo 2: O acumulador

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k] \quad \text{e} \quad w[n] = y[n] - y[n-1] = x[n]$$

Exemplos de sistemas não invertíveis

① $y[n] = 0$

② $y(t) = x^2(t)$

1.6.3 Propriedades de sistemas: Causalidade

Sistema causal é aquele em que a saída, num dado instante de tempo, só depende da entrada nesse mesmo instante e de instantes anteriores.

- **Relação entre sistemas sem memória e sistemas causais**

Todos os sistemas sem memória são causais. Porquê?

Exemplos de sistemas causais

Exemplo 1: O sistema definido por

$$v_c(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_c(\tau) d\tau$$

é um sistema causal.

Exemplo 2: O automóvel em movimento atrás referido, visto que a velocidade $v(t)$ não poderá depender da força $f(t^*)$ para $t^* > t$.

Exemplo 3: Os sistemas

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k] \quad \text{e} \quad y[n] = x[n-1]$$

são sistemas causais.

Exemplos de sistemas não-causais

① $y[n] = x[n] - x[n + 1]$

② $y(t) = x(t + 1)$

Exemplo 1.12

Ao averiguar a causalidade de um sistema, é importante observar cuidadosamente a relação entrada/saída.

- 1 O sistema $y[n] = x[-n]$ é não causal, uma vez que para $n_0 < 0$, por exemplo, $n_0 = -4$ ter-se-ia $y[-4] = x[4]$.
- 2 Por outro lado, é necessário também distinguir o que é entrada do que é uma função qualquer (pré-definida) usada para definir o sistema, como no caso

$$y(t) = x(t) \underbrace{\cos(t+1)}_{g(t)}$$

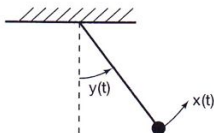
que é um sistema causal.

1.6.4 Propriedades de sistemas: Estabilidade

Um sistema é BIBO estável se e só se a todas as entradas limitadas correspondem saídas também limitadas. Ou seja, a saída do sistema não diverge se a entrada não divergir.

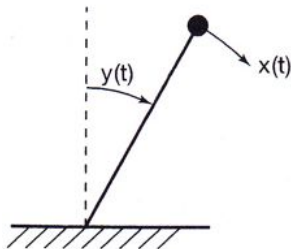
BIBO: bounded-input, bounded-output.

Exemplo 1: O pêndulo é estável.



1.6.4 Propriedades de sistemas: Estabilidade

Exemplo 2: O pêndulo invertido é instável (por mais pequena que seja a força $x(t)$, a variação do ângulo $y(t)$ será sempre grande).



1.6.4 Propriedades de sistemas: Estabilidade

Exemplo 3: O carro, com atrito, é um sistema estável

$$\frac{dv(t)}{dt} + \frac{\rho}{m}v(t) = \frac{1}{m}f(t).$$

De facto, como a força de atrito $\rho v(t)$ é proporcional à velocidade, um aumento da força aplicada $f(t)$ leva a um aumento da velocidade e também da força de atrito, até que as duas se igualam e o movimento passa a ser sem aceleração, isto é, com uma velocidade terminal v constante.

Em particular, se a força $f(t) = F = \text{Constante}$, esta velocidade terminal é dada por

$$\frac{dv}{dt} \rightarrow 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{\rho}{m}v = \frac{1}{m}F \quad \Rightarrow \quad v = \frac{1}{\rho}F$$

1.6.4 Propriedades de sistemas: Estabilidade

Exemplo 4: O sistema

$$y[n] = \frac{1}{2M+1} \sum_{k=-M}^M x[n-k]$$

é estável porque se $x[n]$ for limitada por um número qualquer $B > 0$, isto é, se

$$|x[n]| < B,$$

então também virá $|y[n]| \leq B$ e o sistema é estável.

1.6.4 Propriedades de sistemas: Estabilidade

Exemplo 5: O sistema

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$$

é instável. Efectivamente, podemos “encontrar” facilmente um $x[n]$ limitado, tal como $x[n] = u[n]$, o degrau unitário, e virá

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n u[k] = (1 + n)u[n].$$

Atendendo a que $u[n]$ é limitado (no máximo vale 1) e $y[n]$ não o é, concluímos que o sistema é instável.

No último exemplo, vimos um sistema instável onde essa instabilidade foi detectada alimentando o sistema com um sinal de entrada particularmente favorável, limitado, que foi neste caso, o degrau unitário.

Um dado sistema ou é estável ou é instável em si mesmo, independentemente do sinal de entrada e por vezes é fácil provar a instabilidade com um sinal de entrada (limitado) muito simples.

Outras vezes já não será fácil e teremos de usar métodos que não usem sinais de entrada particulares. Teremos, pois, de avançar para uma condição mais geral. O contraste entre estes dois métodos pode ser feito nos exemplos que se seguem.

Exemplo 1.13

i) O sistema

$$S_1 : y_1(t) = t x_1(t)$$

é instável, visto que um sinal de entrada limitado e particularmente simples como

$$x_1(t) = 1, \quad \forall t$$

leva a uma saída

$$y_1(t) = t \times 1 = t$$

a qual é ilimitada.

Exemplo 1.13

ii) Para o sistema S_2 : $y_2(t) = e^{x_2(t)}$, se escolhermos o mesmo sinal de entrada, limitado, $x_2(t) = 1$, o sinal de saída correspondente é:

$$y_2(t) = e^1 = e, \quad \text{que também é limitado.}$$

Mas será este teste suficiente para garantir a estabilidade?

Não, temos de avançar para uma condição mais geral. Como a questão é saber se uma entrada limitada pode conduzir a uma saída ilimitada, impomos um limite genérico a $x(t)$,

$$|x(t)| < B, \quad \text{com } B > 0 \quad \Leftrightarrow \quad -B < x(t) < B, \forall t$$

e então obtemos $e^{-B} < y_2(t) < e^B$ e, portanto, $y_2(t)$ também é limitado, sendo S_2 um sistema estável.

1.6.5 Propriedades de sistemas: Invariância temporal de um sistema

Um sistema é invariante no tempo se um atraso ou adiantamento temporal do sinal de entrada provoca um deslocamento temporal idêntico no sinal de saída.

Consequentemente, uma translação temporal no sinal de entrada levará à mesma translação temporal no sinal de saída:

$$\text{Se } x[n] \longrightarrow y[n] \quad \text{então} \quad x[n - n_0] \longrightarrow y[n - n_0]$$

$$\text{Se } x(t) \longrightarrow y(t) \quad \text{então} \quad x(t - t_0) \longrightarrow y(t - t_0)$$

Exemplo 1.14

Consideremos o sistema em tempo contínuo definido por

$$y(t) = \textit{sen}[x(t)].$$

Será este sistema invariante no tempo?

Exemplo 1.15

Considere o sistema

$$y[n] = n x[n].$$

Será este sistema invariante no tempo?

Exemplo 1.16

Considere o sistema

$$y(t) = x(2t).$$

Será este sistema invariante no tempo?

1.6.6 Propriedades de sistemas: Linearidade

Consiste no facto de que o sinal de saída correspondente a uma soma ponderada de sinais constituindo um sinal de entrada será igual à soma ponderada, com os mesmos pesos, dos sinais de saída para cada uma dessas entradas ponderadas separadamente.

Mais precisamente, sejam $y_1(t)$ a resposta de um sistema de tempo contínuo ao sinal de entrada $x_1(t)$ e $y_2(t)$ a resposta ao sinal de entrada $x_2(t)$. Então o sistema é linear se:

- 1 A resposta ao sinal $x_1(t) + x_2(t)$ é $y_1(t) + y_2(t)$ (Prop. da Aditividade)
- 2 A resposta ao sinal $a x_1(t)$ é $a y_1(t)$, com $a \in \mathbb{C}$ (Prop. da homogeneidade)

1.6.6 Propriedades de sistemas: Linearidade

As duas propriedades que definem um sistema linear podem ser combinadas numa única afirmação:

$$a x_1(t) + b x_2(t) \longrightarrow a y_1(t) + b y_2(t)$$

em tempo contínuo e

$$a x_1[n] + b x_2[n] \longrightarrow a y_1[n] + b y_2[n]$$

em tempo discreto.

Aqui, as constantes $a, b \in \mathbb{C}$, em geral.

1.6.6 Propriedades de sistemas: Linearidade

Da definição de linearidade resulta que, se

$$x_k[n], \quad k = 1, 2, 3 \dots$$

é um conjunto de entradas discretas de um sistema linear com correspondentes saídas

$$y_k[n], \quad k = 1, 2, 3 \dots,$$

então a resposta a uma combinação linear dessas entradas, dada por

$$x[n] = \sum_k a_k x[k] = a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n] + \dots$$

é

$$y[n] = \sum_k a_k y_k[n] = a_1 y_1[n] + a_2 y_2[n] + \dots.$$

Este facto é conhecido como **princípio da sobreposição**, o qual se verifica para sistemas lineares de tempo discreto e contínuo.

1.6.6 Propriedades de sistemas: Linearidade

Uma consequência directa do princípio da sobreposição é que, para sistemas lineares, uma entrada que seja nula corresponde a uma saída que também é nula. Por exemplo, se $x[n] \longrightarrow y[n]$, então pela propriedade da homogeneidade

$$0 = 0 \cdot x[n] \longrightarrow 0 = 0 \cdot y[n].$$

Exemplo 1.17

Considere um sistema S cujo sinal de entrada $x(t)$ e sinal de saída $y(t)$ estão relacionados por

$$y(t) = t x(t).$$

Verifique se o sistema é linear.

Exemplo 1.18

Considere um sistema S cujo sinal de entrada $x(t)$ e sinal de saída $y(t)$ estão relacionados por

$$y(t) = x^2(t).$$

Será o sistema linear?

Note-se que para verificar a linearidade de um sistema, este terá de satisfazer ambas as propriedades - aditividade e homogeneidade - e que o sinal, bem como as constantes envolvidas na homogeneidade, podem ser complexos.

Exemplo 1.19

Considere um sistema S cujo sinal de entrada $x[n]$ e sinal de saída $y[n]$ estão relacionados por

$$y[n] = \Re\{x[n]\}.$$

Será o sistema linear?

Exemplo 1.20

Considere um sistema S cujo sinal de entrada $x[n]$ e sinal de saída $y[n]$ estão relacionados por

$$y[n] = 2x[n] + 3.$$

Será o sistema linear?

SISTEMAS LINEARES INVARIANTES no TEMPO

SISTEMAS DISCRETOS. CONVOLUÇÃO DISCRETA. RESPOSTA ao IMPULSO

Maria do Carmo Martins

Fevereiro de 2012

Introdução

Neste capítulo iremos considerar somente **sistemas lineares, invariantes no tempo (SLITs)**, que são os mais importantes na prática, principalmente devido à propriedade de sobreposição já apresentada. Como consequência deste princípio, se pudermos representar um sinal de entrada de um SLIT como uma combinação linear de sinais básicos, podemos então calcular o sinal de saída do sistema em termos das respostas a estes sinais básicos.

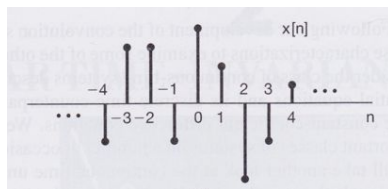
2.1 Sistemas discretos. Convolução discreta. Resposta ao impulso

Começamos por realçar a possibilidade de expressar um sinal qualquer discreto através da soma ponderada de impulsos discretos,

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \delta[n - k]$$

Exemplo 1

Consideremos o sinal $x[n]$:



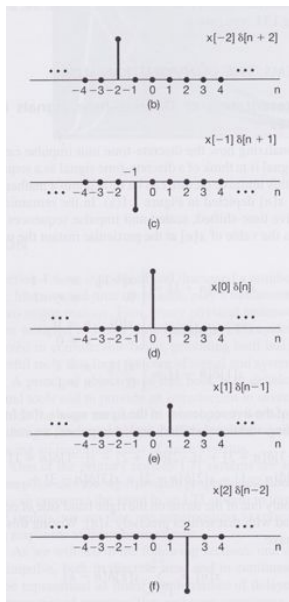
Notemos que:

$$x[-1] \delta[n+1] = \begin{cases} x[-1], & n = -1 \\ 0, & n \neq -1 \end{cases}$$

$$x[0] \delta[n] = \begin{cases} x[0], & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

$$x[1] \delta[n-1] = \begin{cases} x[1], & n = 1 \\ 0, & n \neq 1 \end{cases}$$

Exemplo - continuação



Exemplo - conclusão

Por conseguinte, a soma das cinco sequências na figura anterior é igual ao sinal $x[n]$, para $-2 \leq n \leq 2$. De um modo mais geral, podemos escrever

$$x[n] = \cdots + x[-3]\delta[n+3] + x[-2]\delta[n+2] + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + \\ + x[1]\delta[n-1] + x[2]\delta[n-2] + x[3]\delta[n-3] + \cdots$$

Para qualquer valor de n , apenas um dos termos no segundo membro da equação anterior é não nulo. Podemos, então, escrever a soma anterior na forma

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \delta[n-k]$$

A equação

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \delta[n - k] \quad (1)$$

corresponde à representação de uma sequência arbitrária como uma combinação linear de impulsos unitários deslocados $\delta[n - k]$, onde os pesos nesta combinação linear são $x[k]$.

A equação (1) é chamada **propriedade da filtragem** do impulso unitário em tempo discreto.

2.1 Sistemas discretos. Convolução discreta. Resposta ao impulso

Suponhamos agora um **sistema linear** tal que a saída para um sinal impulso unitário centrado em $n = k$ é conhecida e vale $h_k[n]$, isto é,

$$x[n] = \delta[n - k] \longrightarrow \boxed{\text{sistema linear}} \longrightarrow y[n] = h_k[n].$$

Sendo o sistema linear é válido o princípio da sobreposição linear e, multiplicando por um número qualquer $x[k]$, vem

$$x[k] \delta[n - k] \longrightarrow \boxed{\text{sistema linear}} \longrightarrow x[k] h_k[n]$$

e combinando linearmente infinitos sinais de entrada deste tipo vem

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \delta[n-k] \longrightarrow \boxed{\text{Sist. linear}} \longrightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] h_k[n]$$

De acordo com a equação

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] h_k[n]$$

se soubermos a resposta de um sistema linear a um conjunto de impulsos unitários deslocados, podemos **construir** a resposta de uma entrada arbitrária.

2.1 Continuação

Se o sistema, além de linear, for **invariante no tempo**, então a resposta a um impulso desviado no tempo à entrada será igual à resposta do impulso original (não desviado) mas igualmente desviada no tempo.

Assim, se $h[n]$ for a resposta ao impulso unitário $\delta[n]$, então $h[n - k]$ será a resposta ao impulso unitário desviado $\delta[n - k]$. Consequentemente, para **sistemas lineares e invariantes no tempo** tem-se

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] h[n - k]$$

a chamada **fórmula de convolução discreta**. O segundo membro da igualdade anterior chama-se **convolução das sequências** $x[n]$ e $h[n]$.

2.1 Continuação

Em geral, iremos representar a operação de convolução simbolicamente por

$$x[n] * h[n] = y[n].$$

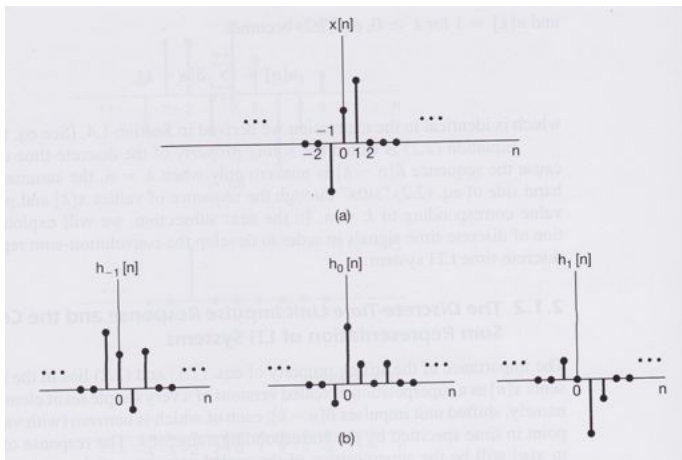
Em suma

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \delta[n-k] \longrightarrow \boxed{\text{SLIT}} \longrightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] h[n-k]$$

- Um SLIT é completamente caracterizado pela sua resposta ao impulso unitário.

Exemplo de ilustração

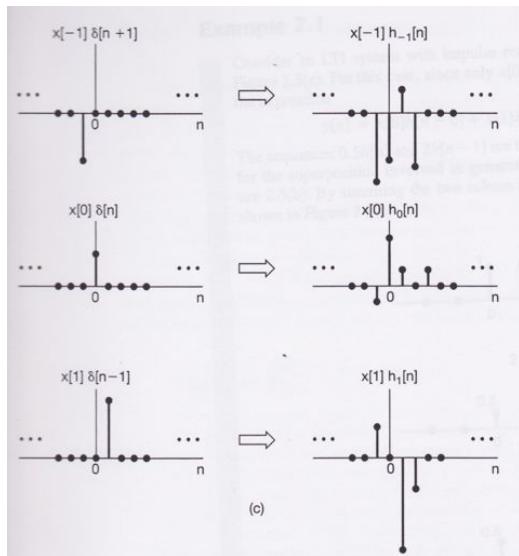
O sinal $x[n]$ é aplicado como uma entrada de uma sistema linear cujas respostas $h_{-1}[n]$; $h_0[n]$ e $h_1[n]$ aos sinais $\delta[n+1]$; $\delta[n]$ e $\delta[n-1]$ estão ilustradas nas figuras:



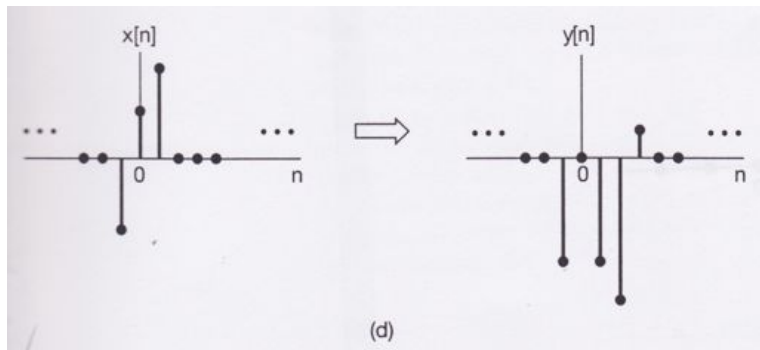
Exemplo de ilustração - continuação

Uma vez que $x[n]$ pode ser escrito como uma combinação linear de $\delta[n+1]$, $\delta[n]$ e $\delta[n-1]$, o princípio da sobreposição permite-nos escrever a resposta a $x[n]$ como uma combinação linear das respostas individuais aos impulsos deslocados.

Exemplo de ilustração - continuação



Exemplo de ilustração - conclusão



Exemplo 2.1

Consideremos um SLIT tal que a resposta ao impulso $\delta[n]$ é

$$h[n] = \begin{cases} 1, & n = 0, 1, 2 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

e seja $x[n]$ o sinal de entrada dado por

$$x[n] = x[0] \delta[n - 0] + x[1] \delta[n - 1]$$

onde

$$x[n] = \begin{cases} 0.5, & n = 0 \\ 2, & n = 1 \\ 0, & \text{o.c.} \end{cases}$$

Escreva, justificando, a expressão da resposta a $x[n]$.

Exemplo 2.2

Outra forma de resolver o exercício anterior.

Exemplo 2.3

Sejam o sinal de entrada, $x[n]$, e a resposta ao impulso unitário, $h[n]$, definidos por

$$x[n] = \alpha^n u[n], \quad \text{com } 0 < \alpha < 1$$

e

$$h[n] = u[n].$$

Determine a resposta $y[n]$.

Exemplo 2.4

Consideremos as duas seqüências

$$x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 4 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

e

$$h[n] = \begin{cases} \alpha^n, & 0 \leq n \leq 6 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}, \quad \text{com } \alpha > 1$$

Determine a resposta $y[n]$.

Exemplo 2.5

Considere um SLIT com sinal de entrada $x[n]$ e resposta $h[n]$ ao impulso unitário definidos por

$$x[n] = 2^n u[-n]$$

e

$$h[n] = u[n].$$

Determine a resposta $y[n]$.

§ 2.2 Sistemas contínuos. Convolução contínua. Resposta ao impulso

No caso contínuo, o argumento básico é o mesmo do utilizado nos sistemas discretos: sendo sistemas lineares, e podendo representar-se qualquer sinal de entrada por uma sobreposição de impulsos unitários, o conhecimento da resposta do sistema linear a um impulso unitário leva, por sobreposição, ao conhecimento da resposta a qualquer sinal de entrada.

Começamos pela representação de um sinal qualquer de entrada em termos de impulsos unitários, à semelhança do que foi feito para o caso discreto.

2.2. Continuação

Baseados em conceitos básicos do cálculo diferencial e integral, passamos directamente para os resultados do caso contínuo, partindo dos correspondentes resultados do caso discreto. Assim,

caso discreto

$$\delta[n - k]$$

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n - k]$$

$$u[n] = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta[n - k]$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n - k]$$

caso contínuo

$$\delta(t - \tau)$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau$$

$$u(t) = \int_0^{+\infty} \delta(t - \tau)d\tau$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

2.2. Continuação

A equação

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

- é conhecida por **integral de convolução**;
- A convolução de dois sinais $x(t)$ e $h(t)$ será representada por $x(t) * h(t)$.

Este integral representará, por sobreposição, a resposta do SLIT ao sinal de entrada $x(t)$, dada a sua resposta $h(t)$ ao impulso unitário $\delta(t)$, sendo necessário que o sistema seja temporalmente invariante para que a resposta a $\delta(t - \tau)$ seja $h(t - \tau)$.

Exemplo 2.6

Seja $x(t)$ um sinal de entrada de um SLIT com resposta $h(t)$ ao impulso unitário, sendo

$$x(t) = e^{-at} u(t), \quad a > 0$$

e

$$h(t) = u(t).$$

Determine a resposta a $x(t)$.

Exemplo 2.7

Seja $x(t)$ um sinal de entrada de um SLIT com resposta $h(t)$ ao impulso unitário, sendo

$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < T \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

e

$$h(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < 2T \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Determine a resposta a $x(t)$.

Exemplo 2.8

Seja $x(t)$ um sinal de entrada de um SLIT com resposta $h(t)$ ao impulso unitário, sendo

$$x(t) = e^{2t} u(-t)$$

e

$$h(t) = u(t - 3).$$

Determine a resposta a $x(t)$.

§ 2.3 Propriedades dos SLITs e suas relações com a convolução e a resposta ao impulso

Já sabemos que um SLIT é completamente caracterizado pela sua resposta ao impulso unitário, sendo:

- Para sistemas discretos

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] h[n-k] \equiv x[n] * h[n]$$

- Para sistemas contínuos

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau \equiv x(t) * h(t)$$

onde $h[n]$ e $h(t)$ são as respostas ao impulso unitário, no caso discreto e no caso contínuo, respectivamente, enquanto que $x[n]$ e $x(t)$ são os sinais de entrada.

Exemplo 2.9

Convém salientar que só os SLITs são completamente caracterizados pela resposta ao impulso unitário.

Vejamos o seguinte exemplo:

- Consideremos um sistema de tempo discreto com resposta $h[n]$ ao impulso unitário definida por

$$h[n] = \begin{cases} 1, & n = 0, 1 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

e analisemos as situações em que o sistema é linear e invariante no tempo e quando o sistema não é linear.

1. Propriedade comutativa

a) Para SLITs tempo discreto

$$\begin{aligned} y[n] &= x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] h[n-k] = \\ &= h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] x[n-k] \end{aligned}$$

b) Para SLITs tempo contínuo

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau = \\ &= h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau \end{aligned}$$

2. Propriedade distributiva

a) Para SLITs em tempo discreto

$$y[n] = x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]$$

b) Para SLITs em tempo contínuo

$$y(t) = x(t) * (h_1(t) + h_2(t)) = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$$

Observação

Em consequência das propriedades comutativa e distributiva teremos a “distributividade à esquerda” para os sinais de entrada:

a) Para SLITs em tempo discreto

$$(x_1[n] + x_2[n]) * h[n] = x_1[n] * h[n] + x_2[n] * h[n]$$

b) Para SLITs em tempo contínuo

$$(x_1(t) + x_2(t)) * h(t) = x_1(t) * h(t) + x_2(t) * h(t)$$

Exemplo 2.10

- O exemplo que se segue mostra que a propriedade distributiva da convolução pode servir para decompor uma convolução complicada noutras mais simples:

Seja $y[n]$ a convolução das seguintes sequências:

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + 2^n u[-n]$$

e

$$h[n] = u[n].$$

Determine $y[n]$.

3. Propriedade associativa

a) Para SLITs em tempo discreto

$$x[n] * (h_1[n] * h_2[n]) = (x[n] * h_1[n]) * h_2[n]$$

b) Para SLITs em tempo contínuo

$$x(t) * [h_1(t) * h_2(t)] = [x(t) * h_1(t)] * h_2(t)$$

Observação

Em consequência da propriedade associativa, os parêntesis são dispensáveis, podendo-se escrever:

a) Para SLITs em tempo discreto

$$y[n] = x[n] * h_1[n] * h_2[n]$$

b) Para SLITs em tempo contínuo

$$y(t) = x(t) * h_1(t) * h_2(t)$$

4. SLITs com e sem memória

Como sabemos, um sistema diz-se **sem memória** se a saída em qualquer dos instantes (n ou t) só depender do valor do sinal de entrada nesse instante. Ora, para SLITs, da equação

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] h[n-k] = x[n] * h[n]$$

concluimos que, para **sistemas sem memória**, para os quais $y[n]$ só pode depender de $x[n]$, deverá ter-se

$$h[n] = 0, \quad \text{para } n \neq 0.$$

Neste caso, a resposta ao impulso tem a forma $h[n] = K \delta[n]$, onde $K = h[0]$ é uma constante e a soma convolução reduz-se a

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] K \delta[n-k] = x[n] K = K x[n]$$

Observação

Contrariamente, se $h[n] \neq K\delta[n]$, então o SLIT terá memória, como no exemplo 2.9, onde

$$h[n] = \begin{cases} 1, & n = 0, 1 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

4. SLITs com e sem memória - continuação

De forma semelhante, podemos deduzir propriedades para sistemas em tempo contínuo com ou sem memória. Em particular, um **SLIT** **será sem memória** se $h(t) = 0$ para $t \neq 0$ e para tal sistema tem-se

$$y(t) = K x(t)$$

para alguma constante K e tem resposta ao impulso unitário

$$h(t) = K \delta(t).$$

- O **SLIT** **será com memória** se $h(t) \neq K \delta(t)$.

Observação

Se, em particular, nas expressões $h(t) = K \delta(t)$ e $h[n] = K \delta[n]$, considerarmos $K = 1$, então

- $$y[n] = x[n] * \delta[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \delta[n - k] = x[n].$$

- $$y(t) = x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = x(t).$$

e os sinais de saída são idênticos aos sinais de entrada (neste caso, os sistemas anteriores são os sistemas identidade).

5. SLITs invertíveis

Como já foi referido, para um SLIT invertível existirá um SLIT inverso tal que

$$\xrightarrow{x(t)} \boxed{h(t)} \xrightarrow{y(t)} \boxed{h_1(t)} \xrightarrow{x(t)}$$

Se a resposta ao impulso unitário do SLIT for $h(t)$, então a do SLIT^{-1} será $h_1(t)$ tal que

$$h(t) * h_1(t) = \delta(t).$$

$$x(t) \longrightarrow \begin{array}{|c|} \hline \text{Sistema identidade} \\ \hline \delta(t) \\ \hline \end{array} \longrightarrow x(t)$$

- Para tempos discretos será $h[n] * h_1[n] = \delta[n]$.

Exemplo 2.11

Considere o SLIT com entrada $x(t)$, saída $y(t)$, sendo

$$y(t) = x(t - t_0).$$

Averigue se se trata de um sistema com ou sem memória.

Exemplo 2.12

Considere o SLIT com resposta $h[n] = u[n]$ ao impulso unitário. Será este sistema invertível? Em caso afirmativo, determine o sistema inverso.

6. Causalidade

Se um **sistema é causal**, então o sinal de saída só poderá depender, para cada instante de tempo (t ou n) dos valores do sinal de entrada nesse mesmo instante ou em instantes anteriores.

Assim, para um sistema em tempo discreto, a causalidade implica que $y[n]$ não poderá depender de $x[k]$ para $k > n$. Ora, como

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] h[n-k], \quad \text{para SLIT,}$$

concluimos que terá de ser $h[n-k] = 0$ para $k > n$, ou seja

$$\text{causalidade em SLITs} \Rightarrow h[n] = 0 \text{ para } n < 0.$$

6. Causalidade - continuação

Tem-se então para **SLITs causais**

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k] h[n-k].$$

Aplicando a propriedade comutativa, tem-se

$$\begin{aligned} y[n] = x[n] * h[n]|_{k < n} &= \sum_{k=-\infty}^n x[k] h[n-k] = \sum_{\ell=-\infty}^0 x[n-\ell] h[\ell] = \\ &= \sum_{\ell=0}^{+\infty} h[\ell] x[n-\ell] \equiv \sum_{k=0}^{+\infty} h[k] x[n-k] = y[n], \end{aligned}$$

ou seja,

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k] h[n-k] = \sum_{k=0}^{+\infty} h[k] x[n-k]$$

para SLITs, em tempo discreto.

6. Causalidade - continuação

Para sistemas em tempo contínuo, virá $h(t) = 0$, para $t < 0$, e portanto de

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

tem-se

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) h(t - \tau) d\tau.$$

Efectuando uma mudança de variável, $\sigma = t - \tau$, vem

$$y(t) = \int_{+\infty}^0 x(t - \sigma) h(\sigma) (-d\sigma) = \int_0^{+\infty} h(\sigma) x(t - \sigma) d\sigma$$

para SLITs causais, em tempo contínuo.

7. Estabilidade

Num **sistema estável** qualquer entrada limitada produz uma saída também limitada. Ora, uma entrada é limitada se,

$$|x[n]| < B, \quad \forall n \quad (\text{com } B \in \mathbb{R}^+).$$

Para a respectiva saída, temos

$$\begin{aligned} |y[n]| &= \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] h[n-k] \right| = \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] x[n-k] \right| \leq \\ &\leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| |x[n-k]| < \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| B = B \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]|. \end{aligned}$$

Então $|y[n]|$ será limitado sse $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| < \infty$ (isto é, se a resposta ao impulso é absolutamente somável) e daqui o SLIT será estável.

7. Estabilidade - Continuação

Para tempo contínuo, sendo $|x(t)| < B$, para todo o t , tem-se

$$\begin{aligned} |y(t)| &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \right| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau \right| \leq \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| |x(t - \tau)| d\tau < \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| B d\tau = \\ &= B \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| d\tau \end{aligned}$$

pelo que $|y(t)|$ será limitado e o sistema será estável sse

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty,$$

ou seja se $h(t)$ for absolutamente integrável.

Exemplo 2.13

Verifique se é estável o sistema definido por:

- a) um desvio temporal em tempo discreto;
- b) um desvio temporal em tempo contínuo;
- c) um acumulador em tempo discreto;
- d) um integrador.

8. Resposta de um SLIT ao degrau unitário ou escalão - Introdução

Para além da caracterização de um SLIT pela sua resposta $h[n]$ (ou $h(t)$) ao impulso unitário $\delta[n]$ (ou $\delta(t)$), também é útil caracterizar um SLIT pela sua resposta $s[n]$ (ou $s(t)$) ao degrau unitário $u[n]$ (ou $u(t)$).

8. Resposta de um SLIT ao degrau unitário

- Em tempo discreto, qual é a relação existente entre $s[n]$ e $h[n]$?

Ora, a partir da representação da convolução discreta,

$$y[n] = x[n] * h[n],$$

e em particular,

$$s[n] = u[n] * h[n] = h[n] * u[n] \quad (\text{comutatividade}),$$

por conseguinte, $s[n]$ também é a resposta à entrada $h[n]$ de um SLIT cuja resposta ao impulso unitário é o escalão $u[n]$.

No Exemplo 2.12, vimos que $u[n]$ é a resposta ao impulso unitário do acumulador, e portanto a saída correspondente à entrada $x[n] = h[n]$ será

$$s[n] = \sum_{k=-\infty}^n h[k].$$

8. Resposta de um SLIT ao degrau unitário - Continuação

Então,

$$s[n-1] = \sum_{k=-\infty}^{n-1} h[k],$$

pelo que

$$s[n] - s[n-1] = \sum_{k=-\infty}^n h[k] - \sum_{k=-\infty}^{n-1} h[k] = h[n].$$

Concluimos que, sabendo a resposta $h[n]$ ao impulso unitário, também sabemos a resposta $s[n]$ ao escalão:

$$s[n] = \sum_{k=-\infty}^n h[k],$$

e, inversamente, sabendo a resposta $s[n]$ ao escalão, também sabemos $h[n]$, a resposta ao impulso unitário,

$$h[n] = s[n] - s[n-1].$$

8. Resposta de um SLIT ao degrau unitário - Continuação

De forma semelhante, em **tempo contínuo**,

$$s(t) = u(t) * h(t) = h(t) * u(t) \quad (\text{integrador}).$$

Mas então, $s(t)$ é a resposta deste integrador à entrada $h(t)$, ou seja,

$$s(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau.$$

Consequentemente, também para sistemas contínuos, conhecendo $h(t)$ fica-se a saber $s(t)$ e inversamente, já que

$$\frac{d s(t)}{dt} = s'(t) = h(t),$$

por derivação directa.

2.4 Representação de SLITs por equações diferenciais e equações às diferenças

Os sistemas de tempo contínuo que podem ser descritos por equações diferenciais ordinárias (EDO's) e os sistemas de tempo discreto que podem ser descritos por equações às diferenças são particularmente importantes na prática. No capítulo anterior contemplaram-se alguns exemplos.

Iremos considerar, em ambos os casos, equações de coeficientes constantes. Começamos pelo caso contínuo.

1. Equações diferenciais lineares de coeficientes constantes

Já vimos um exemplo de um fenómeno descrito por uma EDO de coeficientes constantes,

$$m \frac{dv(t)}{dt} = f(t) - \rho v(t)$$

para a velocidade $v(t)$ de um carro sujeito a uma força aplicada $f(t)$ e uma força de atrito $\rho v(t)$. Esta equação é da forma geral

$$\frac{d y(t)}{dt} + a y(t) = b x(t)$$

a qual estabelece uma dependência implícita entre o sinal de entrada $x(t)$ e o sinal de saída $y(t)$.

Para termos a relação explícita entre $x(t)$ e $y(t)$ é necessário resolver aquela EDO e impôr condições iniciais (aqui só uma), ou em geral, algumas condições auxiliares.

Exemplo 2.14

Considere a EDO

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2 y(t) = x(t),$$

com o sinal de entrada

$$x(t) = K e^{3t} u(t), \quad K \in \mathbb{R}.$$

Determine $y(t)$.

Generalização

O caso deste exemplo é generalizável para sistemas representados por EDO's de ordem superior, da forma

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}.$$

- Se $N = 0$, tem-se

$$y(t) = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

e a saída $y(t)$ é uma função explícita da entrada $x(t)$, já não necessitando de condições auxiliares.

Generalização - continuação

- Para $N \geq 1$ em geral, iremos supôr que as condições auxiliares traduzem o repouso do sistema até um instante inicial $t = t_0$ de forma que

$$y(t_0) = \frac{dy(t_0)}{dt} = \dots = \frac{d^{N-1}y(t_0)}{dt} = 0$$

(em geral fazemos $t_0 = 0$). O SLIT será assim causal.

2. Equações às diferenças lineares e de coeficientes constantes

Para tempos discretos, a equação às diferenças que corresponde àquela EDO de ordem N será

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

cuja solução geral $y[n]$ será também dada pela soma da solução geral $y_h[n]$ da equação homogénea, com uma solução particular $y_p[n]$ da equação não homogénea, isto é:

$$y[n] = y_h[n] + y_p[n].$$

2. Equações às diferenças lineares e de coeficientes constantes - continuação

- Relativamente à equação homogénea:

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = 0,$$

a sua solução $y_h[n]$ será a resposta do sistema em “regime livre”.
As condições auxiliares continuam a ser, em geral, a do repouso inicial:

$$x[n] = 0, \quad n < n_0 \quad \longrightarrow \quad y[n] = 0, \quad n < n_0$$

de forma que o sistema será um SLIT e causal.

2. - Continuação

Uma maneira de resolver aquelas equações às diferenças é semelhante à da resolução de EDO's, mas vamos considerar aqui uma resolução recursiva, escrevendo

$$a_0 y[n - 0] + \sum_{k=1}^N a_k y[n - k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n - k] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y[n] = \frac{1}{a_0} \left(\sum_{k=0}^M b_k x[n - k] - \sum_{k=1}^N a_k y[n - k] \right)$$

uma relação recursiva que torna evidente que o conhecimento de

$y[n - 1], y[n - 2], \dots, y[n - N]$ - as condições auxiliares -

permitirá obter $y[n]$. Claro que a_k, b_k e $x[n]$ são dados!

2. - Continuação

Mais precisamente, podemos começar por calcular $y[0]$ a partir do conhecimento de $y[-N]$, $y[-N + 1]$, \dots , $y[-1]$ e a partir destes e de $y[0]$, determinar $y[1]$, e assim sucessivamente.

- Se $N = 0$, a equação simplifica consideravelmente

$$y[n] = \frac{1}{a_0} \sum_{k=0}^M b_k x[n - k] = \sum_{k=0}^M \left(\frac{b_k}{a_0} \right) x[n - k]$$

que já não é recursiva, mas sim explícita, sem necessitar de condições auxiliares.

2. - Continuação

Na realidade, será fácil calcular $h[n]$ para o sistema acima representado, quando $N = 0$. De facto,

$$y[n] = \sum_{k=0}^M \left(\frac{b_k}{a_0} \right) x[n-k] \longrightarrow h[n] = \sum_{k=0}^M \frac{b_k}{a_0} \delta[n-k]$$

$$\Rightarrow h[n] = \begin{cases} \frac{b_n}{a_0}, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

que é uma resposta (ao impulso unitário) de duração finita. Diz-se que este é um sistema de resposta finita ao impulso.

Exemplo 2.15

Considere a equação às diferenças

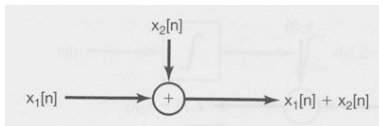
$$y[n] - \frac{1}{2} y[n-1] = x[n].$$

Determine a resposta ao impulso unitário.

3. Representação, por diagramas de blocos, de sistemas descritos por equações diferenciais e equações às diferenças, de 1ª ordem

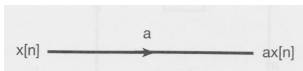
É extremamente útil representar SLITs por diagramas de blocos, até com vista à sua implementação em hardware. Aqui vamos tratar somente de SLIT's descritos por equações de 1ª ordem, começando por definir **elementos básicos dos diagramas** para o caso do tempo discreto:

i) somador

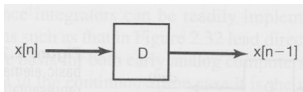


3. Representação, por diagramas de blocos, de sistemas descritos por equações diferenciais e equações às diferenças, de 1ª ordem - continuação

ii) multiplicador por um coeficiente a



iii) atraso unitário

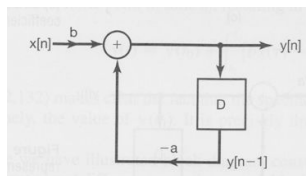


3. - Continuação

Seja, por exemplo, o sistema

$$y[n] + a y[n-1] = b x[n] \quad \Leftrightarrow \quad y[n] = -a y[n-1] + b x[n].$$

Este sistema será representável pelo diagrama de blocos

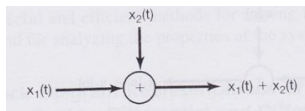


Note-se que para esta “máquina” começar a funcionar - recursivamente, através da realimentação - será necessário que o bloco do atraso unitário comece por conter, em memória, um valor inicial para $y[n]$, que será zero para a situação de repouso inicial.

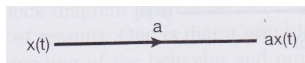
3. - Continuação

Para sistemas em tempo contínuo, os elementos básicos dos diagramas são:

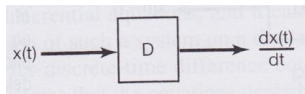
i) somador



ii) multiplicador por um coeficiente a



iii) diferenciador

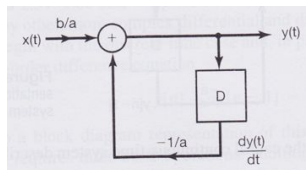


3. - Continuação

Seja, por exemplo, o sistema dado pela EDO

$$\frac{d y(t)}{dt} + a y(t) = b x(t) \quad \Leftrightarrow \quad y(t) = -\frac{1}{a} \frac{d y(t)}{dt} + \frac{b}{a} x(t)$$

O diagrama de blocos é:



Na prática, os diferenciadores são pouco úteis devido à sua pequena precisão e sensibilidade ao ruído, sendo preferidos os integradores.

REPRESENTAÇÃO em SÉRIE de FOURIER

Maria do Carmo Martins

Março de 2012

Revisão de alguns resultados do capítulo anterior

i) Tempo discreto

a) Representação de um sinal $x[n]$ como sobreposição linear de funções de base, impulsos unitários:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \delta[n - k].$$

b) Representação de um sinal de saída $y[n]$ como sobreposição linear de funções de resposta do SLIT, ao impulso unitário:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] h[n - k] = x[n] * h[n]$$

Revisão de alguns resultados do capítulo anterior

ii) Tempo contínuo

a) Representação de um sinal $x(t)$ como sobreposição linear de funções de base, impulsos unitários:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau.$$

b) Representação de um sinal de saída $y(t)$ como sobreposição linear de funções de resposta do SLIT, ao impulso unitário:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau = x(t) * h(t)$$

Em qualquer um dos casos temos sinais básicos (aqui impulsos unitários) com os quais podemos exprimir um sinal qualquer ($x[n]$, $x(t)$), bem como outros sinais básicos ($h[n]$, $h(t)$) de resposta dos sistemas àqueles primeiros sinais básicos.

Resposta de SLITs a exponenciais

Assim, os sinais básicos que se deverão usar como base para exprimir sinais genéricos devem possuir as seguintes propriedades:

- 1 O conjunto de sinais básicos será capaz de permitir a construção de uma vasta família de sinais úteis.
- 2 A resposta de um SLIT a cada um dos sinais básicos deve ser suficientemente simples para permitir uma representação da resposta do SLIT a qualquer outro sinal genérico construído como uma combinação linear dos sinais básicos.

Ora, na análise de Fourier, os sinais básicos que usamos são **exponenciais complexas** da forma e^{st} para tempos contínuos e da forma z^n para tempos discreto, com s e z números complexos.

Resposta de SLITs a exponenciais - continuação

No sentido de motivar para a análise de Fourier, vamos começar pela propriedade 2.

- **Propriedade 2 para exponenciais** e^{st} e z^n

O facto crucial é que a resposta de um SLIT a um sinal de entrada exponencial, e^{st} e z^n , é a mesma exponencial multiplicada por uma função característica do sistema (a função de transferência), de modo que

$$\begin{array}{ccc} e^{st} & \xrightarrow{\quad} \boxed{\text{SLIT}} & \longrightarrow H(s) e^{st} \\ z^n & \xrightarrow{\quad} \boxed{\text{SLIT}} & \longrightarrow H(z) z^n \end{array}$$

onde $H(z)$ e $H(s)$ são, em geral, funções complexas de variável complexa z ou s .

Resposta de SLITs a exponenciais - continuação

Diz-se que e^{st} e z^n são **funções próprias** do SLIT, com **valores próprios** $H(s)$ e $H(z)$, respectivamente. De facto, atendendo a que

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau = x(t) * h(t) = \\ &= h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau \end{aligned}$$

fazendo $x(t) = e^{st}$, tem-se

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{s(t-\tau)} d\tau = e^{st} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau = H(s) e^{st},$$

com $H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau$ (convergente, por hipótese).

Resposta de SLITs a exponenciais - continuação

Ou seja, como o sinal de saída

$$y(t) = H(s) e^{st}$$

é igual ao produto do sinal de entrada $x(t)$ por uma função $H(s)$ independente do tempo, concluimos que

$$x(t) = e^{st}$$

é uma **função própria** de qualquer SLIT, com **valor próprio** $H(s)$.

Resposta de SLITs a exponenciais - continuação

- Para tempo discreto:

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] h[n-k] = x[n] * h[n] = \\ &= h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] x[n-k]. \end{aligned}$$

Fazendo $x[n] = z^n$, tem-se

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] z^{n-k} = z^n \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] z^{-k} = H(z) z^n,$$

com $H(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] z^{-k}.$

Resposta de SLITs a exponenciais - continuação

Consequentemente, as exponenciais complexas z^n para SLITs em tempo discreto são **funções próprias** destes sistemas, com **valores próprios** $H(z)$ independentes do tempo n .

Além disso, como os SLITs são lineares, se um sinal de entrada for da forma

$$x(t) = a_1 e^{s_1 t} + a_2 e^{s_2 t} + a_3 e^{s_3 t}$$

em que

$$a_i e^{s_i t} \longrightarrow a_i H(s_i) e^{s_i t}, \quad i = 1, 2, 3$$

então, por sobreposição linear em SLITs, sabemos que

$$y(t) = a_1 H(s_1) e^{s_1 t} + a_2 H(s_2) e^{s_2 t} + a_3 H(s_3) e^{s_3 t}.$$

Generalização para tempo contínuo e tempo discreto

- **Para tempo contínuo:** Se $x(t) = \sum_k a_k e^{s_k t}$ então

$$y(t) = \sum_k a_k H(s_k) e^{s_k t}$$

- **Para tempo discreto:** Se $x[n] = \sum_k a_k z_k^n$ então

$$y[n] = \sum_k a_k H(z_k) z_k^n$$

Para SLITs, se o sinal de entrada é uma combinação linear de exponenciais complexas, então o sinal de saída também será uma combinação linear das mesmas exponenciais, multiplicadas pelas mesmas constantes a_k e ainda pelas respectivas funções de transferência, $H(s_k)$ e $H(z_k)$, para tempos contínuo e discreto, respectivamente.

Exemplo 3.1

Considere um SLIT tal que

$$y(t) = x(t - 3)$$

Determine $y(t)$ e $H(s)$ para os sinais de entrada:

a) $x(t) = e^{j2t}$.

b) $x(t) = \cos(4t) + \cos(7t)$.

Representação em série de Fourier de sinais periódicos em tempo contínuo

1) Combinação linear de exponenciais complexas harmónicas

Vimos que:

- um sinal $x(t)$ é periódico se existir pelo menos um $T > 0$ tal que

$$x(t) = x(t + T), \quad \forall t.$$

- O período fundamental de $x(t)$ é o menor valor possível, não nulo, de T .
- A frequência (angular) fundamental $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$.

1) Combinação linear de exponenciais complexas harmónicas - continuação

- Como exemplos de sinais periódicos, tem-se

$$x(t) = \cos(\omega_0 t), \quad x(t) = e^{j\omega_0 t}$$

Associado ao sinal exponencial há um conjunto de funções

$$\phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t} = e^{jk\left(\frac{2\pi}{T}\right)t}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

que constituem uma família de sinais harmónicos entre si, por definição. A frequência de cada um será um múltiplo inteiro da frequência fundamental ω_0 , e o período mínimo de cada um será uma fracção inteira do período T . Por outro lado, T será período de todos eles.

1) Combinação linear de exponenciais complexas harmónicas - continuação

Pretende-se exprimir um sinal genérico $x(t)$ como uma combinação linear de exponenciais complexas harmónicas, na forma de uma **série de Fourier**,

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\left(\frac{2\pi}{T}\right)t}.$$

Novamente, T será o período de $x(t)$, inclusivamente para o termo constante com $k = 0$.

- Os termos com $k = +1$ e $k = -1$ constituem as **primeiras componentes harmónicas ou harmónicas fundamentais**.
- Os termos com $k = +N$ e $k = -N$ serão as **harmónicas de N -ésima ordem**.

Exemplo 3.2

Considere o sinal periódico

$$x(t) = \sum_{k=-3}^{+3} a_k e^{jk2\pi t}$$

(com frequência fundamental 2π e, portanto, com período fundamental $T = 1$) onde

$$a_0 = 1, \quad a_1 = a_{-1} = \frac{1}{4}, \quad a_2 = a_{-2} = \frac{1}{2}, \quad a_3 = a_{-3} = \frac{1}{3}.$$

Escreva uma representação de $x(t)$ em série trigonométrica.

Observação

Para **sinais $x(t)$ reais**, é fácil passar da representação de Fourier em exponenciais complexas para a representação de Fourier em série trigonométrica.

Observação

Temos portanto três diferentes representações de Fourier de sinais periódicos, de período fundamental $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk \frac{2\pi}{T} t}$$

$$x(t) = a_0 + 2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \cos(k\omega_0 t + \theta_k)$$

$$x(t) = a_0 + 2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} [B_k \cos(k\omega_0 t) - C_k \sin(k\omega_0 t)]$$

sendo as duas últimas válidas para sinais $x(t) \in \mathbb{R}$.

2) Determinação da representação em série de Fourier de um sinal periódico em tempo contínuo

Dado um sinal periódico $x(t)$, o problema que agora se põe é o de determinar a colecção de coeficientes a_k . Para isso, usaremos a propriedade da ortogonalidade entre as exponenciais complexas da forma $e^{jk\omega_0 t}$. Temos

$$\begin{aligned}x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \\x(t) e^{-jn\omega_0 t} &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{j(k-n)\omega_0 t} \Rightarrow \\ \Rightarrow \int_0^T x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \left[\int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 t} dt \right]\end{aligned}$$

2) Determinação da representação em série de Fourier de um sinal periódico em tempo contínuo - continuação

Ora, pela fórmula de Euler

$$\int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 t} dt = \int_0^T \cos(k-n)\omega_0 t dt + j \int_0^T \sin(k-n)\omega_0 t dt$$

i) Se $n = k$ tem-se

$$\int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 t} dt = \int_0^T dt = T.$$

2) Determinação da representação em série de Fourier de um sinal periódico em tempo contínuo - continuação

ii) Se $n \neq k$ então

$$\int_0^T \cos(k - n)\omega_0 t \, dt = \int_0^T \cos(m\omega_0 t) \, dt = 0,$$

uma vez que estamos a integrar o cosseno sobre um múltiplo inteiro do seu período fundamental, $\frac{T}{m}$

$$\left(m \omega_0 = m \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{T/m} \right).$$

Pela mesma razão, $\int_0^T \sin(k - n)\omega_0 t \, dt = 0$.

2) Determinação da representação em série de Fourier de um sinal periódico em tempo contínuo - continuação

Em conclusão,

$$\int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 t} dt = \begin{cases} T, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases} = T \times \delta_{k,n} \quad (\text{ortogonalidade})$$

e, consequentemente,

$$\int_0^T x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k T \delta_{k,n} = T a_n$$

donde

$$a_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt.$$

Observação

O resultado

$$\int_0^T x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = T \times \delta_{k,n}$$

mantém-se se o intervalo de integração for de um período T , independentemente de ser ou não em particular entre 0 e T . Consequentemente, também é

$$a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt,$$

sobre qualquer intervalo temporal T .

Resumo

Em suma,

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\left(\frac{2\pi}{T}\right)t}$$

com

$$a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\left(\frac{2\pi}{T}\right)t} dt.$$

Em particular,

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T x(t) dt,$$

a média de $x(t)$ ao longo de um período. Concluimos que o conhecimento do sinal $x(t)$, periódico de período T , permite o cálculo de todos os coeficientes de Fourier a_k , com $k \in]-\infty, +\infty[$.

Exemplo 3.3

Considere o sinal

$$x(t) = \textit{sen}(\omega_0 t)$$

cuja frequência fundamental é ω_0 . Determine os coeficientes a_k da série de Fourier.

Exemplo 3.4

Considere o sinal

$$x(t) = 1 + \textit{sen}(\omega_0 t) + 2\textit{cos}(\omega_0 t) + \textit{cos}\left(2\omega_0 t + \frac{\pi}{4}\right)$$

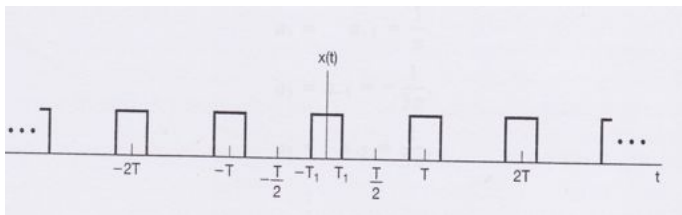
cuja frequência fundamental é ω_0 . Determine os coeficientes a_k .

Exemplo 3.5

Seja

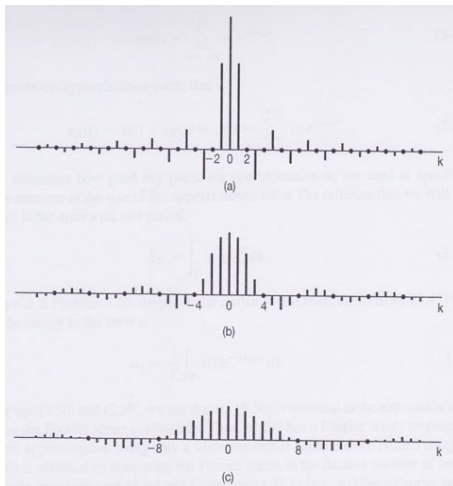
$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & T_1 < |t| < \frac{T}{2}, \end{cases}$$

uma onda quadrada com período T , cujo gráfico é



Calcule os coeficientes de Fourier a_k .

Gráficos dos coeficientes Ta_k para a onda quadrada com período T_1



a) $T = 4T_1$ b) $T = 8T_1$ c) $T = 16T_1$

Convergência das séries de Fourier

A representação em série de Fourier de um sinal periódico $x(t)$, com período $T = 2\pi/\omega_0$, é como vimos,

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad \text{onde} \quad a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt.$$

Uma aproximação à representação em série de exponenciais complexas de um sinal $x(t)$ será dada por

$$x_N(t) = \sum_{k=-N}^{+N} a'_k e^{jk\omega_0 t}.$$

Claro que, se a série de Fourier $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$ existir, $x_N(t)$ não será igual a $x(t)$ e na verdade, podemos definir um erro $e_N(t)$ definido por:

Convergência das séries de Fourier - continuação

$$e_N(t) = x(t) - x_N(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} - \sum_{k=-N}^{+N} a'_k e^{jk\omega_0 t}$$

e, como medida quantitativa deste erro, o critério que vamos usar é a energia nele contida,

$$E_N = \int_T |e_N(t)|^2 dt.$$

Ora, à partida, os coeficientes a'_k não teriam de ser iguais aos correspondentes a_k mas prova-se que os coeficientes a'_k que minimizem E_N são precisamente os a_k :

$$a'_k \longrightarrow a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt.$$

Assim sendo, quando $N \rightarrow \infty$ vem $E_N \rightarrow 0$.

Convergência das séries de Fourier - continuação

Para além desta questão da aproximação finita de uma série de Fourier há ainda a **questão da possibilidade de se poder expandir um sinal $x(t)$ em série de Fourier**. De facto, existem sinais para os quais não é possível determinar a sua correspondente série de Fourier! Isto porque o integral que define os coeficientes a_k poderá não convergir, isto é, o valor obtido para alguns dos a_k pode ser ∞ . Além disso, mesmo que os coeficientes sejam todos finitos, pode dar-se o caso da série de Fourier não convergir (para o sinal original $x(t)$).

Para sinais contínuos de derivadas contínuas, estes problemas não ocorrem, mas há interesse em lidar também com sinais sem derivada em alguns pontos, como por exemplo a onda quadrada do exemplo anterior.

Convergência das séries de Fourier - continuação

Uma classe de sinais periódicos $x(t)$ para os quais há garantia de existir uma correspondente série de Fourier, são aqueles para os quais é finita a energia contida num período, isto é, sinais para os quais

$$\int_T |x(t)|^2 dt < \infty,$$

com a garantia de que os coeficientes a_k são todos finitos e ainda

$$E_N \rightarrow 0, \text{ quando } N \rightarrow \infty.$$

Isto é, definindo

$$e(t) = x(t) - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t},$$

vem

$$\int_T |e(t)|^2 dt = 0.$$

Convergência das séries de Fourier - continuação

Convém realçar que a representatividade de um sinal $x(t)$ por uma série de Fourier não implica que seja

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}, \quad \forall t,$$

o que implica é que a energia, contida num período, da diferença entre os dois seja nula,

$$\int_T |e(t)|^2 dt = \int_T \left| x(t) - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \right|^2 dt = 0.$$

Convergência das séries de Fourier - continuação

Esta condição é verificada na prática, para a generalidade dos sinais de interesse, que contêm, logo à partida, uma energia finita em cada intervalo de um período. O anulamento da energia da sua diferença significa que, na prática, o sinal e a sua série de Fourier são indistinguíveis.

Por outro lado, as condições do matemático P. L. Dirichlet para este problema estabelecem os critérios de igualdade entre $x(t)$ e a sua série de Fourier nos pontos de continuidade de $x(t)$, bem como o valor para o qual converge a série de Fourier em cada eventual ponto de descontinuidade de $x(t)$, ao longo do eixo dos tt .

Temos então as condições de Dirichlet:

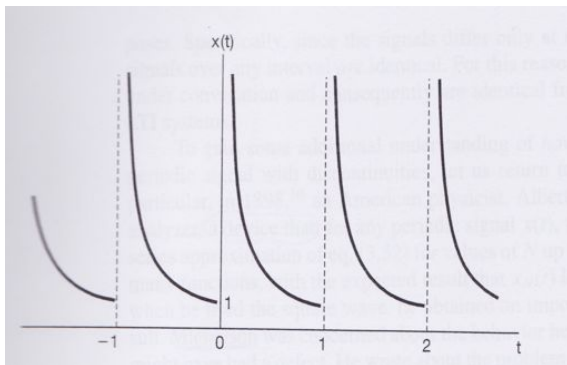
Condição 1 de Dirichlet

- Sobre qualquer um período, o sinal $x(t)$ terá de ser absolutamente integrável, isto é,

$$\int_T |x(t)| dt < \infty.$$

Exemplo de um sinal que viola a condição 1 de Dirichlet

Um sinal periódico (com período 1) que viola a condição 1 de Dirichlet é $x(t) = \frac{1}{t}$, com $0 < t \leq 1$, cujo gráfico é:

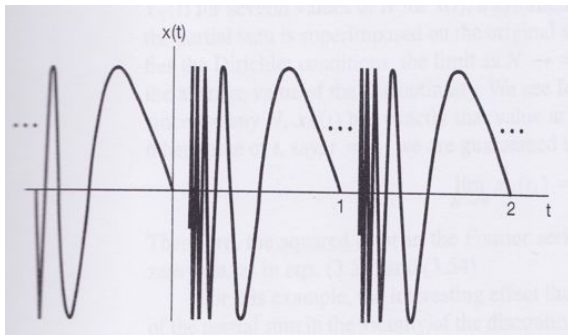


Condição 2 de Dirichlet

- Sobre qualquer intervalo finito do tempo t , o sinal $x(t)$ é de variação limitada, isto é, haverá necessariamente um número não infinito de máximos e mínimos ao longo de um período T deste sinal.

Exemplo de um sinal que viola a condição 2 de Dirichlet

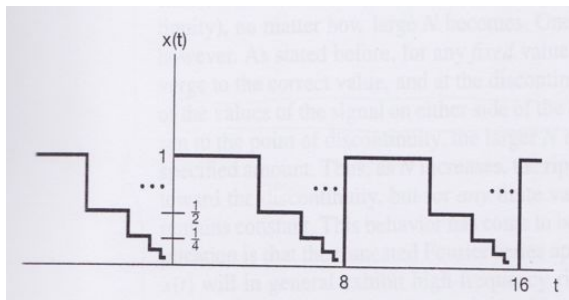
Um sinal periódico (com período 1) que viola a condição 2 de Dirichlet é $x(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{t}\right)$, com $0 < t \leq 1$, cujo gráfico é:



Condição 3 de Dirichlet

- Em qualquer intervalo finito de t , só poderão existir um número finito de descontinuidades de $x(t)$ e, além disso, cada uma das eventuais descontinuidades só poderá ter um valor finito.

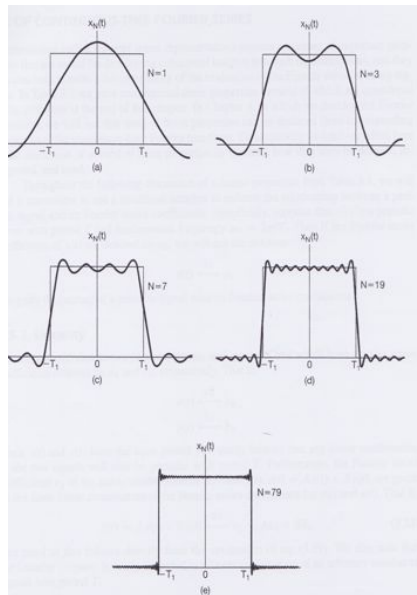
Exemplo de um sinal que viola a condição 3 de Dirichlet



Fenómeno de Gibbs

Josiah Willard Gibbs descobriu que, em pontos de descontinuidade de $x(t)$, a série de Fourier de $x(t)$ apresenta oscilações, tanto mais rápidas quanto maior o valor de N (em x_N), mas sem que o valor máximo da diferença entre $x(t)$ e a sua série de Fourier diminua. No entanto, é verdade que a energia da diferença entre $x(t)$ e a sua série de Fourier tende para zero com $N \rightarrow \infty$. Consequentemente, ao reproduzir sinais com descontinuidades, é importante usar grandes valores de N .

Ilustração do fenómeno de Gibbs



Propriedades das séries de Fourier de sinais em tempo contínuo

Simbologia:

$$x(t) \xleftrightarrow{\text{S.F.}} a_k$$

Um sinal $x(t)$ tanto é representável pela função $x(t)$ do tempo, como pelo conjunto dos coeficientes a_k da sua série de Fourier (S.F.). Sabendo $x(t)$ sabemos os coeficientes a_k e inversamente.

Passamos então às propriedades das séries de Fourier de sinais de tempo contínuo.

1. Linearidade (para sinais com iguais períodos T)

Se

$$x(t) \xleftrightarrow{S.F.} a_k \quad \text{e} \quad y(t) \xleftrightarrow{S.F.} b_k$$

então

$$z(t) = A x(t) + B y(t) \xleftrightarrow{S.F.} c_k = A a_k + B b_k,$$

que se prova por aplicação directa das expressões gerais de Fourier para $x(t)$ e para a_k . A salientar que os sinais $x(t)$, $y(t)$ e, portanto, $z(t)$ têm o mesmo período fundamental T .

2. Desvio temporal

Seja $x(t)$ um sinal com período T . Então $y(t) = x(t - t_0)$ terá o mesmo período T e podemos escrever

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k e^{jk\omega_0 t}$$

com

$$b_k = \frac{1}{T} \int_T y(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \dots = e^{-jk\omega_0 t_0} a_k.$$

Isto é, se $x(t) \xleftrightarrow{S.F.} a_k$, então $x(t - t_0) \xleftrightarrow{S.F.} e^{-jk\omega_0 t_0} a_k$.

Notar que

$$|b_k| = \left| e^{-jk\omega_0 t_0} a_k \right| = |a_k|.$$

3. Inversão temporal

Seja

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}.$$

Então, se

$$y(t) = x(-t),$$

vem

$$y(t) = x(-t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0(-t)} = \dots = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{-k} e^{jk\omega_0 t},$$

ou seja $b_k = a_{-k}$. Isto é,

$$x(t) \xleftrightarrow{S.F.} a_k \quad \Rightarrow \quad x(-t) \xleftrightarrow{S.F.} a_{-k}.$$

Inversão temporal - continuação

Uma consequência interessante da inversão temporal é que:

- se $x(t)$ é um sinal par ($x(t) = x(-t)$), então os seus coeficientes de Fourier também são pares em k , isto é $a_k = a_{-k}$;
- se $x(t)$ é um sinal ímpar ($x(t) = -x(-t)$) então os seus coeficientes de Fourier também são ímpares em k , isto é $a_k = -a_{-k}$.

4. Escalamento temporal

Se $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$ então

$$x(\alpha t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk(\alpha\omega_0)t},$$

com os mesmos coeficientes a_k . De facto, notando que se $\alpha > 1$ o período diminui e a frequência aumenta, e inversamente se $\alpha < 1$. Teremos $T \rightarrow T/\alpha$, $\omega_0 \rightarrow \alpha\omega_0$ e

$$b_k = \frac{1}{T/\alpha} \int_{T/\alpha} y(t) e^{-jk\alpha\omega_0 t} dt = a_k.$$

Portanto, apesar de a série de Fourier para $y(t) = x(\alpha t)$ ser diferente da série de Fourier para $x(t)$, os respectivos coeficientes mantêm-se iguais.

5. Multiplicação

Supondo que $x(t)$ e $y(t)$ são periódicos com período T e que

$$x(t) \xleftrightarrow{S.F.} a_k$$

e

$$y(t) \xleftrightarrow{S.F.} b_k$$

então

$$x(t) y(t) \xleftrightarrow{S.F.} h_k = \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} a_{\ell} b_{k-\ell}.$$

6. Conjugação complexa e simetrias da conjugação

Se $x(t) \xleftrightarrow{S.F.} a_k$, então $x^*(t) \xleftrightarrow{S.F.} a_{-k}^*$.

Corolários:

(i) Se $x(t) \in \mathbb{R}$, então $a_k = a_{-k}^*$ e portanto, também é

$$|a_k| = |a_{-k}^*| = |a_{-k}|.$$

Em particular, $a_0 = a_0^*$, logo $a_0 \in \mathbb{R}$.

(ii) Se $x(t)$ é real e par, então $a_k = a_{-k}$, concluindo-se também que

$$a_k = a_{-k}^* = a_{-k} \quad \Leftrightarrow \quad a_k = a_k^* = a_{-k},$$

pelo que os coeficientes a_k também serão reais e pares em k .

6. Conjugação complexa e simetrias da conjugação - continuação

(iii) Se $x(t)$ é real e ímpar, então $a_k = -a_k$, concluindo-se também que

$$a_k = -a_{-k} = a_{-k}^* \Leftrightarrow a_k = -a_k^* = -a_{-k},$$

e os coeficientes a_k são ímpares em k e imaginários puros. Em particular, se $x(t) \in \mathbb{R}$ e ímpar, então

$$a_0 = 0.$$

7. Relação de Parseval para sinais periódicos em tempo contínuo (“teorema de Pitágoras a infinitas dimensões”)

$$\frac{1}{T} \int_T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2, \quad (1)$$

onde a_k são os coeficientes da série de Fourier de $x(t)$ e T é o período do sinal.

Significado:

- $\int_T |x(t)|^2 dt$ representa a energia contida num período do sinal;
- $\frac{1}{T} \int_T |x(t)|^2 dt$ é a potência média do sinal, num período T (ou em qualquer número inteiro de períodos).

7. Relação de Parseval para sinais periódicos em tempo contínuo (“teorema de Pitágoras a infinitas dimensões”)

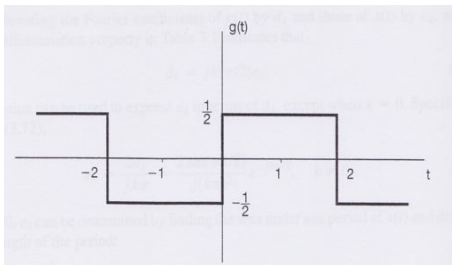
Além disso, a potência média contida na k -ésima harmónica é

$$\frac{1}{T} \int_T |a_k e^{jk\omega_0 t}|^2 dt = \frac{1}{T} \int_T |a_k|^2 dt = |a_k|^2 \frac{1}{T} \int_T dt = |a_k|^2.$$

Então a relação (1) significa que a potência média sobre um período é igual à soma das potências médias de todas as suas componentes harmónicas.

Exemplo 3.6

Consideremos uma outra “onda quadrada” $g(t)$ da forma



com um período fundamental $T = 4$. Determine a representação em série de Fourier de $g(t)$ recorrendo aos resultados obtidos no Exemplo 3.5.

8. Diferenciação e integração

- 8 a) Diferenciação

Se

$$x(t) \xleftrightarrow{S.F.} a_k$$

então

$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{S.F.} jk\omega_0 \times a_k.$$

8. Diferenciação e integração - continuação

- 8 b) Integração

Se

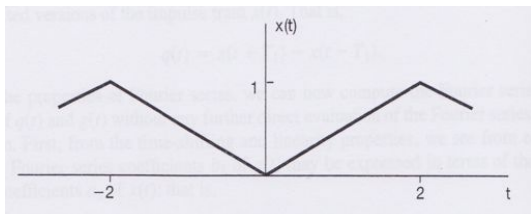
$$x(t) \xleftrightarrow{S.F.} a_k$$

então

$$\underbrace{\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau}_{\text{(valor finito e periódico apenas se } a_0=0\text{)}} \xleftrightarrow{S.F.} \left(\frac{1}{jk\omega_0} \right) a_k$$

Exemplo 3.7

Consideremos a onda triangular $x(t)$ com período $T = 4$ e frequência fundamental $\omega_0 = \frac{\pi}{2}$ cujo gráfico é



Determine os coeficientes de Fourier sabendo que a derivada deste sinal é o sinal do Exemplo 3.6.

Exemplo 3.8

Consideremos uma sequência de impulsos unitários, repetidos periodicamente, com período T - o chamado “pente de Dirac”:

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT).$$

Determine os coeficientes de Fourier.

Exemplo 3.9

Seja o sinal $x(t)$ tal que:

- 1 $x(t) \in \mathbb{R}$
- 2 $x(t)$ é periódico com período $T = 4$ e tem coeficientes da série de Fourier a_k
- 3 os coeficientes a_k são tais que $a_k = 0$ para $|k| > 1$
- 4 o sinal com coeficientes de Fourier $b_k = e^{-jk\pi/2} a_{-k}$ é ímpar
- 5 $\frac{1}{4} \int_4 |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2}$.

De que sinal se trata?

SÉRIE de FOURIER para TEMPO DISCRETO

Maria do Carmo Martins

Março de 2012

Representação em série de Fourier de sinais periódicos em tempo discreto

Passamos agora às séries de Fourier de sinais periódicos em tempo discreto,

$$x[n] = x[n + N].$$

- A maior diferença é que agora a série de Fourier irá conter um número finito de termos.

1. Combinações lineares de exponenciais complexas harmónicas

Como sabemos um sinal de tempo discreto é periódico com período N se

$$x[n] = x[n + N]$$

sendo o período fundamental o menor valor (inteiro) de N que verifica aquela igualdade e a frequência fundamental $\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$.

O sinal básico que nos interessa aqui é a exponencial complexa da forma

$$\phi_k[n] = e^{jk\omega_0 n} = e^{jk\frac{2\pi}{N}n}, \quad \text{com } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

constituindo uma família de harmónicas, com frequências que são múltiplos inteiros da frequência fundamental $\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$.

1. Combinações lineares de exponenciais complexas harmónicas - continuação

No entanto, uma característica essencial destas exponenciais complexas em tempo discreto é que **só há N que são diferentes entre si**. Por exemplo, $\phi_0[n] = \phi_N[n]$, pois

$$\phi_0[n] = e^{j0\frac{2\pi}{N}n} = e^{j0} = 1 \quad \text{e}$$

$$\phi_N[n] = e^{jN\frac{2\pi}{N}n} = e^{j2\pi n} = 1 \quad (\text{com } n \text{ inteiro}).$$

e também $\phi_1[n] = \phi_{N+1}[n]$

$$\phi_1[n] = e^{j\frac{2\pi}{N}n} = \cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right) + j \sin\left(\frac{2\pi}{N}n\right) \quad \text{e}$$

$$\phi_{N+1}[n] = e^{j(N+1)\frac{2\pi}{N}n} = e^{j2\pi n} e^{j\frac{2\pi}{N}n} = \cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right) + j \sin\left(\frac{2\pi}{N}n\right)$$

...

1. Combinações lineares de exponenciais complexas harmónicas - continuação

Em geral,

$$\phi_k[n] = \phi_{k+rN}[n], \quad \text{com } r \text{ inteiro.}$$

Consequentemente, só existirão N exponenciais complexas distintas em tempo discreto (em tempo contínuo existiam infinitas). Por exemplo, começando com um valor concreto k_0 de k , as exponenciais complexas (em número N)

$$\phi_{k_0}[n], \quad \phi_{k_0+1}[n], \quad \phi_{k_0+2}[n], \quad \cdots \quad \phi_{k_0+N-1}[n]$$

formam um conjunto de elementos distintos ($\phi_{k_0+N}[n]$ já será igual a $\phi_{k_0}[n]$), tal como

$$\phi_{k_0}[n], \quad \phi_{k_0-1}[n], \quad \phi_{k_0-2}[n], \quad \cdots \quad \phi_{k_0-N+1}[n].$$

($\phi_{k_0-N}[n]$ já será igual a $\phi_{k_0}[n]$ - **prove!**).

1. Combinações lineares de exponenciais complexas harmónicas - continuação

Em resultado desta repetição, combinações lineares de exponenciais complexas em tempo discreto do tipo

$$x[n] = \sum_k a_k \phi_k[n] = \sum_k a_k e^{jk\omega_0 n} = \sum_k a_k e^{jk \frac{2\pi}{N} n}$$

só irão conter N termos, já que termos adicionais seriam idênticos a outros já presentes e só iriam modificar o valor dos respectivos coeficientes a_k .

1. Combinações lineares de exponenciais complexas harmônicas - continuação

Indicamos a existência de um número finito N de exponenciais complexas naquela sobreposição linear escrevendo

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k \phi_k[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\omega_0 n} = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \quad (S.F.)$$

O valor inicial de k é indiferente, o que é necessário é que sejam percorridos um total de N índices distintos, por exemplo:

$$k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (N \text{ termos})$$

$$k = 3, 4, 5, \dots, N+2 \quad (N \text{ termos})$$

$$k = -51, -50, -49, \dots, N-52 \quad (N \text{ termos})$$

...

2. Representação em série de Fourier de um sinal periódico em tempo discreto

Passamos agora ao estudo da possibilidade de representar um sinal $x[n]$ tal que

$$x[n] = x[n + N]$$

em **série de Fourier** da forma

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk \frac{2\pi}{N} n}$$

e à determinação dos coeficientes.

2. Representação em série de Fourier de um sinal periódico em tempo discreto - continuação

Conhecemos $x[n]$, nomeadamente sobre um período desde $n = 0$ a $n = N - 1$, e queremos calcular os N coeficientes a_k . Uma maneira de o fazer seria estabelecer N equações algébricas para obter os N valores dos coeficientes a_k , fazendo

$$x[0] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k$$

$$x[1] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk \frac{2\pi}{N} 1}$$

... ..

$$x[N - 1] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk \frac{2\pi}{N} (N-1)}$$

mostrando que as N equações são linearmente independentes e de onde se obteria os N coeficientes a_k .

2. Representação em série de Fourier de um sinal periódico em tempo discreto - continuação

Em vez disso, seguimos uma via paralela à usada no caso contínuo. Para isso, é necessário o seguinte resultado preliminar:

$$\sum_{n=\langle N \rangle} e^{jk \frac{2\pi}{N} n} = \begin{cases} N, & k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots \\ 0, & \text{restantes valores de } k \end{cases}$$

2. Representação em série de Fourier de um sinal periódico em tempo discreto - continuação

Usando a expansão

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{N})n},$$

temos

$$x[n] e^{-jr(\frac{2\pi}{N})n} = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{j(k-r)(\frac{2\pi}{N})n}$$

pelo que

$$\sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jr(\frac{2\pi}{N})n} = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k \underbrace{\sum_{n=\langle N \rangle} e^{j(k-r)(\frac{2\pi}{N})n}}_{*}$$

* Aplicar o resultado anterior.

2. Representação em série de Fourier de um sinal periódico em tempo discreto - continuação

É aqui que utilizamos o resultado anterior, para escrever

$$\begin{aligned}\sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jr(\frac{2\pi}{N})n} &= \sum_{k=\langle N \rangle} a_k \times \begin{cases} N, & k - r = 0, \pm N, \pm 2N, \dots \\ 0, & k - r \neq 0, \pm N, \pm 2N, \dots \end{cases} \\ &= \sum_{k=\langle N \rangle} a_k \times N \delta_{k,r} \\ &= N a_r\end{aligned}$$

o que implica que

$$a_r = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jr(\frac{2\pi}{N})n}.$$

2. Representação em série de Fourier de um sinal periódico em tempo discreto - continuação

Ficam assim determinados os coeficientes a_k da expansão em série de Fourier do sinal $x[n]$:

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\omega_0 n} = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$$

com

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk\omega_0 n} = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} a_k e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}.$$

- Os coeficientes a_k são os **coeficientes espectrais** de $x[n]$.
Haverá portanto N valores distintos para os coeficientes a_k .

2. Representação em série de Fourier de um sinal periódico em tempo discreto - continuação

Recordando que

$$\phi_k[n] = \phi_{k+rN}[n], \quad \text{com } r \text{ inteiro}$$

tanto podemos escrever

$$x[n] = a_0 \phi_0[n] + a_1 \phi_1[n] + \cdots + a_{N-1} \phi_{N-1}[n]$$

como

$$x[n] = a_1 \phi_1[n] + a_2 \phi_2[n] + \cdots + a_N \phi_N[n],$$

ambos os somatórios com N termos. Atendendo a que $\phi_0[n] = \phi_N[n]$ também se terá $a_0 = a_N$.

Repetindo o argumento, concluímos que os coeficientes a_k também são periódicos em k , com período N , daí $a_k = a_{k+N}$, tal como as exponenciais $\phi_k[n]$.

Exemplo 3.10

Considere o sinal em tempo discreto

$$x[n] = \text{sen}[\omega_0 n]$$

periódico, com período N se $\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$. Determine os coeficientes a_k .

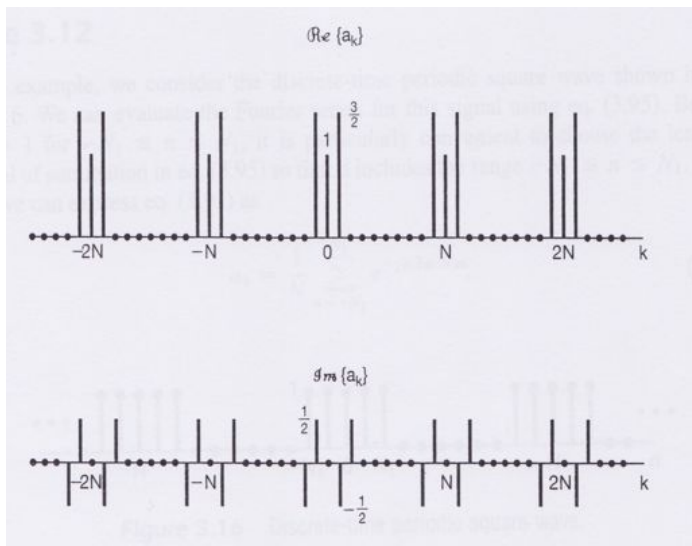
Exemplo 3.11

Considere o sinal de tempo discreto

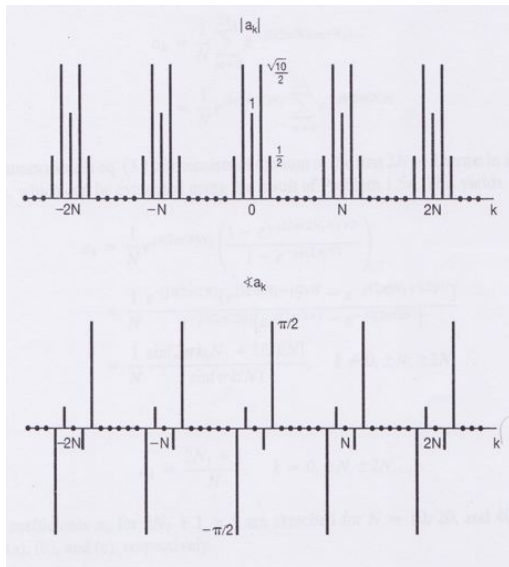
$$x[n] = 1 + \sin\left(\frac{2\pi}{N}\right)n + 3\cos\left(\frac{2\pi}{N}\right)n + \cos\left(\frac{4\pi}{N}n + \frac{\pi}{2}\right),$$

periódico, com período N . Determine os coeficientes da expansão em série de Fourier de $x[n]$.

Partes real e imaginária dos coeficientes do Exemplo 3.11

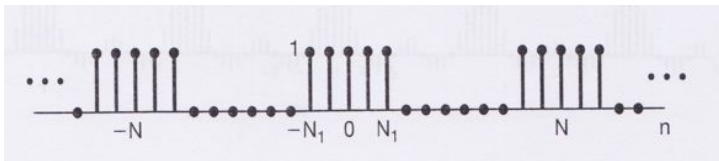


Magnitude e argumento dos coeficientes do Exemplo 3.11



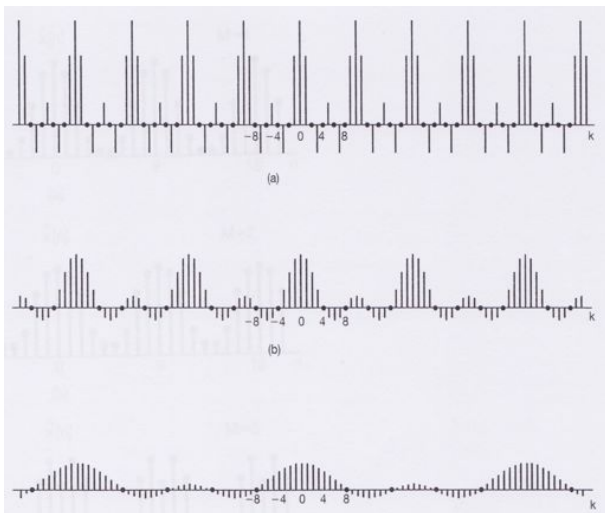
Exemplo 3.12

Seja agora um sinal $x[n]$ dado graficamente, com a forma de uma onda quadrada:



Determine os coeficientes da expansão da série de Fourier.

Coeficientes S.F. para a onda quadrada do Ex. 3.12 -
 Gráficos de Na_k para $2N_1 + 1 = 5$ com a) $N=10$, b) $N=20$
 e c) $N=40$



2. Representação em série de Fourier de um sinal periódico em tempo discreto - continuação

No estudo da convergência de séries de Fourier em tempo contínuo, fomos levados a considerar estas séries como o limite de somas quando o número de termos tende para o infinito.

Observou-se, em particular, a ocorrência do fenómeno de Gibbs.

Ora, em tempo discreto, só temos somas finitas, sobre um intervalo de um período N :

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n},$$

expressão esta que reproduz exactamente o sinal discreto $x[n]$.

Vemos que, para essa exactidão, é preciso um número finito de coeficientes a_k , ao passo que para sinais contínuos é necessário um número infinito de coeficientes.

2. Representação em série de Fourier de um sinal periódico em tempo discreto - continuação

Se, na representação de Fourier de um sinal discreto, tomarmos o somatório sobre um número de termos inferior ao período N , ficaremos com uma aproximação a que chamamos

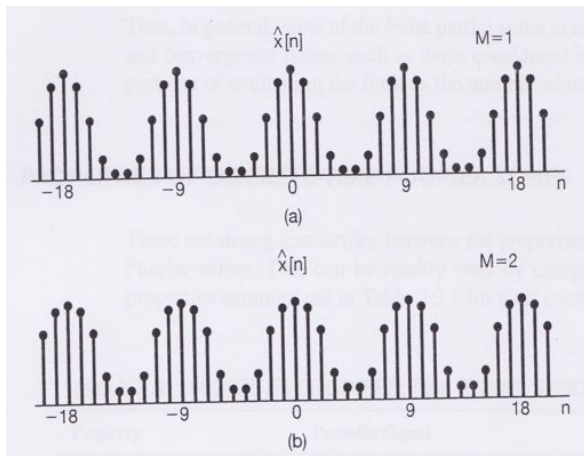
$$\hat{x}[n].$$

Por exemplo, e tomando um período N como sendo ímpar, temos

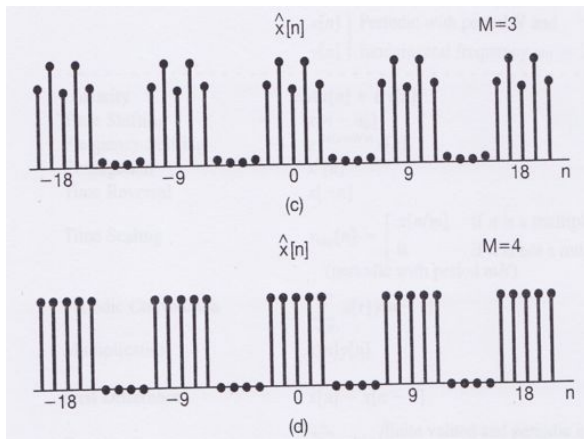
$$\hat{x}[n] = \sum_{k=-M}^M a_k e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)m}$$

com $2M + 1$ termos, com $2M + 1 \leq N$.

Somas parciais para a onda quadrada com $N = 9$ e $2N_1 + 1 = 5$



Somas parciais para a onda quadrada com $N = 9$ e $2N_1 + 1 = 5$



Observação

Notar que, para sinais em tempo discreto não ocorre o fenómeno de Gibbs nem problemas de convergência, visto que se trata de somas finitas e não de séries.

Por outro lado, se o período do sinal discreto for N , então, sendo N ímpar, tomar $M = \frac{N-1}{2}$ leva a que ocorram N termos no somatório e o sinal fica exactamente representado:

$$N \text{ ímpar} \quad \longrightarrow \quad M = \frac{N-1}{2} \quad \longrightarrow \quad \hat{x}[n] = x[n].$$

Se N for par tomamos $M = \frac{N}{2}$, ocorrem também N termos no somatório e também o sinal fica exactamente representado:

$$N \text{ par} \quad \longrightarrow \quad M = \frac{N}{2} \quad \longrightarrow \quad \hat{x}[n] = x[n].$$

Para valores de M inferiores a este, $\hat{x}[n]$ é de facto uma aproximação do sinal exacto $x[n]$.

3.7 Propriedades das séries de Fourier de sinais em tempo discreto

A maioria destas propriedades é semelhante às das séries de Fourier de sinais em tempo contínuo.

Assim, se

$$x[n] \xleftrightarrow{S.F.} a_k \quad \text{e} \quad y[n] \xleftrightarrow{S.F.} b_k,$$

onde $x[n]$ e $y[n]$ têm ambos período N e a_k e b_k têm também ambos período N , temos:

- **Linearidade:**

$$A x[n] + B y[n] \xleftrightarrow{S.F.} A a_k + B b_k.$$

- **Desvio temporal:**

$$x[n - n_0] \xleftrightarrow{S.F.} a_k e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n_0}.$$

3.7 Propriedades das séries de Fourier de sinais em tempo discreto - continuação

- Desvio de frequência:

$$e^{jM\left(\frac{2\pi}{N}\right)n} x[n] \xleftrightarrow{S.F.} a_{k-M}$$

- Conjugação complexa:

$$x^*[n] \xleftrightarrow{S.F.} a_{-k}^*.$$

- Inversão temporal:

$$x[-n] \xleftrightarrow{S.F.} a_{-k}.$$

3.7 Propriedades das séries de Fourier de sinais em tempo discreto - continuação

- **Escalação temporal:**

$$x_{(m)}[n] = \begin{cases} x[n/m], & n \text{ é múltiplo de } m \\ 0, & n \text{ não é múltiplo de } m \end{cases} \quad \xleftrightarrow{S.F.} \quad \frac{1}{m} a_k$$

(aqui, $x_{(m)}[n]$ é periódico com período mN).

- **Convolução periódica:**

$$\sum_{r=\langle N \rangle} x[r] y[n-r] \quad \xleftrightarrow{S.F.} \quad N a_k b_k.$$

3.7 Propriedades das séries de Fourier de sinais em tempo discreto - continuação

- **Multiplicação:**

$$x[n] y[n] \xleftrightarrow{S.F.} \sum_{\ell=\langle N \rangle} a_{\ell} b_{k-\ell}$$

- **Primeira diferença:**

$$x[n] - x[n-1] \xleftrightarrow{S.F.} \left[1 - e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)} \right] a_k.$$

- **Soma parcial:**

$$\underbrace{\sum_{k=-\infty}^n x[k]}_{\text{valor finito e periódico apenas se } a_0 = 0} \xleftrightarrow{S.F.} \left[1 - e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)} \right]^{-1} a_k.$$

valor finito e periódico apenas se $a_0 = 0$

3.7 Propriedades das séries de Fourier de sinais em tempo discreto - continuação

- **Simetria de Conjugação para sinais reais:**

$$x[n] \in \mathbb{R} \quad \xleftrightarrow{S.F.} \quad \begin{cases} a_k = a_{-k}^* \\ \Re\{a_k\} = \Re\{a_{-k}\} \\ \Im\{a_k\} = -\Im\{a_{-k}\} \\ |a_k| = |a_{-k}| \\ \angle a_k = -\angle a_{-k} \end{cases}$$

- Sinais reais e pares

$$x[n] \text{ real e par} \quad \xleftrightarrow{S.F.} \quad a_k \text{ real e par}$$

- Sinais reais e ímpares

$$x[n] \text{ real e ímpar} \quad \xleftrightarrow{S.F.} \quad a_k \text{ imaginário puro e ímpar}$$

3.7 Propriedades das séries de Fourier de sinais em tempo discreto - continuação

- **Decomposição par e ímpar de sinais reais:**

$$\begin{aligned}x_e[n] &= Ev\{x[n]\} \quad \xleftrightarrow{S.F.} \Re\{a_k\} \\x_o[n] &= Od\{x[n]\} \quad \xleftrightarrow{S.F.} j \Im\{a_k\}\end{aligned}$$

- **Relação de Parseval:**

$$\frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} |x[n]|^2 = \sum_{k=\langle N \rangle} |a_k|^2.$$

Destaque para 3 destas propriedades

1. Multiplicação

A diferença fundamental relativamente ao caso contínuo é que o somatório da convolução é agora sobre um conjunto finito de pontos: se

$$x[n] \xleftrightarrow{S.F.} a_k \quad \text{e} \quad y[n] \xleftrightarrow{S.F.} b_k$$

então

$$x[n] \cdot y[n] \xleftrightarrow{S.F.} d_k = \sum_{\ell=\langle N \rangle} a_\ell b_{k-\ell}$$

onde $x[n]$ e $y[n]$, e consequentemente $x[n] \cdot y[n]$, são periódicos de período N .

Este somatório sobre um período chama-se uma **convolução periódica** entre as sequências de coeficientes a_k e b_k . No caso contínuo tratava-se de uma **convolução aperiódica**.

Destaque para 3 destas propriedades - continuação

2. Primeira diferença

Esta propriedade assemelha-se à diferenciação para sinais em tempo contínuo. É evidente que, se $x[n]$ tem período N , então $x[n - 1]$ tem o mesmo período.

Assim, se

$$x[n] \xleftrightarrow{S.F.} a_k$$

então

$$x[n] - x[n - 1] \xleftrightarrow{S.F.} \left[1 - e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)} \right] a_k,$$

aplicando as propriedades do desvio temporal e da linearidade já referidas.

Destaque para 3 destas propriedades - continuação

3. Relação de Parseval

$$\frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} |x[n]|^2 = \sum_{k=\langle N \rangle} |a_k|^2.$$

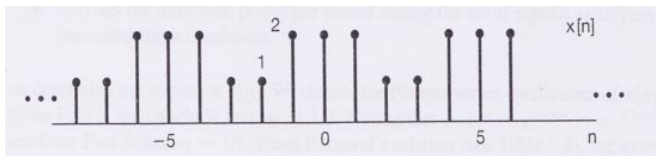
Significado físico:

- $\frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} |x[n]|^2$ representa a potência média num período do sinal periódico $x[n]$.
- $|a_k|^2$ representa potência média contida na k -ésima harmónica na decomposição de Fourier de $x[n]$.

Tal como no caso contínuo, a potência média num sinal periódico é igual à soma das potências médias contidas em todas as suas componentes harmónicas.

Exemplo 3.13

Determine os coeficientes de Fourier do sinal $x[n]$ dado graficamente por



com período $N = 5$.

Exemplo 3.14

Seja $x[n]$ um sinal discreto com as seguintes características:

① $x[n]$ é periódico com período $N = 6$

②
$$\sum_{n=0}^5 x[n] = 2$$

③
$$\sum_{n=2}^7 (-1)^n x[n] = 1$$

④ $x[n]$ tem a menor potência por período entre todos os sinais que satisfazem as 3 condições anteriores.

Determine $x[n]$.

Exemplo 3.15

Usando a propriedade da convolução periódica, determinar a forma de um sinal a partir do conhecimento dos coeficientes da sua expansão de Fourier:

$$w[n] \longrightarrow c_k = \frac{\text{sen}^2(3\pi k/7)}{7\text{sen}^2(\pi k/7)}.$$

Vimos já que:

(i) Se $x(t) = e^{st}$ é uma entrada de um SLIT em tempo contínuo, então a saída correspondente é dada por

$$y(t) = H(s) e^{st}$$

onde

$$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau,$$

sendo $h(t)$ a resposta ao impulso unitário para sistemas em tempo contínuo.

Séries de Fourier e SLITs - continuação

ii) Se $x[n] = z^n$ é uma entrada de um SLIT em tempo discreto, então a saída correspondente é dada por

$$y[n] = H(z) z^n$$

com

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] z^{-k},$$

sendo $h[n]$ a resposta ao impulso unitário para sistemas em tempo discreto.

Séries de Fourier e SLITs - continuação

Daqui em diante, estaremos interessados no caso específico em que

$$\Re\{s\} = 0 \quad \Rightarrow \quad s = j\omega \quad \Rightarrow \quad e^{st} = e^{j\omega t}$$

Então

$$H(s) = H(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt.$$

No caso discreto, tomamos

$$|z| = 1 \quad \Rightarrow \quad z = e^{j\omega} \quad \Rightarrow \quad z^n = e^{j\omega n}$$

e portanto,

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] e^{-j\omega n}.$$

Séries de Fourier e SLITs - continuação

Portanto, a resposta de um SLIT

- a um sinal $e^{j\omega t}$ em tempo contínuo é $H(j\omega) e^{j\omega t}$ com

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt$$

- e a um sinal $e^{j\omega n}$ em tempo discreto é $H(e^{j\omega}) e^{j\omega n}$ com

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] e^{-j\omega n}.$$

Séries de Fourier e SLITs - continuação

Assim, para SLITs, se um sinal de entrada em tempo contínuo é dado por uma sobreposição linear de sinais exponenciais complexos, isto é, se

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

então

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k H(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$$

será a resposta do SLIT, onde

$$H(jk\omega_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

e $h(t)$ é a resposta deste SLIT ao impulso unitário.

Séries de Fourier e SLITs - continuação

Notemos que

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

não é mais que a expansão em série de Fourier do sinal de entrada $x(t)$, com frequência fundamental ω_0 (e harmônicas $k\omega_0$) e coeficientes a_k . Por seu lado,

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k H(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$$

não é mais do que a expansão em série de Fourier do sinal de saída $y(t)$, com frequência fundamental também ω_0 , e coeficientes $a_k H(jk\omega_0)$.

Séries de Fourier e SLITs - continuação

Portanto, para saber a resposta $y(t)$ de um SLIT a um sinal $x(t)$, basta saber a resposta do mesmo SLIT ao impulso unitário, bem como os coeficientes a_k da série de Fourier de $x(t)$.

Cada SLIT é então caracterizado pela resposta ao impulso unitário, ou também por $H(j\omega)$ ou $H(jk\omega_0)$, a chamada **resposta na frequência** do SLIT. É necessário que estas funções convirjam, o que acontecerá se os SLITs forem estáveis.

Séries de Fourier e SLITs - continuação

De forma idêntica, para SLITs em tempo discreto: se

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$$

então

$$y[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k H(e^{jk(2\pi/N)}) e^{jk(2\pi/N)n}$$

onde tomamos $z_k = e^{jk(2\pi/N)}$. Note-se que $y[n]$ tem o mesmo período que $x[n]$, e

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] e^{-j\omega n},$$

sendo $h[n]$ a resposta ao impulso unitário.

Note-se que cada coeficiente da série de Fourier de $y[n]$ será o produto do coeficiente da mesma ordem do sinal $x[n]$ com o valor da resposta na frequência $H(e^{jk2\pi/N})$ à mesma frequência $k2\pi/N$.

Exemplo 3.16

Consideremos o sinal de entrada do Exemplo 3.2 com $T = 1$

$$x(t) = \sum_{k=-3}^{+3} a_k e^{jk(2\pi/1)t}$$

com $a_0 = 1$, $a_{\pm 1} = \frac{1}{4}$, $a_{\pm 2} = \frac{1}{2}$, $a_{\pm 3} = \frac{1}{3}$, ou seja,

$$x(t) = 1 + \frac{1}{2} \cos(2\pi t) + \cos(4\pi t) + \frac{2}{3} \cos(6\pi t),$$

e suponhamos um SLIT particular para o qual a resposta $h(t)$ ao impulso unitário $\delta(t)$ seja $h(t) = e^{-t}u(t)$. Determine a resposta $y(t)$.

Exemplo 3.17

Seja um SLIT com resposta ao impulso da forma

$$h[n] = \alpha^n u[n], \quad -1 < \alpha < 1$$

com o sinal de entrada

$$x[n] = \cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right).$$

Determine a expressão do sinal de saída $y[n]$.

SÉRIE de FOURIER

3 parte

Maria do Carmo Martins

Março de 2009

§ 3. 10 Exemplos de filtros em tempo contínuo descritos por equações diferenciais

Passamos à descrição de alguns exemplos de filtros reais, em tempo contínuo, com circuitos eléctricos analógicos.

Seguidamente passaremos a alguns exemplos de filtros em tempo discreto, que são realizáveis com circuitos electrónicos digitais (embora não os mostremos aqui).

Estamos particularmente interessados, independentemente da sua constituição real, em filtros cujo comportamento é descritível através de equações diferenciais ou de equações às diferenças, em tempos contínuos ou discretos, respectivamente.

1. Um filtro RC passa-baixo

Supomos um circuito RC simples e consideramos a tensão da fonte, $v_s(t)$, como o sinal de entrada, e a tensão aos terminais do condensador, $v_c(t)$, como o sinal de saída. Qual a resposta na frequência deste circuito?

2. Um filtro RC passa-alto

O circuito é o mesmo do filtro anterior, mas o sinal de saída é agora $v_R(t)$, a queda de tensão aos terminais do resistor R .

§ 3.11 Exemplos de filtros em tempo discreto, descritos por equações às diferenças

Há muitas semelhanças entre o comportamento dos filtros em tempo discreto e os filtros em tempo contínuo, mas também há diferenças importantes. Em particular, SLIT's em tempo discreto associados a equações às diferenças podem ser recursivos, com respostas de duração infinita ao impulso unitário (como na secção anterior, em tempo contínuo) ou então podem ser não-recursivos, com respostas de duração finita ao impulso unitário. Actualmente, são ambos realizáveis com circuitos electrónicos digitais.

1. Filtros recursivos em tempo discreto (de 1ª ordem)

O filtro em tempo discreto cuja equação às diferenças corresponde à EDO dos filtros em tempo contínuo da secção anterior tem a seguinte equação:

$$y[n] - a y[n-1] = x[n].$$

Novamente da definição de resposta na frequência, agora em tempo discreto, $H(e^{j\omega})$, temos

$$x[n] = e^{j\omega n} \Rightarrow y[n] = H(e^{j\omega}) e^{j\omega n}.$$

Substituindo na equação às diferenças, vem

$$H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} - a H(e^{j\omega}) e^{j\omega(n-1)} = e^{j\omega n} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow H(e^{j\omega}) [1 - a e^{-j\omega}] = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - a e^{-j\omega}}$$

1. Filtros recursivos em tempo discreto (de 1ª ordem) - continuação

Tenhamos em conta os gráficos da amplitude de $|H(e^{j\omega})|$ para $a = +0.6$ e $a = -0.6$.

No 1º caso, o sistema comporta-se como um filtro passa-baixo com grande atenuação em $\omega = \pm\pi$, o que acontece para $0 < a < 1$.

Nos 2º caso, o sistema comporta-se como um filtro passa-alto atenuando frequências $\omega = 0$, desde que $-1 < a < 0$.

Por seu lado, a resposta ao impulso unitário $x[n] = \delta[n]$ é agora

$$h[n] = a^n u[n]$$

e a resposta ao escalão em tempo discreto, $u[n]$, é dada por

$$s[n] = u[n] * h[n] = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} u[n].$$

1. Filtros recursivos em tempo discreto (de 1ª ordem) - continuação

As expressões para $h[n]$ e $s[n]$ mostram que a velocidade com que as respostas $h[n]$ e $s[n]$ atingem os seus valores finais assintóticos depende do valor de $|a|$, sendo tanto mais lentas quanto maior for $|a|$, notando-se que não pode ser $|a| \geq 1$ senão o SLIT será instável, com respostas divergentes para entradas exponenciais complexas.

Também se usam, na prática equações às diferenças, recursivas, de ordem superior para criar filtros de comportamento mais abrupto, e mais selectivo, na frequência.

2. Filtros não-recursivos em tempo discreto

São filtros descritos pela equação não-recursiva da forma geral

$$y[n] = \sum_{k=-N}^{+M} b_k x[n - k]$$

e portanto o sinal de saída $y[n]$ é a média ponderada dos $N + M + 1$ valores de $x[n]$, desde $x[n - M]$ até $x[n + N]$, com os pesos relativos dados pelos coeficientes b_k .

2. Filtros não-recursivos em tempo discreto - continuação

Vimos já um exemplo desta natureza,

$$y[n] = \frac{1}{2} (x[n] + x[n-1]),$$

o qual suaviza o sinal de entrada $x[n]$, tomando a média de cada valor com o anterior - trata-se de um filtro que atenua rápidas variações do sinal $x[n]$.

2. Filtros não-recursivos em tempo discreto - continuação

Um exemplo um pouco mais complicado do mesmo princípio é dado pela função não-recursiva

$$y[n] = \frac{1}{3} (x[n-1] + x[n] + x[n+1])$$

que executa a média sobre 3 pontos. Neste caso, sendo $x[n] = \delta[n]$, então

$$h[n] = \frac{1}{3} (\delta[n-1] + \delta[n] + \delta[n+1])$$

e portanto

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] e^{-j\omega n} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cos\omega.$$

Trata-se de um filtro passa-baixo, mas pouco selectivo.

2. Filtros não-recursivos em tempo discreto - continuação

Mais selectivo será um filtro que toma a média sobre um conjunto de $N + M + 1$ pontos à volta de cada ponto dado, com N e M ajustáveis:

$$y[n] = \frac{1}{N + M + 1} \sum_{k=-N}^M x[n - k],$$

sistema para o qual a resposta ao impulso unitário é dada por

$$\begin{aligned} h[n] &= \frac{1}{N + M + 1} \sum_{k=-N}^M \delta[n - k] = \\ &= \frac{1}{N + M + 1} \times \begin{cases} 1, & -N \leq n \leq M \\ 0, & M < n < -N \end{cases} \end{aligned}$$

2. Filtros não-recursivos em tempo discreto - continuação

A resposta na frequência do filtro é, então

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] e^{-j\omega n} = \frac{1}{N + M + 1} \sum_{n=-N}^M e^{-j\omega n}.$$

Quanto maiores forem os valores dos parâmetros M e N , mais selectivo será o filtro.

2. Filtros não-recursivos em tempo discreto - continuação

Outro exemplo de filtro não-recursivo, passa-alto, é dado por

$$y[n] = \frac{x[n] - x[n-1]}{2}.$$

De facto, em gamas de valores de n onde $x[n]$ varia pouco, $y[n]$ será pequeno. Reciprocamente, $y[n]$ será grande quando $x[n]$ variar rapidamente. Trata-se efectivamente de um filtro passa-alto.

A resposta ao impulso unitário é

$$h[n] = \frac{1}{2} (\delta[n] - \delta[n-1])$$

e portanto,

2. Filtros não-recursivos em tempo discreto - continuação

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] e^{-j\omega n} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} (\delta[n] - \delta[n-1]) e^{-j\omega n} = \\ &= \frac{1}{2} (1 - e^{-j\omega}) = \\ &= je^{-j\omega/2} \text{sen}(\omega/2). \end{aligned}$$

Trata-se de um filtro passa-alto embora pouco selectivo.

Consegue-se maior selectividade com filtros descritos por equações às diferenças mais complicadas.

A TRANSFORMADA de FOURIER em TEMPO CONTÍNUO

Maria do Carmo Martins

Março 2009

Introdução

Com o integral ou transformada de Fourier, generaliza-se a representação de sinais periódicos como soma de exponenciais complexas para a situação de sinais aperiódicos, considerados como sinais periódicos de período infinito, representados por “somas contínuas”, isto é, por integrais, de exponenciais complexas.

Estamos agora interessados em sinais aperiódicos em tempo contínuo, enquanto que no capítulo seguinte, trataremos dos sinais aperiódicos em tempo discreto.

4.1 Representação de sinais aperiódicos em tempo contínuo pela transformada de Fourier

No Exemplo 3.5, vimos a expansão em série de Fourier de uma onda quadrada de “largura” $2T_1$ e período T :

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & T_1 < |t| < T/2 \end{cases}$$

Os coeficientes determinados foram

$$a_k = \frac{2 \operatorname{sen}(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T},$$

para $k \neq 0$, sendo $\omega_0 = 2\pi/T$.

4.1 - continuação

Nos gráficos para $T = 4T_1$, $T = 8T_1$, $T = 16T_1$, verifica-se que há uma função que envolve todos os pontos discretos a_k ; podendo-se escrever essa função envelope como

$$k\omega_0 \rightarrow \omega \quad \Rightarrow \quad Ta_k = \frac{2 \operatorname{sen}(\omega T_1)}{\omega}$$

considerando agora ω como uma variável contínua.

Os valores dos a_k resultam da escolha de valores particulares para ω .

Notemos que a função envelope $\frac{2 \operatorname{sen}(\omega T_1)}{\omega}$ é independente do valor do período T , tomando-a como função de ω , variável contínua.

4.1 - continuação

Considerando então ω como variável contínua da qual depende a função envelope $\frac{2 \operatorname{sen}(\omega T_1)}{\omega}$ dos valores discretos Ta_k , vemos que este envelope não depende do valor de T , o período da onda quadrada, mas somente de ω , com T_1 como parâmetro. Ora, tomando T_1 como fixo e T variável, o gráfico da envolvente

$$\frac{2 \operatorname{sen}(\omega T_1)}{\omega}$$

é fixo também, mas o espaçamento entre sucessivos valores de a_k vai diminuindo consoante T vai aumentando, relativamente a T_1 .

4.1 - continuação

Vejamos 3 possíveis relações entre T_1 e T , isto é, 3 diferentes valores do período T da onda quadrada, sabendo que $T = 2\pi/\omega_0$ com ω_0 a frequência fundamental dessa onda quadrada. Obtemos

$$\text{a) } T = 4T_1 \quad \rightarrow \quad \omega^1 = \frac{\pi}{T_1} = \frac{\pi}{T/4} = \frac{4\pi}{T} = 2 \times \frac{2\pi}{T} = 2\omega_0$$

$$\text{b) } T = 8T_1 \quad \rightarrow \quad \omega^1 = \frac{\pi}{T_1} = \frac{\pi}{T/8} = \frac{8\pi}{T} = 4 \times \frac{2\pi}{T} = 4\omega_0$$

$$\text{c) } T = 16T_1 \quad \rightarrow \quad \omega^1 = \frac{\pi}{T_1} = \frac{\pi}{T/16} = \frac{16\pi}{T} = 8 \times \frac{2\pi}{T} = 8\omega_0$$

para 3 valores possíveis do valor de ω para o primeiro zero positivo, com valores simétricos para o 1º zero negativo. De forma semelhante se calculariam os restantes zeros.

4.1 - continuação

Pensando agora que um sinal aperiódico pode ser “visto” como um sinal periódico de período $T \rightarrow \infty$, concluímos que os diversos coeficientes a_k vão aproximando-se, cabendo cada vez mais coeficientes por exemplo no intervalo $[0, \omega^1]$. Ou seja, a distribuição discreta de coeficientes a_k passará a contínua.

Por outro lado, consideremos um sinal aperiódico $x(t)$, não nulo entre $-T_1$ e $+T_1$:

Este sinal não tem uma série de Fourier correspondente, pois não é periódico. Mas a sua repetição periódica, $\tilde{x}(t)$, com período $T > T_1$ já terá uma expansão em série de Fourier.

4.1 - continuação

Sendo $\tilde{x}(t)$ periódico de período $T > T_1$, podemos escrever

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

com

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \tilde{x}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt, \quad \text{sendo } \omega_0 = 2\pi/T,$$

onde, por conveniência, no integral anterior considera-se o intervalo $-T/2 \leq t \leq T/2$.

4.1 - continuação

Ora como $\tilde{x}(t) = x(t)$ para $|t| < T/2$ e $x(t) = 0$ fora deste intervalo, podemos escrever

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt.$$

Definindo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = X(j\omega)$$

tem-se para os coeficientes a_k :

$$a_k = \frac{1}{T} X(jk\omega_0) = \frac{1}{T} X(j\omega)|_{\omega=k\omega_0}$$

e, portanto,

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t}.$$

4.1 - continuação

Como $\omega_0 = 2\pi/T$, podemos reescrever a expressão de $\tilde{x}(t)$ como

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \omega_0.$$

Ora, quando $T \rightarrow \infty$, vem $\omega_0 = 2\pi/T$ cada vez mais pequeno, tendendo para zero. No caso presente, não só

$$\tilde{x}(t) \rightarrow x(t)$$

como então

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \omega_0 \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

4.1 - continuação

Partindo de um sinal aperiódico chegámos a um sinal periódico de período $T \rightarrow \infty$ com os resultados:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$
$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

Estas duas equações são referidas como o **par de Fourier** (ou par da transformada de Fourier). Sabido um sinal aperiódico $x(t)$, podemos calcular a sua transformada de Fourier $X(j\omega)$ e vice-versa. Num certo sentido são o mesmo sinal, um no domínio do tempo, outro no domínio da frequência.

2. Convergência da transformada de Fourier

É importante sabermos *à priori* se aqueles integrais do par de Fourier existem. As condições de Dirichlet para este caso são:

- ① $x(t)$ tem de ser absolutamente integrável, isto é,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < \infty.$$

- ② $x(t)$ terá de ter um número finito de máximos e mínimos em qualquer intervalo finito.
- ③ $x(t)$ só poderá ter um número finito de descontinuidades em qualquer intervalo finito, e cada uma dessas descontinuidades terá de ser finita.

Mais adiante, irá ser conveniente considerar também a transformada de Fourier de sinais periódicos - que não são absolutamente integráveis sobre um intervalo infinito. Para isso, teremos de recorrer à inclusão de impulsos unitários nas transformadas.

3. Exemplos: Exemplo 4.1

Considere o sinal

$$x(t) = e^{-at} u(t) \quad \text{com } a > 0.$$

Determine $X(j\omega)$.

Exemplo 4.2

Seja $x(t) = e^{-a|t|}$. Determine $X(j\omega)$.

Exemplo 4.3

Seja $x(t) = \delta(t)$. Determine $X(j\omega)$.

Exemplo 4.4

Seja o impulso rectangular

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & |t| > T_1 \end{cases}$$

Calcule $X(j\omega)$.

Exemplo 4.5

Seja

$$X(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < W \\ 0, & |\omega| > W \end{cases}$$

Determine $x(t)$.

Observação

Devido à frequência com que ocorrem funções do tipo

$$\frac{\text{sen}(\pi\theta)}{\pi\theta}$$

chama-se a este quociente a função $\text{sinc}(\theta)$:

$$\text{sinc}(\theta) \equiv \frac{\text{sen}(\pi\theta)}{\pi\theta}$$

Observação relativamente aos Exemplos 4.4 e 4.5

Tendo em conta o quociente anterior, os resultados dos Exemplos 4.4 e 4.5 podem ser reescritos:

$$\frac{2 \operatorname{sen}(\omega T_1)}{\omega} = 2 T_1 \operatorname{sinc} \left(\frac{\omega T_1}{\pi} \right)$$

e

$$\frac{\operatorname{sen}(Wt)}{\pi t} = \frac{W}{\pi} \operatorname{sinc} \left(\frac{Wt}{\pi} \right)$$

Note-se que quanto mais estreito for o impulso rectangular no tempo, mais largo será no domínio da frequência, e vice-versa. Ao mesmo tempo, quanto mais estreita for a função *sinc*, no tempo ou na frequência, mais elevado será o pico central.
(ver fig. 4.11. na pag 296)

4.2 Transformada de Fourier de sinais periódicos

Vamos agora mostrar como se deve considerar a transformada de Fourier de sinais periódicos.

Suponhamos um sinal $x(t)$ tal que a sua transformada de Fourier $X(j\omega)$ é dada por

$$X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0).$$

Então

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = e^{j\omega_0 t}.$$

Se $X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0)$, vem

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0) e^{j\omega t} d\omega$$

4.2 Transformada de Fourier de sinais periódicos - continuação

ou seja,

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

que não é mais do que a expansão em série de Fourier de uma função $x(t)$ periódica, com período $T = 2\pi/\omega_0$. Ou seja, uma função $x(t)$ periódica possuirá uma transformada de Fourier $X(j\omega)$ constituída por uma sequência de impulsos unitários, às frequências $k\omega_0$, com $k \in]-\infty, +\infty[$, e amplitudes $2\pi a_k$:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \longleftrightarrow X(j\omega) = 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0).$$

Exemplo 4.6

Consideremos novamente (o Exemplo 3.5) da onda quadrada

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & T_1 < |t| < T/2 \end{cases}$$

sinal periódico com período $T > T_1$. Os coeficientes da expansão em série de Fourier deste sinal foram calculados como sendo

$$a_k = \frac{\text{sen}(k\omega_0 T_1)}{\pi k}.$$

Consequentemente, concluímos imediatamente que a sua transformada de Fourier $X(j\omega)$ é dada por

Exemplo 4.6 - continuação

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi \frac{\text{sen}(k\omega_0 T_1)}{\pi k} \delta(\omega - k\omega_0) = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2 \text{sen}(k\omega_0 T_1)}{k} \delta(\omega - k\omega_0) \end{aligned}$$

cujo gráfico é, para $T = 4T_1$

Comparando este gráfico com o do Exemplo 3.5 onde tínhamos pontos discretos, temos agora impulsos de altura $2 \text{sen}(k\omega_0 T_1)/k$, sobre um eixo da variável contínua ω .

Exemplo 4.7

a) Seja $x(t) = \text{sen}(\omega_0 t)$, como no Exemplo 3.3. Temos

$$x(t) = -\frac{1}{2j}e^{-j\omega_0 t} + \frac{1}{2j}e^{j\omega_0 t}.$$

Determine $X(j\omega)$

b) Calcule $X(j\omega)$ sendo $x(t) = \cos(\omega_0 t)$.

Exemplo 4.8

Na teoria da amostragem, é muito útil a sequência de impulsos unitários

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$$

periódica com período T . Qual a sua transformada de Fourier $X(j\omega)$?

4.3 Propriedades da transformada de Fourier de sinais em tempo contínuo

Muitas das propriedades da transformada integral de Fourier têm correspondentes nas propriedades das séries de Fourier já estudadas.

Notação:

$$x(t) \xrightarrow{T.F.} X(j\omega) \quad : \quad X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} \quad ; \quad x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(j\omega)\}$$

$$y(t) \xrightarrow{T.F.} Y(j\omega) \quad : \quad Y(j\omega) = \mathcal{F}\{y(t)\} \quad ; \quad y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{Y(j\omega)\}$$

4.3 - continuação

1) Linearidade:

$$a x(t) + b y(t) \xrightarrow{T.F.} a X(j\omega) + b Y(j\omega).$$

2) Desvio temporal:

$$x(t - t_0) \xrightarrow{T.F.} e^{-j\omega t_0} X(j\omega).$$

4.3 - continuação

3) Desvio na frequência:

$$e^{j\omega_0 t} x(t) \xrightarrow{T.F.} X(j(\omega - \omega_0))$$

4) Conjugação complexa:

$$x^*(t) \xrightarrow{T.F.} X^*(-j\omega)$$

5) Inversão temporal:

$$x(-t) \xrightarrow{T.F.} X(-j\omega).$$

4.3 - continuação

6) Escalamento no tempo e na frequência:

$$x(at) \xrightarrow{T.F.} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$$

7) Convolução:

$$x(t) * y(t) \xrightarrow{T.F.} X(j\omega) Y(j\omega)$$

8) Multiplicação:

$$x(t) y(t) \xrightarrow{T.F.} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\theta) Y(j(\omega - \theta)) d\theta$$

4.3- continuação

9) Diferenciação no tempo:

$$\frac{d}{dt}x(t) \xrightarrow{T.F.} j\omega X(j\omega)$$

10) Integração temporal:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)dt \xrightarrow{T.F.} \frac{1}{j\omega} X(j\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$$

11) Diferenciação na frequência:

$$t x(t) \xrightarrow{T.F.} j \frac{d}{d\omega} X(j\omega)$$

12) Simetria de Conjugação para sinais reais:

$$x(t) \in \mathbb{R} \quad \xrightarrow{T.F.} \quad \left\{ \begin{array}{l} X(j\omega) = X^*(-j\omega) \\ \Re\{X(j\omega)\} = \Re\{X(-j\omega)\} \\ \Im\{X(j\omega)\} = -\Im\{X(-j\omega)\} \\ |X(j\omega)| = |X(-j\omega)| \\ \arg\{X(j\omega)\} = -\arg\{X(-j\omega)\} \end{array} \right.$$

4.3 - continuação

13) Simetria para sinais reais e pares:

$$x(t) \text{ real e par} \xrightarrow{T.F.} X(j\omega) \text{ real e par}$$

14) Simetria para sinais reais e ímpares

$$x(t) \text{ real e ímpar} \xrightarrow{T.F.} X(j\omega) \text{ imaginário e ímpar}$$

4.3 - continuação

15) Decomposição par - ímpar para sinais reais:

$$\begin{aligned}x_e[n] = Ev\{x[n]\} &\xrightarrow{T.F.} \Re\{X(j\omega)\} \\x_o[n] = Od\{x[n]\} &\xrightarrow{T.F.} j \Im\{X(j\omega)\}\end{aligned}$$

16) Relação de Parseval:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

Detalhes de algumas propriedades

Vejamos alguns detalhes de algumas destas propriedades:

- **1. Linearidade**

Sendo

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt,$$

é claro que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{a x(t) + b y(t)\} &= \mathcal{F}\{a x(t)\} + \mathcal{F}\{b y(t)\} \\ &= a\mathcal{F}\{x(t)\} + b\mathcal{F}\{y(t)\} \\ &= a X(j\omega) + b Y(j\omega)\end{aligned}$$

2. Desvio temporal

Como $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$, substituindo t por $t - t_0$, vem

$$\begin{aligned} x(t - t_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega(t-t_0)} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [e^{-j\omega t_0} X(j\omega)] e^{j\omega t} d\omega \end{aligned}$$

e portanto, $\mathcal{F}\{x(t - t_0)\} = e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$.

Notemos que o módulo da transformada de Fourier se mantém inalterado:

$$|\mathcal{F}\{x(t - t_0)\}| = |e^{-j\omega t_0} X(j\omega)| = |e^{-j\omega t_0}| \times |X(j\omega)| = |\mathcal{F}\{x(t)\}|$$

Exemplo 4.9

Seja o sinal

$$x(t) = \frac{1}{2}x_1(t - 2.5) + x_2(t - 2.5)$$

onde x_1 e x_2 são impulsos rectangulares definidos por

$$x_1(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq \frac{1}{2} \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

e

$$x_2(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq \frac{3}{2} \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Determine a transformada de Fourier $X(j\omega)$.

3. Conjugação complexa e simetria de conjugação

Como vimos,

$$x(t) \xrightarrow{T.F.} X(j\omega) \Rightarrow x^*(t) \xrightarrow{T.F.} X^*(-j\omega)$$

Corolário:

Se $x(t) \in \mathbb{R}$, então

$$X^*(-j\omega) = X(j\omega),$$

a simetria de conjugação para sinais $x(t)$ reais.

Mais consequências

(i) na forma algébrica,

$$X(j\omega) = \Re\{X(j\omega)\} + j \Im\{X(j\omega)\}$$

$$X^*(j\omega) = \Re\{X(j\omega)\} - j \Im\{X(j\omega)\}$$

Ora, se $x(t) \in \mathbb{R}$ então

$$X^*(j\omega) = X(-j\omega)$$

donde

$$\Re\{X(j\omega)\} = \Re\{X(-j\omega)\} \quad \text{e} \quad \Im\{X(j\omega)\} = -\Im\{X(-j\omega)\}$$

pelo que

- $\Re\{X(j\omega)\}$ é par em ω
- $\Im\{X(j\omega)\}$ é ímpar em ω

Mais consequências - continuação

(ii) Na forma polar

$$X(j\omega) = |X(j\omega)|e^{arg\{X(j\omega)\}}$$

$$X^*(j\omega) = |X(j\omega)|e^{-arg\{X(j\omega)\}}$$

Portanto, se $x(t) \in \mathbb{R}$ então

$$X^*(j\omega) = X(-j\omega)$$

donde

$$\begin{cases} |X(j\omega)| \text{ é par em } \omega \\ arg\{X(j\omega)\} \text{ é ímpar em } \omega \end{cases}$$

Observação

Tendo em conta as consequências (i) e (ii) tem-se a seguinte conclusão:

para **sinais** $x(t)$ **reais**, basta calcular a sua transformada de Fourier $X(j\omega)$ para $\omega > 0$ já que

- $\Re\{X(j\omega)\}$ e $|X(j\omega)|$ são pares em ω
e
- $\Im\{X(j\omega)\}$ e $\arg\{X(j\omega)\}$ são ímpares em ω

Consequências - continuação

(iii) Se $x(t) \in \mathbb{R}$ e também é par em t , então $X(j\omega)$ também será real e par em ω .

(iv) Se $x(t) \in \mathbb{R}$ e também é ímpar em t , então $X(j\omega)$ é imaginário puro e ímpar em ω .

Consequências - continuação

(v) Sabemos que podemos decompor um sinal real $x(t)$ na soma de um sinal par em t com um sinal ímpar em t :

$$x(t) = x_e(t) + x_o(t) = Ev\{x(t)\} + Od\{x(t)\}, \quad \text{com } x(t) \in \mathbb{R}.$$

Assim sendo

$$\underbrace{\mathcal{F}\{x(t)\}} = \mathcal{F}\{x_e(t)\} + \mathcal{F}\{x_o(t)\} \quad (\text{linearidade})$$

$$X(j\omega) = \Re\{X(j\omega)\} + j \Im\{X(j\omega)\}$$

e de (iii) e (iv) acima, conclui-se que

$$\mathcal{F}\{x_e(t)\} = \Re\{X(j\omega)\}, \quad \mathcal{F}\{x_o(t)\} = j \Im\{X(j\omega)\}$$

Exemplo 4.10

Do Exemplo 4.2 obtivemos

$$\mathcal{F}\{x(t) = e^{-a|t|}\} = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}, \quad \text{com } a > 0.$$

Calculemos este resultado com base nas propriedades agora estudadas.

4. Diferenciação (derivação) e integração

(i) Dado que $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$, então

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) (j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [(j\omega)X(j\omega)] e^{j\omega t} d\omega.$$

Isto é,

$$x(t) \xrightarrow{T.F.} X(j\omega) \quad \Rightarrow \quad \frac{dx(t)}{dt} \xrightarrow{T.F.} (j\omega) X(j\omega)$$

(ii) Quanto à integração, temos

$$x(t) \xrightarrow{T.F.} X(j\omega) \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \xrightarrow{T.F.} \frac{1}{(j\omega)} X(j\omega) + \pi X(0) \delta(\omega)$$

Exemplo 4.11

a) Determine a transformada de Fourier de $u(t)$ a partir da transformada de $\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$.

b) Determine a transformada de Fourier de $\delta(t)$ a partir da transformada de $u(t)$.

Exemplo 4.12

Considere o sinal $x(t)$ cujo gráfico é

Determine a sua transformada de Fourier a través da derivada de $x(t)$.

5. Escalamento no tempo e na frequência

Se

$$x(t) \xrightarrow{T.F.} X(j\omega)$$

então

$$x(at) \xrightarrow{T.F.} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$$

Em particular, para $a = -1$ tem-se

$$x(-t) \xrightarrow{T.F.} X(-j\omega).$$

6. Dualidade

Vimos que

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

e

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

A semelhança entre estas duas expressões leva a que ocorra uma dualidade entre funções e suas transformadas de Fourier num sentido que ficará claro com alguns exemplos.

- Tenhamos em conta os Exemplos 4.4 e 4.5;

Exemplos 4.13

Determine a transformada de Fourier $G(j\omega)$ do sinal

$$g(t) = \frac{2}{1 + t^2}.$$

6. Dualidade - continuação

A dualidade entre sinais $x(t)$ e suas transformadas de Fourier $X(j\omega)$ estende-se a outras propriedades. Por exemplo, se

$$T.F. \left\{ \frac{dx(t)}{dt} \right\} = j\omega X(j\omega)$$

é de suspeitar que $\frac{dX(j\omega)}{d\omega}$ esteja relacionada com $t x(t)$.

De forma semelhante, também podemos antever que:

$$T.F. \{ e^{j\omega_0 t} x(t) \} = X(j(\omega - \omega_0))$$

e ainda que

$$T.F. \left\{ \frac{-1}{jt} x(t) + \pi x(0) \delta(t) \right\} = \int_{-\infty}^{\omega} x(\nu) d\nu$$

7. Relação de Parseval

Se $x(t)$ e $X(j\omega)$ são o par de Fourier, então

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

A interpretação física é a mesma que anteriormente: a energia de um sinal $x(t)$ tanto pode ser calculada integrando no tempo a potência $|x(t)|^2$ desse sinal, como integrando na frequência a densidade espectral de energia $|X(j\omega)|^2$.

Exemplo 4.14

Sejam os sinais $X_1(j\omega)$ e $X_2(j\omega)$, no domínio da frequência, dados pelos gráficos

Determine para cada um deles $E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$ e $D = \left. \frac{d}{dt} x(t) \right|_{t=0}$.

A TRANSFORMADA de FOURIER em TEMPO CONTÍNUO

Maria do Carmo Martins

Março de 2009

Introdução

Passamos agora a duas propriedades de importância crucial, a da convolução (relacionada com a filtragem) e a da multiplicação (relacionada com a amostragem).

4.4 Propriedade da convolução

Vimos, no Capítulo 3, que sendo um sinal de entrada periódico $x(t)$, de período T , com série de Fourier

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

então o correspondente sinal de saída, para um SLIT, será dado por

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k H(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$$

onde

$$H(jk\omega_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

e $h(t)$ é a resposta do SLIT ao impulso unitário, $\delta(t)$.

4.4 Propriedade da convolução - continuação

Para **sinais aperiódicos** em geral, vem

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Como será neste caso $y(t)$?

4.4 Propriedade da convolução - continuação

Em conclusão:

$$y(t) = \underbrace{x(t) * h(t)}_{=h(t)*x(t)} \xleftrightarrow{T.F.} Y(j\omega) = \underbrace{X(j\omega) H(j\omega)}_{=H(j\omega)X(j\omega)}$$

Este resultado é muito importante e traduz-se no seguinte: a transformada de Fourier da convolução de dois sinais é o produto das respectivas transformadas de Fourier.

4.4 Propriedade da convolução - continuação

As duas configurações seguintes são possíveis e equivalentes:

$$x(t) \longrightarrow H_1(j\omega) \longrightarrow H_2(j\omega) \longrightarrow y(t)$$

$$x(t) \longrightarrow H_2(j\omega) \longrightarrow H_1(j\omega) \longrightarrow y(t)$$

(comutatividade do produto de $H_1(j\omega)$ com $H_2(j\omega)$), ou seja

$$x(t) \longrightarrow H_1(j\omega)H_2(j\omega) = H_2(j\omega)H_1(j\omega) \longrightarrow y(t)$$

com $H(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt$, (existente se $h(t)$ satisfizer as condições de Dirichlet).

Exemplo 4.15

Seja, para um SLIT em tempo contínuo,

$$h(t) = \delta(t - t_0).$$

Qual será $y(t)$ para uma entrada $x(t)$?

Exemplo 4.16

Considere um SLIT diferenciador, isto é, um SLIT para o qual o sinal de entrada $x(t)$ e o sinal de saída $y(t)$ estão relacionados por

$$y(t) = \frac{d x(t)}{dt}.$$

Determine $H(j\omega)$.

Exemplo 4.17

Considere um SLIT integrador, isto é, um SLIT especificado pela equação:

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau.$$

Determine $Y(j\omega)$.

Exemplo 4.18

Seja um filtro passa-baixo ideal, com

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

Reescreva $H(j\omega)$.

Exemplo 4.19

Seja um SLIT caracterizado por

$$h(t) = e^{-at}u(t), \quad \text{com } a > 0$$

ao qual é aplicado um sinal de entrada

$$x(t) = e^{-bt}u(t), \quad \text{com } b > 0.$$

Determine $y(t)$.

Exemplo 4.20

Suponhamos agora um filtro passa-baixo ideal cuja resposta ao impulso unitário é da forma

$$h(t) = \frac{\text{sen}(\omega_c t)}{\pi t}.$$

Qual a resposta $y(t)$ ao sinal de entrada $x(t)$ dado por

$$x(t) = \frac{\text{sen}(\omega_i t)}{\pi t}.$$

4.5 A propriedade da multiplicação

Tendo ainda em conta a dualidade entre função e transformada de Fourier, prova-se que

$$r(t) = s(t)p(t) \quad \xleftrightarrow{T.F.} \quad R(j\omega)$$

com

$$R(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(j\theta) P(j(\omega - \theta)) d\theta = \frac{S(j\omega) * P(j\omega)}{2\pi}$$

Observação

A propriedade anterior tem grande importância na questão da modulação de amplitude de um sinal $p(t)$ por um outro $s(t)$. Outra aplicação é o projecto de filtros passa-banda cuja frequência central de corte é sintonizável.

Exemplo 4.21

Seja o sinal

$$p(t) = \cos(\omega_0 t) \quad \longrightarrow \quad P(j\omega) = \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)$$

e também um sinal $s(t)$ tal que $S(j\omega)$ tem o seguinte gráfico

Determine $R(j\omega)$ do sinal $r(t) = s(t)p(t)$.

Exemplo 4.22

Considere-se a função

$$r(t) = s(t)p(t)$$

do exemplo anterior. Qual será o espectro $G(j\omega)$ da função

$$g(t) = r(t) p(t) = s(t) p(t) p(t)$$

com $p(t) = \cos(\omega_0 t)$?

Exemplo 4.23

Vejamos outra aplicação da fórmula da multiplicação:

Determinar a transformada de Fourier do sinal

$$x(t) = \frac{\text{sen}(t) \text{sen}(t/2)}{\pi t^2}.$$

§ 4.5 Filtragem selectiva na frequência com frequência central variável

Podemos construir filtros de sinais, passa-banda por exemplo, com circuitos contendo resistências e condensadores, projectados para um banda que se pode regular modificando, com botões, as características desses circuitos

No entanto, pode ter interesse projectar um filtro de parâmetros constantes, que só deixem passar uma banda pré-fixada de frequências. Para que sejam, mesmo assim, de aplicabilidade geral, podemos filtrar sinais de entrada para várias frequências de interesse modificando, não o circuito, mas sim o próprio sinal de entrada, por modulação com uma frequência facilmente modificável, tirando partido das propriedades de desvio na frequência e de multiplicação atrás referidas.

4.6 Filtragem selectiva na frequência com frequência central variável - continuação

Suponhamos então um sinal qualquer $x(t)$, do qual queremos extrair uma dada gama de componentes em baixas frequências. Poderíamos projectar um filtro cuja função de transferência está centrada num valor $-\omega_c$ sintonizável:

Mas, em vez desse filtro sintonizável, também podemos usar xum filtro passa-banda entre $-\omega_c$ e $+\omega_c$, fixas

4.6 Filtragem selectiva na frequência com frequência central variável - continuação

Para isso, usamos o seguinte esquema:

Aqui o sinal de entrada $x(t)$ é multiplicado por uma exponencial complexa $e^{j\omega_c t}$, estando a frequência ω_c à nossa disposição, ao passo que ω_0 está fixa.

4.6 Filtragem selectiva na frequência com frequência central variável - continuação

Como vimos atrás, na propriedade do desvio na frequência, multiplicar um sinal $x(t)$ por $e^{j\omega_c t}$ é desviar o seu espectro na frequência $X(j\omega)$ de forma a ficar centrado em ω_c ; se o estava em $\omega = 0$:

$$e^{j\omega_c t} x(t) \xrightarrow{T.F.} X(j(\omega - \omega_c)) = Y(j\omega)$$

4.6 Filtragem selectiva na frequência com frequência central variável - continuação

4.6 Filtragem selectiva na frequência com frequência central variável - continuação

A seguir, o filtro passa-baixo $H(j\omega)$ selecciona uma gama de frequências entre $-\omega_0$ e $+\omega_0$:

e a multiplicação de $w(t)$ por $e^{-j\omega_c t}$ desvia o espectro na frequência de $W(j\omega)$, já filtrado, novamente de um valor ω_c mas para a esquerda, para frequências negativas, usando a mesma propriedade de desvio na frequência.

4.6 Filtragem selectiva na frequência com frequência central variável - continuação

A acção deste sistema, com um filtro passa-baixo de frequência central $\omega = 0$ fixa e banda $2\omega_0$, fica assim equivalente à acção de um filtro passa-baixo, com uma função característica com valor 1, de largura $2\omega_0$ mas centrado em $\omega = -\omega_c$

Observação

Podemos também chegar a esses mesmos resultados através da fórmula da convolução:

Se

$$y(t) = e^{j\omega_c t} x(t),$$

então a transformada de Fourier de $y(t)$ é:

$$Y(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi \delta(\theta - \omega_c) X(\omega - \theta) d\theta = \underbrace{X(j(\omega - \omega_c))}_{\text{desvio para a direita}}$$

uma vez que

- $T.F.\{e^{j\omega_c t}\} = 2\pi\delta(\omega - \omega_c)$;
- $T.F.\{x(t)\} = X(j\omega)$

Observação - continuação

De forma idêntica, a fórmula de convolução também nos dá o seguinte:

Se

$$f(t) = e^{-j\omega_c t} w(t)$$

então

$$F(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi \delta(\theta + \omega_c) W(\omega - \theta) d\theta = \underbrace{W(j(\omega + \omega_c))}_{\text{desvio para a esquerda}}$$

§ 4.7 Sistemas caracterizados por equações diferenciais lineares de coeficientes constantes

Estamos agora interessados em determinar a resposta na frequência $H(j\omega)$ de SLIT's em que os sinais de entrada $x(t)$ e de saída $y(t)$ estão relacionados por uma EDO da forma

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

supondo que

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt$$

existe.

4.7 - continuação

Já foram calculadas várias funções de transferência $H(j\omega)$ com base nas equações diferenciais que regiam o comportamento dos circuitos de filtragem. Basicamente, o que aqui teríamos de fazer, para a EDO geral acima, seria considerar que

$$\text{se } x(t) = e^{j\omega t} \text{ então } y(t) = H(j\omega)e^{j\omega t}.$$

Refira-se que $e^{j\omega t}$ é uma função própria daquele SLIT, com correspondente valor próprio $H(j\omega)$. Substituindo na EDO $y(t)$ por $H(j\omega)e^{j\omega t}$ e $x(t)$ por $e^{j\omega t}$, obtemos uma equação algébrica cuja solução daria $H(j\omega)$.

4.7 - continuação

No entanto, vamos usar aqui um outro método, baseado na propriedade de diferenciação da transformada de Fourier

$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{T.F.} j\omega X(j\omega)$$

e no conhecimento que, em geral, $Y(j\omega) = H(j\omega) X(j\omega)$, ou seja, que

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)},$$

onde

- $X(j\omega)$ é a TF da entrada $x(t)$;
- $Y(j\omega)$ é a TF da saída $y(t)$ e
- $H(j\omega)$ é a TF da resposta ao impulso $h(t)$.

4.7 - continuação

Ora, aplicando a T. F. àquela EDO, vem

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left\{\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k}\right\} &= \mathcal{F}\left\{\sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}\right\} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sum_{k=0}^N a_k \mathcal{F}\left\{\frac{d^k y(t)}{dt^k}\right\} &= \sum_{k=0}^M b_k \mathcal{F}\left\{\frac{d^k x(t)}{dt^k}\right\} \Leftrightarrow \text{(Lin. da T.F.)} \\ \Leftrightarrow \sum_{k=0}^N a_k (j\omega)^k \mathcal{F}\{y(t)\} &= \sum_{k=0}^M b_k (j\omega)^k \mathcal{F}\{x(t)\} \Leftrightarrow \text{(Dif.)} \\ \Leftrightarrow \sum_{k=0}^N a_k (j\omega)^k Y(j\omega) &= \sum_{k=0}^M b_k (j\omega)^k X(j\omega) \Leftrightarrow\end{aligned}$$

4.7 - continuação

$$\Leftrightarrow Y(j\omega) \left(\sum_{k=0}^N a_k(j\omega)^k \right) = X(j\omega) \left(\sum_{k=0}^M b_k(j\omega)^k \right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k(j\omega)^k}{\sum_{k=0}^N a_k(j\omega)^k}$$

Consequentemente, dada a equação diferencial que descreve o comportamento do SLIT, isto é, dados os a_k e os b_k , aquela fracção racional determina **completamente** a função de transferência $H(j\omega)$.

Exemplo 4.24

Seja o SLIT descrito pela EDO

$$\frac{dy(t)}{dt} + a y(t) = x(t), \quad a > 0.$$

Determine $H(j\omega)$ e $h(t)$.

Exemplo 4.25

Considere um SLIT estável que é caracterizado pela equação diferencial

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t).$$

Determine $H(j\omega)$ e $h(t)$.

Exemplo 4.26

Consideremos o mesmo SLIT do exemplo anterior, pretende-se saber a saída $y(t)$ para um sinal de entrada dado por

$$x(t) = e^{-t}u(t) \quad \longrightarrow \quad X(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega}$$

A TRANSFORMADA de FOURIER em TEMPO DISCRETO

Maria do Carmo Martins

Março de 2009

Introdução

Estudamos agora a transformada de Fourier de sinais aperiódicos (e também periódicos) em tempo discreto, explorando semelhanças e salientando também as diferenças, com o caso contínuo.

§ 1. Representação de sinais aperiódicos pela transformada de Fourier discreta

À semelhança do que fizemos para sinais aperiódicos em tempo contínuo, também aqui tomamos repetições periódicas de um dado sinal $x[n]$ em tempo discreto, repetindo-o com um período N , que eventualmente tomaremos como tendendo para ∞ ($N \rightarrow \infty$); ao prolongamento periódico do sinal aperiódico $x[n]$ chamaremos $\tilde{x}[n]$.

1- continuação

Sendo $\tilde{x}[n]$ periódico de período N , sabemos que a série de Fourier em tempo discreto

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$$

onde

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} \tilde{x}[n] e^{-jk(2\pi/N)n}$$

sendo estes somatórios executados sobre um período qualquer. Podemos escolhê-lo de forma a incluir só o intervalo de $-N_1$ a $+N_2$.

1- continuação

Mas, neste intervalo, $\tilde{x}[n] = x[n]$ e $x[n]$ é nulo fora deste intervalo. Podemos então escrever

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} \tilde{x}[n] e^{-jk(2\pi/N)n} = \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{N_2} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n} = \frac{1}{N} X(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-jk\omega_0 n} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n}, \end{aligned}$$

onde $\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$ e $\omega = k\omega_0 = k\frac{2\pi}{N}$.

1- continuação

Notando que $\frac{1}{N} = \frac{\omega_0}{2\pi}$, também vem

$$\begin{aligned}\tilde{x}[n] &= \sum_{k=\langle N \rangle} \frac{1}{N} X(e^{jk\omega_0}) e^{jk\omega_0 n} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=\langle N \rangle} X(e^{jk\omega_0}) e^{jk\omega_0 n} \omega_0\end{aligned}$$

Quando $N \rightarrow \infty$, este somatório tende para um integral, como no Capítulo anterior, levando a

$$\tilde{x}[n] \rightarrow x[n] \quad \text{com} \quad x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

sobre um intervalo qualquer de integração de extensão 2π .

1- continuação

Concluimos então que

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

com

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n} \quad \text{periódica em } \omega, \text{ com período } 2\pi.$$

É este par o **par de Fourier** que pretendíamos em tempo discreto. A expressão que dá $x[n]$ é a **equação de síntese** e a que dá $X(e^{j\omega})$ é a **equação de análise**. $X(e^{j\omega})$ também aqui é chamado **espectro do sinal** $x[n]$.

Contrastes com o par de Fourier em tempo contínuo

- 1 Aqui, o espectro $X(e^{j\omega})$ é periódico com período 2π , em ω .
- 2 O intervalo de integração na equação de síntese é finito (e igual a 2π).

Ambos os contrastes são consequência da identidade entre sinais em tempo discreto cujas frequências diferem de um múltiplo de 2π .

1 - continuação

Como já vimos no Cap. 1, a periodicidade da exponencial complexa $e^{j\omega n}$ com período 2π em ω , leva a que e^{j0n} e $e^{j2\pi n}$ sejam o mesmo sinal; e de facto,

$$e^{j0n} = e^{j2\pi n} = e^{j2 \times 2\pi n} = e^{-j2 \times 2\pi n} = \dots$$

Consequentemente,

- e^{j0n} , $e^{j2\pi n}$, \dots são componentes de **baixa frequência**.

Em contrapartida,

- $e^{j\pi n}$, $e^{j3\pi n}$, $e^{-j3\pi n}$, \dots são componentes de **alta frequência**.

1 - continuação

Como o espectro $X(e^{j\omega})$ é também periódico com período 2π em ω , segue-se que, por exemplo, o sinal $x_1[n]$ abaixo só tem componentes de baixa frequência, o que quer dizer que $x_1[n]$ varia lentamente no tempo discreto:

1 - continuação

Contrariamente, por exemplo, o sinal $x_2[n]$ abaixo varia rapidamente e tem um espectro com maior intensidade nas altas frequências ($\pm\pi, \pm3\pi$, etc.)

Exemplo 5.1

Considere o sinal

$$x[n] = a^n u[n], \quad |a| < 1 \text{ e } a \neq 0.$$

Determine $X(e^{j\omega})$.

Exemplo 5.2

Considere o sinal

$$x[n] = a^{|n|}, \quad |a| < 1.$$

Determine a transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$.

Exemplo 5.3

Considere o impulso rectangular

$$x[n] = \begin{cases} 1, & |n| \leq N_1 \\ 0, & |n| > N_1 \end{cases}$$

Determine a transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$.

Convergência das transformadas de Fourier em tempo discreto

No par de Fourier discreto,

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

não oferece problemas de convergência porque o integral é executado sobre um intervalo finito.

Em contrapartida, o somatório

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

irá convergir só se se verificar a condição

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]| < \infty$$

Convergência das transformadas de Fourier em tempo discreto - continuação

ou então, se o sinal discreto $x[n]$ contém uma energia finita, isto é,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 < \infty.$$

Além disso, também não ocorrerá o fenómeno de Gibbs, à semelhança do que ocorre com as séries de Fourier de sinais discretos periódicos. Este facto pode ser verificado tomando uma aproximação para $x[n]$:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad \xrightarrow{\sim} \quad \hat{x}[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

que leva a $\hat{x}[n] = x[n]$ quando $W \rightarrow \pi$.

Exemplo 5.4

Seja o sinal

$$x[n] = \delta[n].$$

Determine $X(e^{j\omega})$ e uma aproximação $\hat{x}[n]$.

2. Transformada de Fourier de sinais periódicos em tempo discreto

À semelhança do que fizemos para sinais periódicos em tempo contínuo, também aqui podemos considerar a transformada de Fourier de **sinais periódicos** em tempo discreto.

Seja então o sinal aperiódico

$$x[n] = e^{j\omega_0 n}.$$

Em tempo contínuo, $TF\{e^{j\omega_0 t}\}$ dava um impulso unitário em $\omega = \omega_0$. Um resultado semelhante é de esperar aqui, mas agora com a obrigatoriedade de ser periódico com período 2π .

2. Transformada de Fourier de sinais periódicos em tempo discreto - continuação

De facto, obtemos

$$x[n] = e^{j\omega_0 n} \longrightarrow X(e^{j\omega}) = \underbrace{\sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi\ell)}_{\text{sequência de impulsos unitários}}$$

2 - continuação

o que se pode confirmar pela transformada inversa:

$$\begin{aligned}x[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \\&= \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} 2\pi \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi\ell) e^{j\omega n} d\omega\end{aligned}$$

e tomando o intervalo 2π como envolvendo o impulso em $\omega_0 + 2\pi r$ (e só este), fica

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = e^{j(\omega_0 + 2\pi r)n} = e^{j\omega_0 n}.$$

2 - continuação

Vejamos agora uma repetição periódica, de período N , de exponenciais complexas, da forma

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n}, \quad a_k \text{ periódicos com período } N$$

que é uma combinação linear de sinais do tipo $e^{j\omega_0 n}$. A sua transformada de Fourier será dada por

$$\begin{aligned} TF\{x[n]\} &= X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n} e^{-j\omega n} = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[e^{jk(2\pi/N)n} \right] e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{k=\langle N \rangle} a_k \mathcal{F}\{e^{jk(2\pi/N)n}\}. \end{aligned}$$

2 - continuação

Ora, como $\mathcal{F}\{e^{j\omega_0 n}\} = \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi\ell)$, então

$$a_k \mathcal{F}\{e^{jk(2\pi/N)n}\} = a_k \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} 2\pi \delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{N} - 2\pi\ell\right),$$

uma sequência infinita de impulsos unitários localizados em $\omega = k\frac{2\pi}{N} + 2\pi\ell$, com $\ell \in]-\infty, +\infty[$. Fica portanto,

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} 2\pi \delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{N} - 2\pi\ell\right).$$

Tomando o intervalo k , por exemplo, entre $k = 0$ e $k = N - 1$, vem:

2 - continuação

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{k=0}^{N-1} a_k \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} 2\pi \delta \left(\omega - k \frac{2\pi}{N} - 2\pi\ell \right) = \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta \left(\omega - k \frac{2\pi}{N} - 2\pi\ell \right) \end{aligned}$$

para cada valor de k (de 0 a $N - 1$), temos uma sequência de impulsos, todos de igual valor $2\pi a_k$, e periódicos de período 2π . Assim sendo, em vez de estender essa periodicidade com o índice ℓ , basta deixarmos o índice k percorrer valores de $-\infty$ a $+\infty$ e expressar $X(e^{j\omega})$ na forma

2 - continuação

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{N}\right)$$

representando desta forma a mesma sequência de impulsos, repetindo o padrão de coeficientes $2\pi a_k$.

Exemplo 5.5

Seja o sinal periódico

$$x[n] = \cos(\omega_0 n) = \frac{1}{2}e^{j\omega_0 n} + \frac{1}{2}e^{-j\omega_0 n}$$

com $\omega_0 = \frac{2\pi}{5}$. Determine a transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$.

Exemplo 5.6

Seja a sequência de impulsos unitários

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n - kN].$$

Determine a transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$.

3. Propriedades da transformada de Fourier em tempo discreto

Muitas das propriedades das transformadas de Fourier em tempo discreto têm demonstrações cujos passos são os directos correspondentes do caso do tempo contínuo. Concentramo-nos nas que apresentam maiores diferenças. A totalidade das propriedades de interesse estão apresentadas na tabela 5.1.

Notação

Com $x[n]$ aperiódico em n , $\mathcal{F}\{x[n]\} = X(e^{j\omega})$ é periódico com período 2π .

Então

$$x[n] = \mathcal{F}^{-1}\{X(e^{j\omega})\} \quad \text{ou} \quad x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega})$$

e também

$$y[n] = \mathcal{F}^{-1}\{Y(e^{j\omega})\} \quad \text{ou} \quad y[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} Y(e^{j\omega})$$

Propriedades da transformada de Fourier em tempo discreto

1) Linearidade:

$$a x[n] + b y[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} a X(e^{j\omega}) + b Y(e^{j\omega}).$$

2) Desvio temporal:

$$x[n - n_0] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega}).$$

3 - continuação

3) Desvio na frequência:

$$e^{j\omega_0 n} x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j(\omega-\omega_0)})$$

4) Conjugação complexa:

$$x^*[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X^*(e^{-j\omega})$$

5) Inversão temporal:

$$x[-n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{-j\omega}).$$

3. - continuação

6) Expansão temporal:

$$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[n/k], & n = \text{múltiplo de } k \\ 0, & n \neq \text{múltiplo de } k \end{cases} \quad \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \quad X(e^{jk\omega})$$

7) Convolução:

$$x[n] * y[n] \quad \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \quad X(e^{j\omega}) Y(e^{j\omega})$$

8) Multiplicação:

$$x[n] y[n] \quad \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \quad \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\theta}) Y(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$$

3 - continuação

9) Diferenciação no tempo:

$$x[n] - x[n-1] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} (1 - e^{-j\omega}) X(e^{j\omega})$$

10) Acumulação (“integração”):

$$\sum_{k=-\infty}^n x[k] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} X(e^{j\omega})$$

11) Diferenciação na frequência:

$$n x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} j \frac{d}{d\omega} X(e^{j\omega})$$

12) Simetria da Conjugação para sinais reais:

$$x[n] \in \mathbb{R} \quad \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \quad \left\{ \begin{array}{ll} X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega}) \\ \Re\{X(e^{j\omega})\} = \Re\{X(e^{-j\omega})\} & (\text{par}) \\ \Im\{X(e^{j\omega})\} = -\Im\{X(e^{-j\omega})\} & (\text{ímpar}) \\ |X(e^{j\omega})| = |X(e^{-j\omega})| & (\text{par}) \\ \arg\{X(e^{j\omega})\} = -\arg\{X(e^{-j\omega})\} & (\text{ímpar}) \end{array} \right.$$

13) Simetria para sinais reais e pares:

$$x[n] \text{ real e par} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega}) \text{ real e par}$$

14) Simetria para sinais reais e ímpares

$$x[n] \text{ real e ímpar} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega}) \text{ imaginário puro e ímpar}$$

3 - continuação

15) Decomposição de sinais reais em componentes par e ímpar:

$$x[n] \in \mathbb{R} \begin{cases} x_e[n] = Ev\{x[n]\} & \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \Re\{X(e^{j\omega})\} \\ x_o[n] = Od\{x[n]\} & \xleftrightarrow{\mathcal{F}} j \Im\{X(e^{j\omega})\} \end{cases}$$

16) Relação de Parseval para sinais não periódicos:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega.$$

Vejamos alguns detalhes das propriedades da transformada de Fourier em tempo discreto:

- **1) Linearidade**

Se

$$x_1[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_1(e^{j\omega}) \quad \text{e} \quad x_2[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_2(e^{j\omega})$$

então

$$a x_1[n] + b x_2[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} a X_1(e^{j\omega}) + b X_2(e^{j\omega})$$

2) Periodicidade na frequência ω

A transformada de Fourier em tempo discreto $X(e^{j\omega})$ é sempre periódica com período 2π :

$$X(e^{j(\omega+2\pi)}) = X(e^{j\omega})$$

(em contraste com a transformada de Fourier em tempo contínuo).

3) Desvio no tempo e na frequência

Se

$$x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega})$$

então:

- a) $x[n - n_0] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$
- b) $e^{j\omega_0 n} x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j(\omega - \omega_0)})$

Provemos!

Exemplo 5.7

Suponhamos um filtro ideal passa-baixo, com frequência de corte em ω_c . Vem então para a função de transferência $H_{\ell p}(e^{j\omega})$

O que conclui relativamente à periodicidade de $H_{\ell p}(e^{j\omega})$? Indique as baixas frequências.

4. Conjugação e simetria de conjugação

Se $x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega})$ então

$$x^*[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X^*(e^{-j\omega})$$

e, além disso, se $x[n] \in \mathbb{R}$, então $X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$ e este último resultado implica que

$$\begin{cases} \Re\{X(e^{j\omega})\} & \text{é par em } \omega \\ \Im\{X(e^{j\omega})\} & \text{é ímpar em } \omega \\ |X(e^{j\omega})| & \text{é par em } \omega \\ \arg\{X(e^{j\omega})\} & \text{é ímpar em } \omega \end{cases}$$

e que

$$\begin{cases} Ev\{x[n]\} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \Re\{X(e^{j\omega})\} \\ Od\{x[n]\} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} j \Im\{X(e^{j\omega})\} \end{cases}$$

5. Diferenciação e acumulação

São as propriedades correspondentes à derivação e à integração para sinais em tempo contínuo.

Ora, dado um sinal qualquer $x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega})$, sabemos (pela propriedade do desvio temporal) que

$$x[n-1] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j\omega(1)} X(e^{j\omega}) = e^{-j\omega} X(e^{j\omega}).$$

Portanto, à operação de primeira diferença ou diferenciação simples corresponderá a transformada de Fourier tal que

$$x[n] - x[n-1] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} (1 - e^{-j\omega}) X(e^{j\omega}).$$

5. Diferenciação e acumulação - continuação

Seja agora o sinal $y[n] = \sum_{m=-\infty}^n x[m]$. Então

$$y[n] - y[n-1] = x[n]$$

o que leva a suspeitar que

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{X(e^{j\omega})}{1 - e^{-j\omega}}, \text{ por inversão.}$$

Contudo, este resultado está incompleto e é

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^n x[m] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} X(e^{j\omega}) + \pi X(e^{j0}) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$

à semelhança do resultado correspondente para sinais em tempo contínuo.

Exemplo 5.8

Calcular a transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$ do escalão unitário

$$x[n] = u[n],$$

sabendo que

$$g[n] = \delta[n] \quad \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \quad G(e^{j\omega}) = 1$$

e usando a propriedade da acumulação.

6. Inversão temporal

Sejam

$$x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega}) \quad \text{e} \quad y[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} Y(e^{j\omega}) \quad \text{com} \quad y[n] = x[-n].$$

Temos então

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[-n] e^{-j\omega n}$$

e efectuando a substituição $m = -n$, vem

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{m=+\infty}^{-\infty} x[m] e^{j\omega m}$$

o que implica que

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m] e^{-j(-\omega)m} = X(e^{-j\omega}) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} x[-n].$$

7. Expansão temporal

Em tempo contínuo obtivemos

$$x(at) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$$

Procuramos o seu correspondente em tempo discreto, para um qualquer sinal $x[n]$.

- 1 Não podemos simplesmente começar por multiplicar o tempo n , aqui discreto, por um número qualquer a (de modo a ter $x[an]$), porque o argumento de $x[]$ terá de ser um número inteiro e an não o é, em geral.
- 2 Mesmo se impusermos a inteiro, por exemplo $a = 2$, o único resultado seria o de tornar os valores de $x[n]$ em instantes pares, somente.

7. Expansão temporal - continuação

O que faremos, então, será alargar o sinal original $x[n]$ mas inserindo zeros nos instantes discretos que não forem “atingidos” pelo argumento, como no exemplo seguinte:

Consideremos agora $x_3[n]$

7. Expansão temporal - continuação

Em $x_{(3)}[n]$ são inseridos dois zeros entre dois valores sucessivos do sinal original.

Faremos isso definindo o sinal expandido temporalmente da seguinte forma:

$$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[n/k], & \text{se } n = rk, \text{ isto é, se } n \text{ é múltiplo de } k \\ 0 & \text{se } n \neq rk, \text{ isto é, se } n \text{ não é múltiplo de } k \end{cases}$$

Consequentemente, com $n = rK$ (r inteiro),

$$X_{(k)}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_{(k)}[n] e^{-j\omega n} = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x_{(k)}[rk] e^{-j\omega rk}.$$

Mas como $x_{(k)}[rk] = x[rk/k] = x[r]$, vem

$$X_{(k)}(e^{j\omega}) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x[r] e^{-j(k\omega)r} = X(e^{jk\omega}).$$

Observação

Isto é,

$$x_{(k)}[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{jk\omega}).$$

O resultado anterior leva a que o alargamento de um sinal $x[n]$ de um factor k no tempo discreto n leva à sua concentração de um factor k na frequência ω , já que onde estava $e^{j\omega}$ passa a estar $e^{jk\omega}$.

Exemplo 5.9

Sejam os sinais $x[n]$ e $y[n]$ relacionados pela igualdade

$$x[n] = y_{(2)}[n] + 2y_{(2)}[n - 1]$$

onde

$$y_{(2)}[n] = \begin{cases} y[n/2], & n \text{ par} \\ 0, & n \text{ ímpar} \end{cases}$$

sendo

$$y[n] = \begin{cases} 1, & n = 0, 1, 2, 3, 4 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Determine $X(e^{j\omega})$.

8. Diferenciação na frequência

Seja $x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n}$. Então

$$\begin{aligned}\frac{d X(e^{j\omega})}{d\omega} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} -jn x[n] e^{-j\omega n} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-jn x[n]) e^{-j\omega n} = \\ &= \mathcal{F}\{-jn x[n]\}\end{aligned}$$

donde

$$j \frac{d X(e^{j\omega})}{d\omega} = \mathcal{F}\{n x[n]\},$$

ou seja,

$$n x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} j \frac{d X(e^{j\omega})}{d\omega}$$

9. Relação de Parseval

À semelhança do que acontece para sinais em tempo contínuo, também aqui se tem

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega,$$

com uma demonstração semelhante àquele caso. Também aqui, a interpretação física é a mesma, os dois termos acima representam a energia total contida no sinal $x[n]$, que também é, portanto, dada pelo integral da sua transformada de Fourier em módulo quadrado dividida por 2π sobre um intervalo 2π de frequências distintas.

9. Relação de Parseval - continuação

Também aqui

- $\frac{1}{2\pi} |X(e^{j\omega})|^2$ é a densidade espectral de energia do sinal $x[n]$.
- $\frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} |x[n]|^2 = \sum_{n=\langle N \rangle} |a_k|^2$, para séries de Fourier de sinais periódicos em tempo discreto.

Exemplo 5.10

Seja $x[n]$ um sinal cuja transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$ é dada pelos gráficos

Usando as propriedades da transformada de Fourier de um sinal (aperiódico) em tempo discreto, determinar se $x[n]$ é periódico, real, par e se tem energia finita.

A TRANSFORMADA de FOURIER em TEMPO DISCRETO

Maria do Carmo Martins

Abril de 2009

§4. A propriedade da convolução

Vimos no Capítulo dedicado à transformada de Fourier de sinais em tempo contínuo, que se $h(t)$ for a resposta de um SLIT ao impulso unitário $\delta(t)$, então a resposta do mesmo SLIT a um qualquer sinal $x(t)$ será dada por

$$y(t) = h(t) * x(t)$$

com

$$Y(j\omega) = H(j\omega) X(j\omega),$$

sendo

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

a convolução de $x(t)$ com $h(t)$.

Teorema

Também aqui, em tempo discreto, temos resultado idêntico:

Teorema:

Se $h[n]$ é a resposta do SLIT ao impulso unitário, então

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

com

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) H(e^{j\omega})$$

sendo

$$Y(e^{j\omega}) = TF\{y[n]\}, \quad X(e^{j\omega}) = TF\{x[n]\}, \quad H(e^{j\omega}) = TF\{h[n]\}.$$

Exemplo 5.11

Seja um SLIT com resposta ao impulso unitário dada por

$$h[n] = \delta[n - n_0].$$

Determine $y[n]$.

Exemplo 5.12

Consideremos novamente um filtro passa-baixo ideal, em tempo discreto com uma resposta na frequência $H(e^{j\omega})$ dada por

Determine $h[n]$.

Exemplo 5.13

Seja um SLIT com

$$h[n] = \alpha^n u[n], \quad \text{com } |\alpha| < 1$$

e também

$$x[n] = \beta^n u[n], \quad \text{com } |\beta| < 1.$$

Determine $y[n]$.

Exemplo 5.14

Determine a resposta na frequência de um filtro, com um sinal de entrada $x[n]$ e de saída $y[n]$, dado pelo diagrama

onde $H_{\ell p}(e^{j\omega}) \equiv H_{\text{low pass}}(e^{j\omega})$ representa a resposta na frequência de um filtro passa-baixo ideal, com ganho unitário entre as frequências de corte $-\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{4}$, e ganho nulo nas outras frequências. Determine $H(e^{j\omega})$.

Observação

Tal como em tempo contínuo, também em tempo discreto haverá SLIT's sem resposta na frequência, isto é, com sinais de saída que não são finitos e cujas funções de transferência $H(e^{j\omega})$ divergem; tal é o caso em que $h[n] = 2^n u[n]$ com sinais de entrada sinusoidais.

Contrariamente, para SLIT's estáveis existirá a função de resposta na frequência, $H(e^{j\omega})$, e a correspondente resposta ao impulso unitário, $h[n]$, será absolutamente somável, isto é

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < \infty.$$

Quando um SLIT for tal que $h[n]$ não possui T. F., isto é, não existe $H(e^{j\omega})$, recorre-se então à transformada-z em vez da transformada de Fourier (isto em tempo discreto) - em tempo contínuo seria a transformada de Laplace.

§5. A propriedade da multiplicação

Consideremos a multiplicação de dois sinais $x_1[n]$ e $x_2[n]$:

$$x_1[n] x_2[n] = y[n].$$

Queremos $Y(e^{j\omega})$ em termos de $X_1(e^{j\omega})$ e $X_2(e^{j\omega})$. Ora,

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= TF\{y[n]\} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n] e^{-j\omega n} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1[n] x_2[n] e^{-j\omega n} \end{aligned}$$

onde $x_1[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X_1(e^{j\theta}) e^{j\theta n} d\theta$, pelo que

§5. A propriedade da multiplicação - continuação

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_2[n] \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X_1(e^{j\theta}) e^{j\theta n} d\theta \right\} e^{-j\omega n} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X_1(e^{j\theta}) \left\{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_2[n] e^{-j(\omega-\theta)n} \right\} d\theta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X_1(e^{j\theta}) X_2(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta \end{aligned}$$

ou seja, $Y(e^{j\omega})$ é dada pela convolução periódica de $X_1(e^{j\omega})$ com $X_2(e^{j\omega})$ - periódica porque o integral respectivo é sobre um intervalo finito 2π , e não de $-\infty$ a $+\infty$.

Exemplo 5.15

Sabendo que $x[n] = x_1[n] x_2[n]$ onde

$$x_1[n] = \frac{\text{sen}(n\pi/2)}{\pi n} \quad \text{e} \quad x_2[n] = \frac{\text{sen}(3\pi n/4)}{\pi n},$$

determine $X(e^{j\omega})$.

§7. Dualidade

(i) Na série de Fourier em tempo discreto

Recordamos o par de Fourier para sinais periódicos em tempo discreto do Capítulo 3

$$\begin{cases} x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\omega_0 n} = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n} \\ a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk\omega_0 n} = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n} \end{cases}$$

ou seja,

$$x[n] \xleftrightarrow{S.F.} a_k.$$

(i) Na série de Fourier em tempo discreto - continuação

Suponhamos agora duas sequências periódicas f e g , ambas de período N , e relacionadas por

$$f[m] = \frac{1}{N} \sum_{r=\langle N \rangle} g[r] e^{-jr(2\pi/N)m}.$$

Podemos trocar as letras dos índices: $m = k$, $r = n$ e escrever

$$f[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} g[n] e^{-jk(2\pi/N)n}.$$

Comparando com a expressão geral dos coeficientes a_k , concluímos que os $f[k]$ correspondem aos coeficientes da série de Fourier do sinal $g[n]$:

$$g[n] \xleftrightarrow{S.F.} f[k].$$

(i) Na série de Fourier em tempo discreto - continuação

Mas, em contrapartida, fazendo agora $m = n$ e $r = -k$, virá

$$f[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=\langle N \rangle} g[-k] e^{jk(2\pi/N)n} = \sum_{k=\langle N \rangle} \frac{g[-k]}{N} e^{jk(2\pi/N)n}$$

o que mostra que $\frac{g[-k]}{N}$ assume o papel dos coeficientes a_k na expansão em série de Fourier de $f[n]$:

$$f[n] \xleftrightarrow{S.F.} \frac{1}{N} g[-k].$$

Combinando as duas relações, tem-se

$$g[n] \xleftrightarrow{S.F.} f[k] \quad \text{e} \quad f[n] \xleftrightarrow{S.F.} \frac{1}{N} g[-k].$$

Consequentemente, e tal como no caso contínuo, toda a propriedade da série de Fourier em tempo discreto tem uma propriedade dual.

(i) Na série de Fourier em tempo discreto - continuação

Por exemplo, (ver tabela 3.2)

$$x[n - n_0] \xleftrightarrow{S.F.} a_k e^{-jk(2\pi/N)n_0} \quad \text{e} \quad e^{jm(2\pi/N)n} x[n] \xleftrightarrow{S.F.} a_{k-m}$$

são propriedades duais.

Outro exemplo da mesma tabela:

$$\sum_{r=\langle N \rangle} x[r] y[n - r] \xleftrightarrow{S.F.} N a_k b_k$$

e

$$x[n] y[n] \xleftrightarrow{S.F.} \sum_{\ell=\langle N \rangle} a_\ell b_{k-\ell}$$

Exemplo 5.16

Seja o sinal $x[n]$, de período $N = 9$, dado por

$$x[n] = \begin{cases} \frac{1}{9} \frac{\sin(5\pi n/9)}{\sin(\pi n/9)}, & n \neq \text{múltiplo de } 9 \\ \frac{5}{9}, & n = \text{múltiplo de } 9 \end{cases}$$

Recorrendo à dualidade, determinar os coeficientes da expansão em série de Fourier de $x[n]$.

(ii) Dualidade entre a transformada de Fourier em tempo discreto e a série de Fourier em tempo contínuo

Para a transformada de Fourier em tempo discreto, temos o par de relações

$$\begin{cases} x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \\ X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n} \end{cases}$$

e para a série de Fourier em tempo contínuo,

$$\begin{cases} x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \\ a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \end{cases}$$

É clara a semelhança entre os dois somatórios, por um lado, e entre os dois integrais, por outro. Por exemplo, podemos olhar para a expressão de $X(e^{j\omega})$ como a série de Fourier de $X(e^{j\omega})$, periódica com período 2π em ω , cujos coeficientes são dados pela expressão de $x[n]$ acima.

Exemplo 5.17

Recorrendo à dualidade, determine a transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$ em tempo discreto do sinal

$$x[n] = \frac{\text{sen}(\pi n/2)}{\pi n}.$$

§8. Sistemas caracterizados por equações às diferenças, lineares e de coeficientes constantes

Como já vimos, um equação às diferenças linear e de coeficientes constantes, relacionando o sinal de entrada $x[n]$ com o de saída, $y[n]$, de um SLIT em tempo discreto, é da forma

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k].$$

Um exemplo será $y[n] - a y[n-1] = x[n]$, que estudaremos a seguir.

O objectivo agora, à semelhança do que já fizemos atrás em tempo contínuo, é determinar uma expressão para a resposta na frequência $H(e^{j\omega})$, em função dos coeficientes a_k e b_k acima.

§8. Sistemas caracterizados por equações às diferenças, lineares e de coeficientes constantes - continuação

Ora, do teorema da convolução sabemos que

$$\text{se } y[n] = x[n] * h[n] \text{ então } Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) H(e^{j\omega}).$$

Desta última igualdade vem $H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}$; precisamos portanto de saber $Y(e^{j\omega})$ e $X(e^{j\omega})$. Mas, usando as propriedades da linearidade e do desvio temporal

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^N a_k y[n-k] &= \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \quad \xrightarrow{T.F.} \\ \longrightarrow \sum_{k=0}^N a_k e^{-jk\omega} Y(e^{j\omega}) &= \sum_{k=0}^M b_k e^{-jk\omega} X(e^{j\omega}). \end{aligned}$$

§8. Sistemas caracterizados por equações às diferenças, lineares e de coeficientes constantes - continuação

Donde,

$$\frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k e^{-jk\omega}}{\sum_{k=0}^N a_k e^{-jk\omega}} = H(e^{j\omega})$$

um quociente entre dois polinómios na variável $e^{-j\omega}$.

Exemplo 5.18

Seja o SLIT caracterizado pela equação às diferenças

$$y[n] - a y[n - 1] = x[n], \quad \text{com } |a| < 1.$$

Determine $H(e^{j\omega})$.

Exemplo 5.19

Seja um SLIT ao qual corresponde a equação

$$y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = 2x[n].$$

Determine $H(e^{j\omega})$.

Exemplo 5.20

Seja o SLIT do exemplo anterior mas especificando $x[n]$

$$y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n].$$

Determine $y[n]$.

- Apontamentos do Prof. Mário Gata
- *Signals and Systems*
Alan V. Oppenheim & Alan S. Willsky Prentice-Hall, última edição.