

TOPOLOGIA da RETA

Maria do Carmo Martins

setembro 2013

Distância entre dois pontos

Dados $a, b \in \mathbb{R}$, define-se a distância entre a e b por

$$d(a, b) = |a - b| = |b - a|$$

Sendo $a \in \mathbb{R}$ e $\delta \in \mathbb{R}^+$, chama-se **vizinhança δ de a** , ao intervalo aberto de centro em a e raio δ . Representa-se por $\mathcal{V}_\delta(a)$ ou $\mathcal{V}(a; \delta)$

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_\delta(a) &= \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \delta\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : a - \delta < x < a + \delta\} \\ &=]a - \delta, a + \delta[\end{aligned}$$

Observação 1- Tipos de intervalos

Os intervalos de \mathbb{R} são da forma:

- $]a, b[$;
- $]a, b]$;
- $[a, b[$;
- $[a, b]$; com $a < b$

- $] - \infty, a[$;
- $] - \infty, a]$;
- $]b, +\infty[$;
- $[b, +\infty[$;

- $] - \infty, +\infty[= \mathbb{R}$

Definição

Seja $A \subset \mathbb{R}$. Diz-se que $x \in A$ é **ponto interior** de A se, e só se, existe uma vizinhança de x contida em A .

Ao conjunto de todos os pontos interiores de A , chama-se **interior de A** e representa-se por **int A** ou $\overset{\circ}{A}$. Simbolicamente

$$x \in \text{int } A \Leftrightarrow \exists h \in \mathbb{R}^+ : \mathcal{V}_h(x) \subset A$$

$$\Leftrightarrow \exists h > 0 :]x - h, x + h[\subset A.$$

Observação 2

Por definição, os pontos interiores de um conjunto A são elementos de A , isto é,

$$x \in \text{int } A \Rightarrow x \in A,$$

ou seja, verifica-se a relação de inclusão

$$\text{int } A \subset A.$$

Na prática e atendendo à **Lei da Conversão** se $x \notin A$, então $x \notin \text{int } A$. Deste modo, ao determinar os pontos interiores de um conjunto A basta averiguar somente os elementos de A .

Exercício 1

Determine o interior de $I =]2, 5[$.

Exercício 2

Seja $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ um conjunto finito. Determine o interior de A .

Observação 3

Complete:

- Se A é finito, então $\text{int } A = \underline{\hspace{2cm}}$
- Se $\text{int } A \underline{\hspace{2cm}}$, então A é infinito.

Observação 4

Note-se que sendo A um conjunto infinito o $\text{int } A$ poderá ser ou não o conjunto vazio.

Exercício 3

Determine o interior de \mathbb{Q} .

Exercício 4

Determine o interior dos seguintes conjuntos:

a) $]a, b[$;

b) $[a, b]$;

c) $] - \infty, b[$;

d) $] - \infty, b]$;

e) $]a, +\infty[$;

f) $[a, +\infty[$.

Conjunto Aberto

Definição

Um conjunto $A \subset \mathbb{R}$, diz-se **aberto** se, e só se, $\text{int } A = A$.

Nota: O conjunto vazio é um aberto de \mathbb{R} .

Exercício 5

Verifique se os seguintes conjuntos são abertos de \mathbb{R} :

a) $[a, b]$;

b) \mathbb{Q} ;

c) $]a, b[$;

d) $] - \infty, a[$;

e) $]a, +\infty[$;

f) \mathbb{R} ;

g) $]a, b]$;

h) $[a, b[$;

i) $] - \infty, a]$;

j) $[a, +\infty[$.

Exercício 6

Mostre que todo o subconjunto unitário de \mathbb{R} não é um aberto de \mathbb{R} .

Exercício 7

Mostre que se A_1 e A_2 são abertos de \mathbb{R} , então $A_1 \cap A_2$ é um aberto de \mathbb{R} .

Teorema 1 - Propriedades dos Abertos de \mathbb{R}

- 1 A intersecção de um número **finito** de abertos é um aberto.
- 2 A reunião de um número finito ou não de abertos de \mathbb{R} é um aberto de \mathbb{R} .
- 3 \mathbb{R} e \emptyset são abertos de \mathbb{R} .

Observação 5

Vimos que a intersecção finita de abertos é um aberto. Vejamos, através de exemplos, que **a intersecção infinita de abertos pode não ser um aberto**.

Exercício 8

Considere a intersecção infinita

$$A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left] -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right[$$

Averigue se é um aberto.

Exercício 9

Considere a intersecção infinita

$$B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}}] - n, n[.$$

Averigue se é um aberto.

Exercício 10

Verifique se o complementar, em \mathbb{R} , de um conjunto finito

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\},$$

com $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ é um aberto de \mathbb{R} .

Exercício 11

Mostre que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ é um aberto.

Conjuntos Fechados

Definição

Seja $A \subset \mathbb{R}$. Um ponto $a \in \mathbb{R}$ é **ponto aderente** de A se existe uma sucessão (x_n) de elementos em A , convergente para a (ou, quando a for limite de uma sucessão (x_n) de elementos em A).

Ao conjunto de todos os pontos aderentes a A , chamamos **aderência ou fecho de A** e representa-se por \overline{A} ou $ad\ A$.
Simbolicamente

$$x \in ad\ A \iff \exists x_n \in A, \forall n \in \mathbb{N} : \lim x_n = x.$$

Observação 6

Se $x \in A$, então $x \in \text{ad } A$, ou seja

$$A \subset \text{ad } A.$$

Exercício 12

Seja $A =]0, +\infty[$. Mostre que $0 \in \text{ad } A$.

Teorema 2

$$\begin{aligned}x \in \text{ad } A &\Leftrightarrow \forall h \in \mathbb{R}^+, \mathcal{V}_h(x) \cap A \neq \emptyset \\&\Leftrightarrow \forall h > 0,]x - h, x + h[\cap A \neq \emptyset\end{aligned}$$

Exercício 13

Determine a aderência de $]a, b[$.

Exercício 14

Seja $A = \{x : x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$. Determine a aderência de A .

Exercício 15

Determine a aderência dos seguintes conjuntos:

a) $\{a\}$;

b) $[a, +\infty[$;

c) \mathbb{Q} ;

d) \mathbb{R} ;

e) \mathbb{N} ;

f) \mathbb{Z} .

Conjunto Fechado

Definição

Um conjunto $F \subset \mathbb{R}$ diz-se **fechado** se, e só se, $F = ad F$.

Exercício 16

Verifique se os seguintes conjuntos são fechados:

a) $]a, b[$;

b) $\{a\}$;

c) $[a, +\infty[$;

d) \mathbb{Q} ;

e) \mathbb{R} ;

f) \mathbb{N} ;

g) \mathbb{Z} ;

h) \emptyset .

Observação 7

Os conceitos de aberto e fechado não são contrários, isto é, o facto de um conjunto não ser aberto não implica que seja fechado, e vice-versa. Em suma, dado um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ este poderá ser:

- aberto e fechado; por exemplo _____
- aberto e não fechado; por exemplo _____
- não aberto e fechado; por exemplo _____
- não aberto e não fechado; por exemplo _____

Teorema 3

Seja $F \subset \mathbb{R}$. F é fechado se, e só se, o $C_{\mathbb{R}}F$ é aberto de \mathbb{R} .

Teorema 4 - Propriedades dos Fechados

- 1 \mathbb{R} e \emptyset são fechados de \mathbb{R} .
- 2 A reunião de uma família **finita** de fechados de \mathbb{R} é um fechado de \mathbb{R} .
- 3 A intersecção de uma família (finita ou infinita) de fechados de \mathbb{R} é um fechado de \mathbb{R} .

Observação 8

A reunião de um número infinito de fechados pode não ser um fechado.

Exercício 17

Considere a reunião infinita de fechados

$$C = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n} \right].$$

Verifique se é um fechado.

Exercício 18

Considere a reunião infinita de fechados

$$D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right].$$

Verifique se é um fechado.

Teorema 5

A aderência de todo o conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é um fechado.

Ponto de Acumulação

Definição

Sejam $A \subset \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}$. Diz-se que x é **ponto de acumulação** de A se, e só se, qualquer intervalo aberto centrado em x contenha algum ponto de A distinto de x .

Ao conjunto de todos os pontos de acumulação de A , chamamos **derivado de A** e representa-se por A' . Simbolicamente

$$x \in A' \Leftrightarrow \forall h > 0,]x - h, x + h[\setminus \{x\} \cap A \neq \emptyset$$

Exercício 19

Seja $A = \{x : x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$. Determine o derivado de A .

Observação 9

Note-se que se $x \in A'$, x pode ou não pertencer a A , daí que $A \not\subset A'$ e $A' \not\subset A$. Todavia, podemos afirmar que $A' \subset \text{ad } A$.

Exercício 20

Determine o derivado de cada um dos conjuntos:

a) $]a, b[$;

b) \mathbb{Q} ;

c) \mathbb{Z} ;

d) \mathbb{N} .

Teorema 6

Seja $A \subset \mathbb{R}$. A aderência de A é a reunião de A com o seu derivado, isto é,

$$ad A = A \cup A'.$$

Ponto Isolado

Definição

Seja $A \subset \mathbb{R}$. Diz-se que $x \in A$ é **ponto de isolado** de A se, e só se, x não é ponto de acumulação de A . Simbolicamente

$$x \text{ é ponto isolado de } A \iff \exists h > 0,]x - h, x + h[\cap A = \{x\}$$

Nota: Não há notação específica para indicar o conjunto dos pontos isolados de A . Por esta razão, escreve-se:

$$\{x : x \text{ é ponto isolado de } A\} = \dots$$

Exercício 21

Determine os pontos isolados de:

a) \mathbb{Z} ;

b) $B = [0, 1] \cup \mathbb{N}$;

c) \mathbb{N} .

Definição

Sejam $A \subset \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}$. Diz-se que x é **ponto exterior** a A se, e só se, x é ponto interior do complementar de A .

O conjunto dos pontos exteriores de A , chama-se **exterior de A** e representa-se por $\text{ext } A$. Simbolicamente

$$x \in \text{ext } A \quad \Leftrightarrow \quad x \in \text{int } C_{\mathbb{R}} A$$

Exercício 22

Seja $A =]2, 5]$. Verifique se:

a) $\frac{11}{2} \in \text{ext } A$;

b) $2 \in \text{ext } A$.

Exercício 23

Determine o exterior de:

a) \mathbb{Z} ;

b) \mathbb{Q} .

Definição

Sejam $A \subset \mathbb{R}$ e $p \in \mathbb{R}$. Diz-se que p é **ponto fronteiro** de A se, e só se, qualquer intervalo aberto centrado em p contém pelo menos um elemento de A e outro do $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}A$.

O conjunto dos pontos fronteiros de A , chama-se **fronteira** de A e representa-se por $fr A$. Simbolicamente

$$p \in fr A \Leftrightarrow \forall h \in \mathbb{R}^+, \quad \mathcal{V}_h(p) \cap A \neq \emptyset \quad \wedge \quad \mathcal{V}_h(p) \cap \mathbb{C}_{\mathbb{R}}A \neq \emptyset$$

Observação 10

Seja $A \subset \mathbb{R}$. Então:

- $ad A = int A \cup fr A$;
- $int A \subset A$;
- $A \subset ad A$;
- $A' \subset ad A$;
- $ad A = A \cup A'$.

Exercício 24

Determine o interior, a aderência, o derivado, o exterior, a fronteira e o conjunto dos pontos isolados de cada um dos conjuntos:

a) $A = \{-1, 3\} \cup [0, 2]$;

b) $C = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$;

c) $B =]-\infty, 3] \cup \{5\}$.

Exercício 25

Classifique em aberto e/ou fechado os seguintes conjuntos:

a) \mathbb{Z} ;

b) \mathbb{Q} ;

c) $A = \{-5, -4\} \cup [-3, 8]$;

d) $B =]-1, 0[\cup \{\frac{1}{2}\} \cup [1, +\infty[.$

- Maria Augusta Ferreira Neves, Maria Teresa Coutinho Vieira e Alfredo Gomes Alves, *exercícios de Matemática 12º ano*, vol. 2, Porto Editora.
- Francelino Gomes, *Práticas de Matemática 12º ano*, vol. 2, Editorial O Livro.

Limites de funções reais de variável real

Maria do Carmo Martins

setembro de 2013

Definição

Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, uma função com valores reais, definida num subconjunto $X \subset \mathbb{R}$ e seja $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de X , isto é, $a \in X'$. Diz-se que o número real ℓ é o **limite de $f(x)$ quando x tende para a** , e escreve-se

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$$

se, e só se, para cada número real $\epsilon > 0$, dado arbitrariamente, existe $\delta > 0$ (*que depende de ϵ*) de modo que $|f(x) - \ell| < \epsilon$ sempre que $x \in X$ e $0 < |x - a| < \delta$. Simbolicamente:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0; \forall x \in X, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon.$$

Observações

- De acordo com a definição anteriormente dada, só tem sentido escrever $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ quando a é ponto de acumulação do domínio da função f .
- Ao considerarmos o limite $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ não exigimos que o ponto a pertença ao domínio da função f . Nos casos mais interessantes de limite, tem-se que $a \notin X$.
- Mesmo que se tenha $a \in X$, a afirmação $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ nada diz respeito do valor $f(a)$. Ela descreve apenas o comportamento dos valores $f(x)$ para x próximo de a , com $x \neq a$. Explicitamente é possível ter-se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$.

Exercício 1

Prove, pela definição de limite segundo Cauchy, que:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} (5 - 2x) = 3;$

b) $\lim_{x \rightarrow 3} (4x - 1) = 11$

Ponto de Acumulação à Esquerda e à Direita

Definição

Sejam $X \subset \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$. Diz-se que:

- a é **ponto de acumulação à direita** e escreve-se $a \in X'_+$ se, e só se,

$$\forall h > 0, \quad X \cap]a, a + h[\neq \emptyset$$

- a é **ponto de acumulação à esquerda** e escreve-se $a \in X'_-$ se, e só se,

$$\forall h > 0, \quad X \cap]a - h, a[\neq \emptyset$$

Limite lateral à direita segundo Cauchy

Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in X'_+$. Diz-se que ℓ é **limite à direita de $f(x)$ quando x tende para a** ou ℓ é **limite lateral à direita de $f(x)$ quando x tende para a** e escreve-se

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \ell$$

se, e só se,

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0; \forall x \in X, x \in]a, a + \delta[\quad \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon$$

Limite lateral à esquerda segundo Cauchy

Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in X'_-$. Diz-se que ℓ é **limite à esquerda de $f(x)$ quando x tende para a** ou ℓ é **limite lateral à esquerda de $f(x)$ quando x tende para a** e escreve-se

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \ell$$

se, e só se,

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0; \forall x \in X, x \in]a - \delta, a[\quad \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon$$

Teorema 1

Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in X'$. Então $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ se, e só se, existirem e forem iguais a ℓ os limites laterais

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x).$$

Teorema 2 - Unicidade do limite

Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in X'$. Se

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell_1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell_2,$$

então

$$\ell_1 = \ell_2.$$

Teorema 3

Sejam

- $X \subset \mathbb{R}$,
- $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e
- $a \in X'$.

Dado $Y \subset X$ tal que $a \in Y'$, seja $g = f|_Y$.

Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$, então

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell.$$

Teorema 4

Sejam

- $X \subset \mathbb{R}$,
- $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e
- $a \in X'$.

Se existir $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, então f é limitada numa vizinhança de a , isto é,

$$\exists A > 0 : \forall x \in X, \exists \delta > 0 : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)| < A.$$

Teorema 5 - (Enquadramento)

Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f, g, h : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in X'$. Se para todo $x \in X \setminus \{a\}$,

- $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ e
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = \ell$,

então

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell.$$

Teorema 6

Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in X'$. Se

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ e
- $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ com $L < M$,

então

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in X, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < g(x).$$

Corolário 1

Se

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \quad \text{com} \quad \ell > 0,$$

então existe uma vizinhança de a que não contém a onde f é positiva, isto é

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in X, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > 0.$$

Corolário 2

Se

- $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in X \setminus \{a\}$ e
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = M,$

então

$$L \leq M.$$

Teorema 7- (Propriedades dos limites)

Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in X'$ tais que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell_1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell_2 \quad \text{com} \quad \ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}.$$

Então:

a) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \ell_1 \pm \ell_2;$

b) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] = \ell_1 \cdot \ell_2;$

c) Se $\ell_2 \neq 0$, então $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\ell_1}{\ell_2};$

Teorema 7- (Propriedades dos limites (continuação))

d) $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[p]{f(x)} = \sqrt[p]{\ell_1}$ desde que a expressão tenha significado;

e) $\lim_{x \rightarrow a} [kf(x)] = k \lim_{x \rightarrow a} f(x) = k\ell_1$ com $k \in \mathbb{R}$;

f) Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ e existir $A > 0$ tal que $|g(x)| \leq A$ para todo $x \in X \setminus \{a\}$, então

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] = 0,$$

mesmo que $\nexists \lim_{x \rightarrow a} g(x)$.

Teorema 8 (Critério de Cauchy para funções)

Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in X'$. Então existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ se, e só se,

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x, y \in X, 0 < |x - a| < \delta, 0 < |y - a| < \delta \Rightarrow \\ \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

Observação:

Note-se que este critério não nos indica o valor de $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, mas apenas a sua existência.

Teorema 9 - (Limite de uma função composta)

Sejam $X, Y \subset \mathbb{R}$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$ com $f(X) \subset Y$. Sejam $a \in X'$ e $b \in Y' \cap Y$. Se

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \quad \text{e} \quad \lim_{y \rightarrow b} g(y) = c,$$

então

$$\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = c, \quad \text{desde que} \quad c = g(b).$$

Exercício 2

Recorrendo ao limite da função composta, calcule:

a) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \cos x)^{3 \sec x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt{x} - 8}{\sqrt[3]{x} - 4}$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 1}{(x - 1)^2}$

Função crescente e função decrescente (revisão)

Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ com $X \subset \mathbb{R}$. Diz-se que:

- **f é crescente** se

$$\forall x, y \in X : x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$$

- **f é crescente em sentido lato** se

$$\forall x, y \in X : x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

- **f é decrescente** se

$$\forall x, y \in X : x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$$

- **f é decrescente em sentido lato** se

$$\forall x, y \in X : x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$$

Limites no infinito, infinitos e infinitos no infinito - resumo

$$\text{limites} \left\{ \begin{array}{l} \text{No infinito} \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell \end{array} \right. \\ \\ \text{Infinitos} \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \\ \text{limites laterais} \end{array} \right. \\ \\ \text{Infinitos no infinito} \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \pm\infty \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Limites no infinito (quando $x \rightarrow +\infty$)

Definição

Seja $X \subset \mathbb{R}$ não limitado superiormente. Dada a função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, escreve-se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell,$$

quando o número real ℓ satisfaz a seguinte condição:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists M > 0 : \forall x \in X, x > M \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon.$$

Limites no infinito (quando $x \rightarrow -\infty$)

Definição

Seja $X \subset \mathbb{R}$ não limitado inferiormente. Dada a função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, escreve-se

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell,$$

quando o número real ℓ satisfaz a seguinte condição:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists M > 0 : \forall x \in X, x < -M \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon.$$

Exercício 3

Calcule os seguintes limites:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin x$

Definição

Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ $a \in X'$. Diz-se que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ quando, para todo $A > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que $0 < |x - a| < \delta, x \in X$, então $f(x) > A$. Isto é

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall A > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in X, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > A.$$

Definição

Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ $a \in X'$. Diz-se que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ quando, para todo $A > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que $0 < |x - a| < \delta, x \in X$, então $f(x) < -A$. Isto é

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall A > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in X, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < -A.$$

Exercício 4

Calcule os seguintes limites:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x - 2)^2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{-1}{(x - 5)^2}$

Limites laterais - definição

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall A > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in X, x \in]a, a + \delta[\Rightarrow f(x) > A$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall A > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in X, x \in]a - \delta, a[\Rightarrow f(x) > A$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall A > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in X, x \in]a, a + \delta[\Rightarrow f(x) < -A$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall A > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in X, x \in]a - \delta, a[\Rightarrow f(x) < -A$$

Exercício 5

Calcule os seguintes limites:

a) $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{1}{x - a}$

b) $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{1}{x - a}$

Limites infinitos no infinito

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall A > 0, \exists M > 0 : \forall x \in X, x > M \Rightarrow f(x) > A$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall A > 0, \exists M > 0 : \forall x \in X, x < -M \Rightarrow f(x) > A$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall A > 0, \exists M > 0 : \forall x \in X, x > M \Rightarrow f(x) < -A$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall A > 0, \exists M > 0 : \forall x \in X, x < -M \Rightarrow f(x) < -A$$

Exercício 6

Calcule os seguintes limites:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k \quad (k \in \mathbb{N})$

Cálculo de limites - regras práticas

Sejam $P(x)$ e $Q(x)$ dois polinómios na variável x . Para calcular

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

divide-se ambos os termos de fração por x^n , onde n é o maior grau dos polinómios $P(x)$ e $Q(x)$.

Exercício 7 - Calcule

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x - 3)(3x + 5)(4x - 6)}{3x^3 + x - 1}$$

Observação:

Este método pode também ser usado, em muitos casos, para frações que contêm expressões irracionais.

Exercício 8 - Calcule

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x^3 + 10}}$$

Cálculo de limites - regras práticas

Se $P(x)$ e $Q(x)$ são polinómios na variável x e $P(a) \neq 0$ ou $Q(a) \neq 0$, então o limite

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

é obtido diretamente.

Exercício 9 - Calcule

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1}$$

Cálculo de limites - regras práticas

Se $P(x)$ e $Q(x)$ são polinómios na variável x e $P(a) = Q(a) = 0$, então simplifica-se, uma ou mais vezes, a fração $\frac{P(x)}{Q(x)}$ pelo binómio $x - a$.

Exercício 10 - Calcule os limites

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^3 - 1}$

Cálculo de limites - regras práticas

As expressões irracionais reduzem-se, em muitos casos, à forma racional através da introdução de uma nova variável.

Exercício 11 - Calcule os limites

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - 1}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[5]{x} - 1}$

Cálculo de limites - regras práticas

Outro método, através do qual pode-se determinar o limite, a partir de uma expressão irracional, é o transporte da parte irracional do numerador para o denominador, ou do denominador para o numerador.

Exercício 12 - Calcule os limites

a) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a}, \quad \text{com } a > 0$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2}}{x - 2}$

Diferença de potências de expoente inteiro e positivo

Uma regra que permite uma resolução rápida e eficaz de limites da classe anterior é a **diferença de potências de expoente inteiro e positivo**:

Teorema

Com quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}_0$, verifica-se a identidade:

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k$$

Ou equivalentemente,

$$a - b = \frac{a^n - b^n}{a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1}}$$

Cálculo de limites - regras práticas

Em muitos casos, ao calcularmos limites, utilizamos as regras:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{tg } x}{x} = 1$$

Exercício 13 - Calcule os limites

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } 5x}{x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{tg } 3x}{x}$

Cálculo de limites - regras práticas

Ao calcularmos os limites do tipo

$$\lim_{x \rightarrow a} [\varphi(x)]^{\psi(x)}$$

onde $\varphi(x)$ é positiva numa vizinhança de a , temos de considerar os seguintes casos:

- Se existem os limites finitos

$$\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = A \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a} \psi(x) = B$$

então

$$\lim_{x \rightarrow a} [\varphi(x)]^{\psi(x)} = A^B$$

Exercício 14 - Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{x} \right)^{1+x}$

Cálculo de limites - regras práticas

- Se
 - $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = A \neq 1$ e
 - $\lim_{x \rightarrow a} \psi(x) = B$, onde $0 \leq A \leq \infty$ e $-\infty \leq B \leq +\infty$,
então o cálculo do limite é feito directamente.

Exercício 15 - Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{2x+1} \right)^{x^2}$

Cálculo de limites - regras práticas

- Se $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 1$ e $\lim_{x \rightarrow a} \psi(x) = \infty$, então pressupõe-se que $\varphi(x) = 1 + \alpha(x)$, onde $\alpha(x) \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow a$, e consequentemente

$$\lim_{x \rightarrow a} [\varphi(x)]^{\psi(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} [\varphi(x) - 1] \psi(x)}$$

onde e é o número de Neper.

Exercício 16 - Calcule os seguintes limites

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^x$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}}$

Cálculo de limites - regras práticas

- Em casos que envolvam a função exponencial, podemos recorrer à regra:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Exercício 17 - Calcule os seguintes limites:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{6x} - 1}{x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\sin^2 x}$

Cálculo de limites - regras práticas

- Em casos que envolvam a função logarítmica, podemos recorrer à regra:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Exercício 18 - Calcule:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^3)}{\operatorname{tg}^3 x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_4(1+x)}{x}$

Cálculo de limites - regras práticas

- Para o cálculo dos limites da classe dos que se seguem, é útil recorrer ao

$$\lim_{x \rightarrow a} [\log f(x)] = \log \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]$$

(sempre que haja significado!)

Exercício 19

Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\log(2x + 1) - \log(x + 2)]$

- Elon Lages Lima, *curso de análise* vol. 1, Projecto Euclides (6ª edição), 1989.
- B. Demidovitch, *Problemas e Exercícios de Análise Matemática*, Editora Mir (5ª edição), 1986.

CONTINUIDADE de f.r.v.r.

Maria do Carmo Martins

outubro de 2013

Introdução

Vamos agora explorar o conceito de **continuidade**, um dos mais importantes e também das mais fascinantes ideias de toda a Matemática.

Veremos que a definição matemática de continuidade corresponde estritamente ao significado da palavra *continuidade* na linguagem do dia-a-dia (o processo contínuo é aquele que ocorre gradualmente, sem interrupções ou mudanças abruptas).

Função contínua num ponto

Sejam $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in X'$ e $a \in X$. Diz-se que f é contínua no ponto a se, e só se,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

(qualquer que seja o número positivo ϵ existir $\delta > 0$, tal que, sempre que x seja um ponto de X e verifique a condição $|x - a| < \delta$, se tenha $|f(x) - f(a)| < \epsilon$).

Assim,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

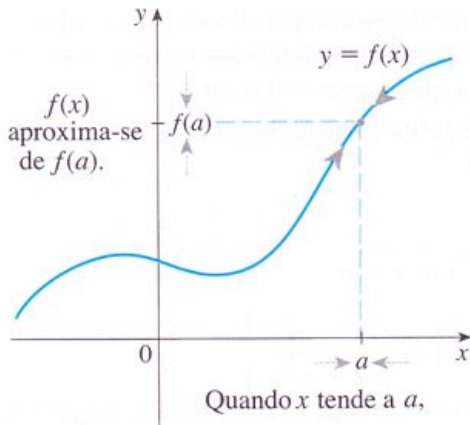
Observação 1

Note que a definição de função contínua num ponto requer que:

- 1 $f(a)$ esteja definida (isto é, a pertence no domínio de f);
- 2 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ exista;
- 3 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Função contínua - ilustração

Se f for contínua, então, sobre o gráfico de f , os pontos $(x, f(x))$ tendem ao ponto $(a, f(a))$ sobre o gráfico.



Observação 2

- 1 Só faz sentido falar em **continuidade** de uma função num ponto $x = a$, quando $a \in D_f$, pois só assim existirá $f(a)$.
- 2 **f é contínua em X** se, e só se, f é contínua em todos os pontos de X .
- 3 Se a é ponto isolado de X , então toda a função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, é contínua no ponto a . Em particular, se todos os pontos de X são isolados então qualquer função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua.
- 4 Ao investigar a continuidade de uma função f num ponto ou num conjunto, é fundamental ter sempre em conta o domínio de f .

Continuidade - Exemplos

- 1 $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em \mathbb{Z} , pois todo o ponto de \mathbb{Z} é ponto isolado.
- 2 $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em \mathbb{N} .

Exercício 1

a) Mostre que $f(x) = 2x + 1$ é uma função contínua em \mathbb{R} .

b) Sejam m e b dois números reais e f a função definida em \mathbb{R} por $f(x) = mx + b$. Prove que f é contínua em qualquer ponto $a \in \mathbb{R}$.

Continuidade lateral

Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in X$ e $x_0 \in X'$. Diz-se que:

- ① f é **contínua à esquerda** de x_0 se, e só se,

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0).$$

- ② f é **contínua à direita** de x_0 se, e só se,

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

Observação 3

- ① f é contínua em x_0 se, e só se, f é contínua à esquerda e à direita de x_0 .

- ② f é contínua em $[a, b]$ se, e só se,
 - f é contínua em todos os pontos de $]a, b[$;
 - $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$;
 - $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.

Descontinuidade num ponto e num conjunto

Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in X$ e $x_0 \in X'$. Diz-se que:

- 1 f é **descontínua em x_0** se, e só se, f não é contínua em x_0 .
- 2 f é **descontínua em X** se, e só se, existir $x_1 \in X$, tal que f é descontínua em x_1 .

Exercício 2

Estude a continuidade da função f no ponto $x = 3$, sendo $f : [0, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{x+1}, & x \in [0, 3[\\ 2, & x = 3 \\ \frac{x^2}{x+1}, & x \in]3, 5] \end{cases}$$

Teorema 1

Toda a restrição de uma função contínua é uma função contínua.

Teorema 2

Se $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em a , então f é limitada numa vizinhança de a , isto é existe $\delta > 0$ tal que o conjunto $f(X \cap]a - \delta, a + \delta[)$ é limitado.

$(f \text{ é contínua em } a \Rightarrow f \text{ é limitada numa vizinhança de } a)$

Teorema 3

Seja f uma função real de variável real. Se f é contínua em a e se $f(a) \neq 0$, então existe $\delta > 0$ tal que $f(x)$ tem o sinal de $f(a)$.

Teorema 4

Seja f uma função real de variável real. Se f é contínua em a , então $|f|$ é contínua em a .

Teorema 5

Se $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas no ponto $a \in X$, então:

- 1 $(f \pm g)$ é contínua em a .
- 2 $(k \cdot f)$ é contínua em a .
- 3 $(f \cdot g)$ é contínua em a .
- 4 Se $g(a) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ é contínua em a , com $g(x) \neq 0, \forall x \in X$.
- 5 $\sqrt[p]{f}$ é contínua em a desde que $f(x) \geq 0, \forall x \in X$ quando p é par.

Corolário 1

A função constante $f(x) = c$, com $c \in \mathbb{R}$, é contínua em \mathbb{R} .

Corolário 2

Se f_1, f_2, \dots, f_n (n número finito) são funções contínuas em a , então

① $f_1 + f_2 + \dots + f_n$ é contínua em a .

② $f_1 - f_2 - \dots - f_n$ é contínua em a .

Corolário 3

Se f é contínua em a , então f^n é contínua em a , com $n \in \mathbb{N}$.

Corolário 4

Todo o polinómio $p(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$, com $c_0, c_1, \cdots, c_{n-1}, c_n \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, é uma função contínua em \mathbb{R} .

Corolário 5

Toda a função racional é contínua no seu domínio.

Definição

- Uma **função racional** é uma função da forma

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

onde P e Q são polinómios. O domínio de f é

$$D = \{x \in \mathbb{R} : Q(x) \neq 0\}$$

Exercício 3

Seja f a função definida por

$$\begin{cases} x + 1, & x \leq 5 \\ \frac{16-2x}{6-x}, & x > 5 \wedge x \neq 6 \end{cases}$$

Estude a continuidade de f no seu domínio.

Teorema 6

Sejam

- $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas no ponto $a \in X$
- e $f(a) < g(a)$,

então

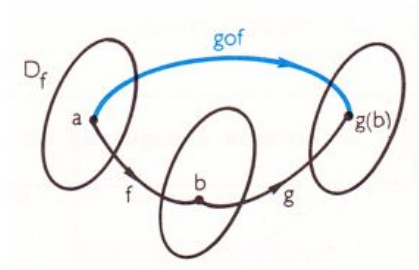
existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < g(x)$ para todo $x \in X$ com $|x - a| < \delta$.

Sejam $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ contínua no ponto $a \in X$ e $k \in \mathbb{R}$ uma constante.

- 1 Se $f(a) < k$, então existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < k$ para todo $x \in X$ com $|x - a| < \delta$.
- 2 Se $f(a) > k$, então existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > k$ para todo $x \in X$ com $|x - a| < \delta$.

Teoremas 7 - Continuidade da função composta

Se a função f é contínua em a e g é contínua no ponto correspondente $b = f(a)$, então a função $g \circ f$ é contínua em a .



Exercício 4

Qual o conjunto onde a função f definida por

$$f(x) = \sin(x^2 + 1)$$

é contínua?

Classificação de descontinuidades

- **Descontinuidade de primeira espécie:** existem os limites laterais, mas não se verifica

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0).$$

Se $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq f(x_0)$, diz-se que x_0 é ponto de **descontinuidade evitável ou removível**.

- **Descontinuidade de segunda espécie:** quando $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ ou $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ ou ambos não existem ou são infinitos.

Exercício 5

Considere a função real de variável real definida por

$$\begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x \geq -2 \wedge x \neq 0 \\ 0, & x < -2 \end{cases}$$

Conclua que $x = -2$ é ponto de descontinuidade de primeira espécie.

Exercício 6

Considere a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+e^{1/x}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Qual é o tipo de descontinuidade existente no ponto $x = 0$?

Exercício 7

Estude a continuidade da função real de variável real e classifique as descontinuidades se existirem, sendo

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \end{cases}$$

Prolongamento por continuidade

Convém recordar que, sendo f e g duas funções com domínios D_f e D_g , respetivamente, diz-se que g é um **prolongamento de f** (ou que f é uma restrição de g) se, e só se, $D_f \subset D_g$ e, para todo o $x \in D_f$, verifica-se a igualdade $f(x) = g(x)$.

Nestes termos, convencionaremos dizer que f é prolongável por continuidade ao ponto a se, e só se, existir um prolongamento F de f , com domínio $D_f \cup \{a\}$ e que seja contínuo no ponto a ; convencionaremos ainda (se se verificar a existência) chamar à função F prolongamento por continuidade de f ao ponto a .

Função prolongável por continuidade

Definição

*Diz-se que f é **prolongável por continuidade** ao ponto x_0 se e só se x_0 não pertencer ao domínio de f , mas existir o limite de $f(x)$ no ponto x_0 , (supondo que x_0 é ponto de acumulação do domínio).*

Exercício 8

Dada a função real de variável real definida por

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{\operatorname{sen} \pi x}$$

indique o domínio de f e, se possível, um prolongamento contínuo de f a $A = D_f \cup \{0, 1\}$.

Funções contínuas em intervalos

As funções que são contínuas em conjuntos com determinadas características (designadamente: em intervalos, por um lado, em conjuntos limitados e fechados, por outro) têm propriedades especiais de grande interesse.

Teorema 8

Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$. Então f é limitada em $[a, b]$, isto é existe um número $C \geq 0$ tal que $|f(x)| \leq C$ para todo o x pertencente a $[a, b]$.

Exercício 9

Seja a função f definida em $[0, \frac{\pi}{2}]$ tal que $f(x) = \sin x$. Prove que f é limitada.

Exercício 10

Considere a função $f(x) = x$ definida em $[0, +\infty[$. Será f limitada?

Exercício 11

Consideremos a função f definida em $[0, 1]$, tal que

$$\begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in]0, 1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Será f limitada?

Teorema 9 - Teorema de Weierstrass*

Toda a função contínua num intervalo fechado e não vazio tem nesse intervalo máximo e mínimo, isto é:

$$\left\{ \begin{array}{l} f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \\ f \text{ contínua} \end{array} \right. \Rightarrow f \text{ admite máximo e mínimo}$$

* Karl Weierstrass (1815-1897), alemão, durante muitos anos foi professor em Berlim. Foi dos matemáticos que mais influência exerceu no desenvolvimento e fundamentação da Análise.

Exercício 12

Seja $f(x) = \cos x$ definida em $[0, \frac{\pi}{2}]$. Determine o máximo e o mínimo da função.

Breve introdução ao teorema de Bolzano

Designado também por **Teorema dos Valores Intermédios**, é um teorema com grande importância na determinação de valores específicos, nomeadamente zeros, de certas funções reais de variável real. Este teorema foi enunciado pela primeira vez em 1817, por Bernard Bolzano (1781-1848), um sacerdote católico, matemático e filósofo, nascido em Praga. É-lhe também por vezes associado um coautor de nome Augustin Louis Cauchy (1789-1857), matemático e físico francês, discípulo de matemáticos conterrâneos como Pierre Simon Laplace e Joseph Louis de Lagrange.

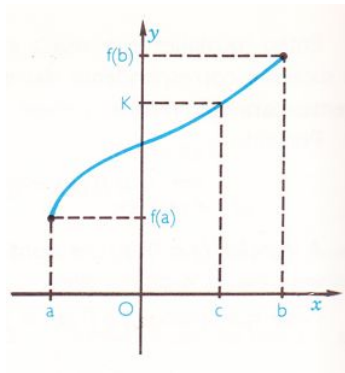
Teorema 10 - Teorema de Bolzano-Cauchy ou dos valores intermédios

Se f é uma função contínua num intervalo fechado $[a, b]$ e k é um número real compreendido entre $f(a)$ e $f(b)$, então existe pelo menos um valor real c , pertencente ao intervalo aberto $]a, b[$ tal que $f(c) = k$.

A ideia fundamental deste teorema exprime-se por vezes da seguinte forma:

“Uma função contínua num intervalo não passa de um valor a outro sem passar por todos os valores intermédios.”

Visualização do Teorema de Bolzano-Cauchy



$$\begin{cases} f \text{ é contínua em } [a, b] \\ f(a) < k < f(b) \end{cases} \Rightarrow \exists c \in]a, b[: f(c) = k$$

Exercício 13

Considere a função f definida em \mathbb{R} por $f(x) = x^2 - 2x$. Qual o valor lógico da proposição:

$$\exists c \in]0, 6[: f(c) = 15?$$

Exercício 14

Considere a função $f : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \in [0, 2[\\ 1, & x \in [2, 3] \end{cases}$$

Poder-se-á aplicar o teorema de Bolzano-Cauchy a f ?

Exercício 15

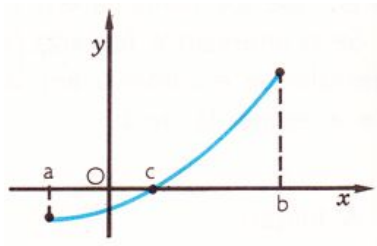
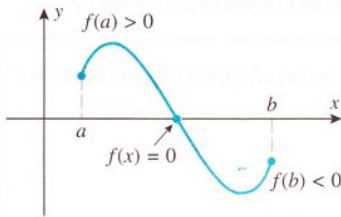
Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} -1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 4, & 5 \leq x \leq 6 \end{cases}$$

Poder-se-á aplicar o teorema de Bolzano-Cauchy?

Seja f uma função real de variável real definida e contínua no intervalo fechado $[a, b]$. Se $f(a)$ e $f(b)$ têm sinais contrários, então existe pelo menos um ponto $c \in]a, b[$ em que a função se anula.

Visualizações do Corolário



$$\begin{cases} f \text{ é contínua em } [a, b] \\ f(a) \times f(b) < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \exists c \in]a, b[: f(c) = 0$$

Exercício 16

Mostre que $p(x) = 2x^3 + 5x^2 + 6$ possui, pelo menos, uma raiz real e indique se é positiva ou negativa.

- Maria Augusta F. Neves, Maria Teresa C. Vieira e Alfredo G. Alves, *livro de texto 12º matemática*, Porto Editora.
- Tom M. Apostol, *Cálculo*, vol. 1, Editora reverté , Ltda, 1985.
- J. Campos Ferreira, *Introdução à Análise Matemática*, 3ª edição, Fundação Calouste Gulbenkian, 1990.
- Elon Lages Lima, *curso de análise*, vol1. Projeto Euclides, 1987.

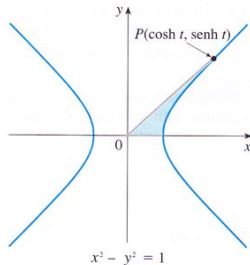
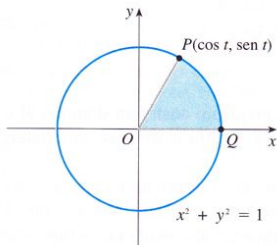
FUNÇÕES HIPERBÓLICAS

Maria do Carmo Martins

outubro 2013

Introdução

Certas combinações de e^x e e^{-x} aparecem frequentemente na Matemática Aplicada e na Engenharia e, por isso, merecem nomes especiais. Elas são análogas de muitas formas às funções trigonométricas e possuem a mesma relação com a hipérbole que as funções trigonométricas têm com o círculo.



Por essa razão são chamadas **funções hiperbólicas**.

Seno hiperbólico

Definição

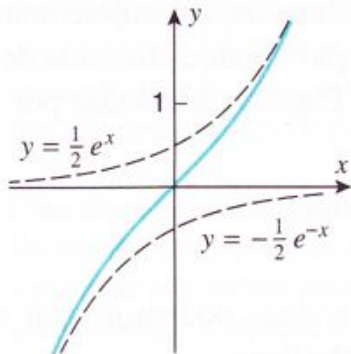
Chama-se **Seno hiperbólico** à função definida em \mathbb{R} pela fórmula

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Seno hiperbólico - continuação

Notemos que:

- A função $\sinh x$ é contínua no seu domínio;
- o seu contradomínio é \mathbb{R} .



Cosseno hiperbólico

Definição

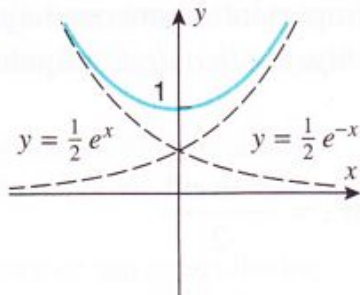
Chama-se **Cosseno hiperbólico** à função definida em \mathbb{R} pela fórmula

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Cosseno hiperbólico - continuação

Notemos que:

- A função $\cosh x$ é contínua no seu domínio;
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \cosh x = +\infty$
- o seu contradomínio é $[1, +\infty[$.



Tangente hiperbólica

Definição

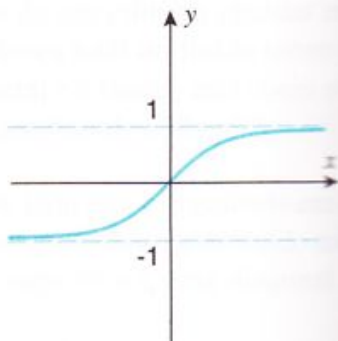
Chama-se **tangente hiperbólica** à função definida em \mathbb{R} pela fórmula

$$\operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Tangente hiperbólica - continuação

Notemos que:

- A função $\operatorname{tgh} x$ é contínua no seu domínio;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{tgh} x = 1$;
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{tgh} x = -1$;
- o seu contradomínio é $] -1, 1[$.



Cotangente hiperbólica

Definição

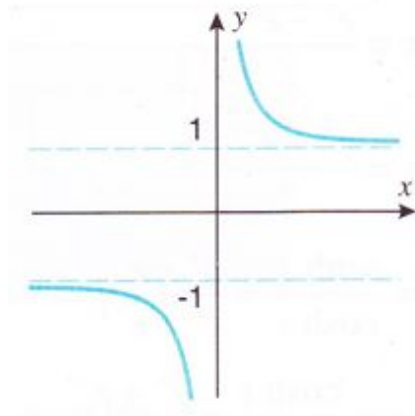
: Chama-se **cotangente hiperbólica** à função definida em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ pela fórmula

$$\operatorname{cotgh} x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

Cotangente hiperbólica - continuação

Notemos que:

- A função $\cotgh x$ é contínua no seu domínio;
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cotgh x = +\infty$;
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} \cotgh x = -\infty$;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \tgh x = 1$;
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \tgh x = -1$;
- o seu contradomínio é $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$.



Secante hiperbólica

Definição

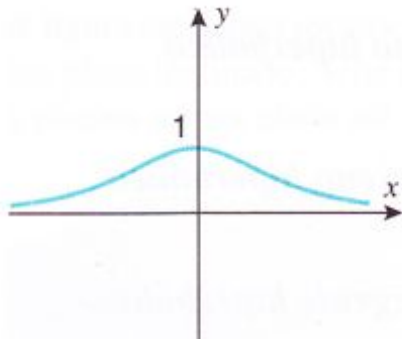
: Chama-se **secante hiperbólica** à função definida em \mathbb{R} pela fórmula

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}.$$

Secante hiperbólica - continuação

Notemos que:

- A função $\operatorname{sech} x$ é contínua no seu domínio;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{sech} x = 0$;
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{sech} x = 0$;
- o seu contradomínio é $]0, 1]$.



Cossecante hiperbólica

Definição

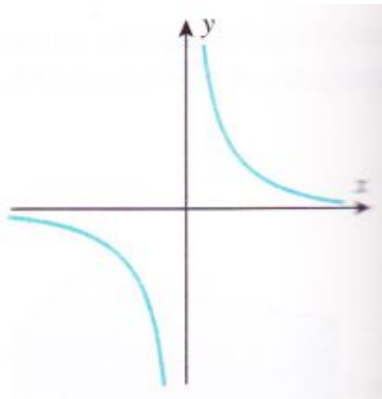
Chama-se **cossecante hiperbólica** à função definida em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ pela fórmula

$$\operatorname{cosech} x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}.$$

Cossecante hiperbólica - continuação

Notemos que:

- A função $\operatorname{cosech} x$ é contínua no seu domínio;
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{cosech} x = +\infty$;
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{cosech} x = -\infty$;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{cosech} x = 0$;
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{cosech} x = 0$;
- o seu contradomínio é $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.





O desenho do Gateway Arch, próximo de St. Louis, está baseado numa curva invertida do cosseno hiperbólico.

Exercício 1 - Identidades hiperbólicas

Mostre que:

$$1) \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$2) 1 - \operatorname{tgh}^2 x = \operatorname{sech}^2 x$$

$$3) \operatorname{cotgh}^2 x - 1 = \operatorname{cosech}^2 x$$

$$4) \cosh x + \sinh x = e^x$$

$$5) \cosh x - \sinh x = e^{-x}$$

$$6) \cosh(-x) = \cosh x$$

$$7) \sinh(-x) = -\sinh x$$

Exercício 1 - Identidades hiperbólicas (continuação)

$$8) \cosh(a + b) = \cosh a \cdot \cosh b + \sinh a \cdot \sinh b$$

$$9) \cosh(a - b) = \cosh a \cdot \cosh b - \sinh a \cdot \sinh b$$

$$10) \sinh(a + b) = \sinh a \cdot \cosh b + \sinh b \cdot \cosh a$$

$$11) \sinh(a - b) = \sinh a \cdot \cosh b - \sinh b \cdot \cosh a$$

$$12) \operatorname{tgh}(a + b) = \frac{\operatorname{tgh} a + \operatorname{tgh} b}{1 + \operatorname{tgh} a \cdot \operatorname{tgh} b}$$

$$13) \operatorname{tgh}(a - b) = \frac{\operatorname{tgh} a - \operatorname{tgh} b}{1 - \operatorname{tgh} a \cdot \operatorname{tgh} b}$$

$$14) \sinh(2x) = 2 \sinh x \cdot \cosh x$$

$$15) \cosh(2x) = \cosh^2 x + \sinh^2 x$$

$$16) \cosh(2x) = 2 \cosh^2 x - 1$$

$$17) \cosh(2x) = 1 + 2 \sinh^2 x$$

Exercício 1 - Identidades hiperbólicas (conclusão)

$$18) \operatorname{tgh}(2x) = \frac{2 \operatorname{tgh} x}{1 + \operatorname{tgh}^2 x}$$

$$19) \sinh x = \frac{2 \operatorname{tgh}\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - \operatorname{tgh}^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$20) \cosh x = \frac{1 + \operatorname{tgh}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - \operatorname{tgh}^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$21) 2 \sinh a \cdot \cosh b = \sinh(a + b) + \sinh(a - b)$$

$$22) 2 \cosh a \cdot \sinh b = \sinh(a + b) - \sinh(a - b)$$

$$23) 2 \cosh a \cdot \cosh b = \cosh(a + b) + \cosh(a - b)$$

$$24) 2 \sinh a \cdot \sinh b = \cosh(a + b) - \cosh(a - b)$$

Funções inversas das funções hiperbólicas

Sendo as funções seno hiperbólico e tangente hiperbólica injetivas, elas admitem função inversa. Quando uma função não é injetiva há que restringir o domínio para poder definir a respetiva função inversa. Este procedimento faz-se relativamente às funções cosseno hiperbólico e secante hiperbólica.

Arco seno hiperbólico

Definição

Arco seno hiperbólico

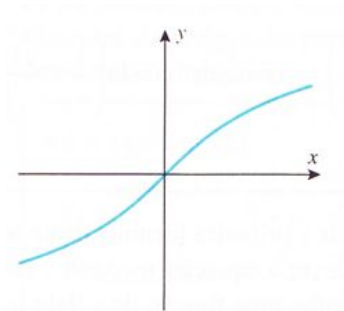
$$y = \operatorname{arcsenh} x \Leftrightarrow x = \operatorname{senh} y$$

ou

$$y = \operatorname{senh}^{-1} x \Leftrightarrow x = \operatorname{senh} y$$

Arco seno hiperbólico - continuação

- $D = \mathbb{R}$
- Contradomínio: \mathbb{R}
- Relações básicas:
 - 1 $\operatorname{arcsenh}(\sinh x) = x$
 - 2 $\sinh(\operatorname{arcsenh} x) = x$



Arco cosseno hiperbólico

Definição

Arco cosseno hiperbólico

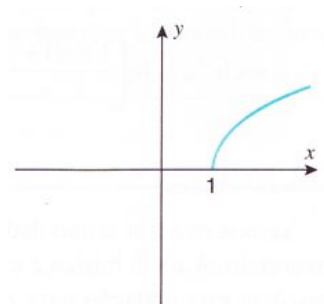
$$y = \operatorname{arccosh} x \quad \Leftrightarrow \quad x = \cosh y$$

ou

$$y = \cosh^{-1} x \quad \Leftrightarrow \quad x = \cosh y$$

Arco cosseno hiperbólico - continuação

- $D = [1, +\infty[$
- Contradomínio: $[0, +\infty[$
- Relações básicas:
 - 1 $\operatorname{arccosh}(\cosh x) = x$ se $x \geq 0$
 - 2 $\cosh(\operatorname{arccosh} x) = x$ se $x \geq 1$



Arco tangente hiperbólico

Definição

- **Arco tangente hiperbólico**

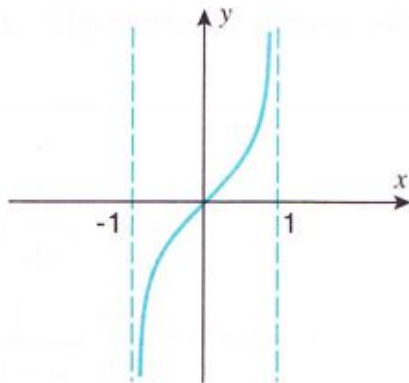
$$y = \operatorname{arctgh} x \Leftrightarrow x = \operatorname{tgh} y$$

ou

$$y = \operatorname{tgh}^{-1} x \Leftrightarrow x = \operatorname{tgh} y$$

Arco tangente hiperbólico - continuação

- $D =] - 1, 1[$
- Contradomínio: \mathbb{R}
- Relações básicas:
 - 1 $\operatorname{arctgh}(\operatorname{tgh} x) = x$
 - 2 $\operatorname{tgh}(\operatorname{arctgh} x) = x$ se $-1 < x < 1$



Arco cotangente hiperbólico

Definição

Arco cotangente hiperbólico

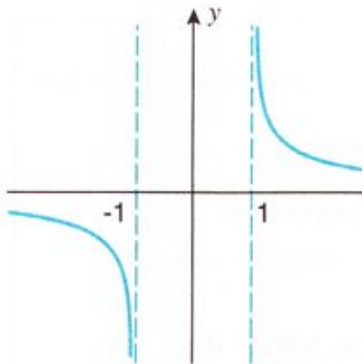
$$y = \operatorname{arccotgh} x \Leftrightarrow x = \operatorname{cotgh} y$$

ou

$$y = \operatorname{cotgh}^{-1} x \Leftrightarrow x = \operatorname{cotgh} y$$

Arco cotangente hiperbólico - continuação

- $D =] - \infty, -1[\cup] 1, +\infty[$
- Contradomínio:
 $] - \infty, 0[\cup] 0, +\infty[$
- Relações básicas:
 - 1 $\operatorname{arccotgh}(\operatorname{cotgh} x) = x$
se $x < 0$ ou $x > 0$
 - 2 $\operatorname{cotgh}(\operatorname{arccotgh} x) = x$
se $x < -1$ ou $x > 1$



Arco secante hiperbólico

Definição

- Arco secante hiperbólico

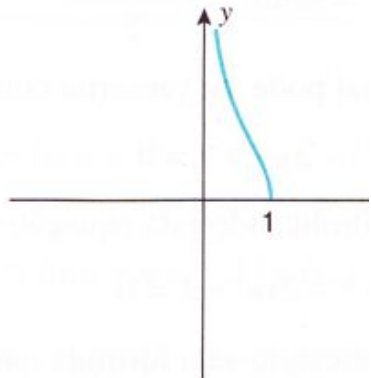
$$y = \operatorname{arcsech} x \quad \Leftrightarrow \quad x = \operatorname{sech} y$$

ou

$$y = \operatorname{sech}^{-1} x \quad \Leftrightarrow \quad x = \operatorname{sech} y$$

Arco secante hiperbólico - continuação

- $D =]0, 1]$
- Contradomínio: $[0, +\infty[$
- Relações básicas:
 - 1 $\operatorname{arcsech}(\operatorname{sech} x) = x$ se $x \geq 0$
 - 2 $\operatorname{sech}(\operatorname{arcsech} x) = x$ se $0 < x \leq 1$



Arco cossecante hiperbólico

Definição

Arco cossecante hiperbólico

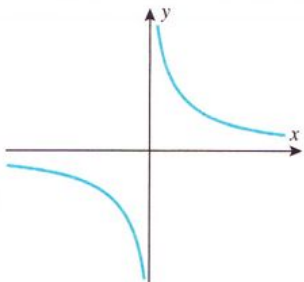
$$y = \operatorname{arccosech} x \Leftrightarrow x = \operatorname{cosech} y$$

ou

$$y = \operatorname{cosech}^{-1} x \Leftrightarrow x = \operatorname{cosech} y$$

Arco cossecante hiperbólico

- $D =] - \infty, 0[\cup] 0, +\infty[$
- Contradomínio:
 $] - \infty, 0[\cup] 0, +\infty[$
- Relações básicas:
 - 1 $\operatorname{arccosech}(\operatorname{cosech} x) = x$
se $x < 0$ ou $x > 0$
 - 2 $\operatorname{cosech}(\operatorname{arccosech} x) = x$
se $x < 0$ ou $x > 0$



Exercício 2

Como as funções hiperbólicas são expressas em termos de e^x , é expectável que as funções hiperbólicas inversas sejam expressas em termos de logaritmos naturais (\ln). Assim sendo, mostre que:

$$① \sinh^{-1}x = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right)$$

$$② \cosh^{-1}x = \ln \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right)$$

$$③ \operatorname{tgh}^{-1}x = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$$

$$④ \operatorname{cotgh}^{-1}x = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right)$$

$$⑤ \operatorname{sech}^{-1}x = \ln \left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} \right)$$

$$⑥ \operatorname{cosech}^{-1}x = \ln \left(\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{|x|} \right)$$

Referências:

- Howard Anton, *Cálculo um novo horizonte*, Vol.1 , 6ª Edição, Bookman.
- James Stewart, *Cálculo*, Vol.1, 5ª Edição, Thomson, 2008.

CÁLCULO DIFERENCIAL

Maria do Carmo Martins

outubro de 2013

Introdução

Muitos fenómenos físicos envolvem grandezas que variam - a velocidade de um foguete, a inflação da moeda, o número de bactérias numa cultura, a intensidade dos tremores de um terramoto, a voltagem de um sinal elétrico e assim por diante. Neste capítulo, vamos desenvolver o conceito de *derivada*, que é a ferramenta matemática usada para estudar taxas nas quais variam as grandezas físicas. Veremos que existe uma estreita relação entre as taxas de variação e retas tangentes a gráficos.

Razão incremental

Seja $y = f(x)$ uma função real de variável real. Chama-se **razão incremental** da função f entre x_0 e $x_1 = x_0 + h$ ao quociente (ou razão):

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Mas,

- $f(x_1) = f(x_0 + h)$ e
- $x_1 = x_0 + h \Leftrightarrow h = x_1 - x_0$

e assim,

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

onde

Δx é o acréscimo dado à variável independente x (ou incremento)

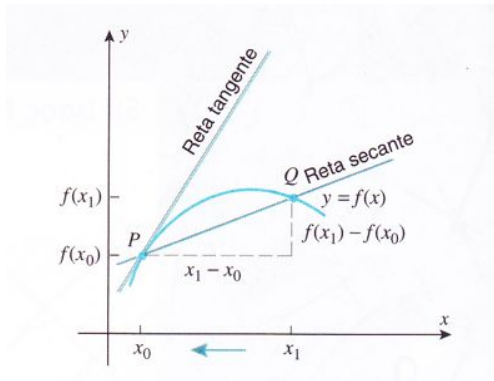
Δy acréscimo correspondente da função.

Interpretação geométrica da razão incremental

A razão incremental

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

representa o declive da reta secante PQ .



Derivada de uma função num ponto

Chama-se **derivada da função** $y = f(x)$ **no ponto** x_0 ($x_0 \in D_f$), ao limite da razão incremental da função f entre x_0 e x quando $x \rightarrow x_0$, isto é,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Representa-se por

$$f'(x_0); \quad y'(x_0); \quad D_{f(x_0)}; \quad \left(\frac{df}{dx} \right)_{x=x_0} \quad \text{ou} \quad \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=x_0}$$

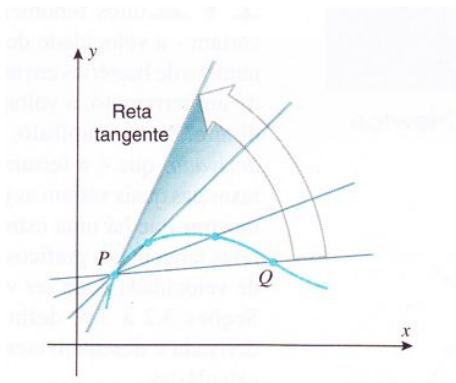
Derivada de uma função num ponto - continuação

Portanto:

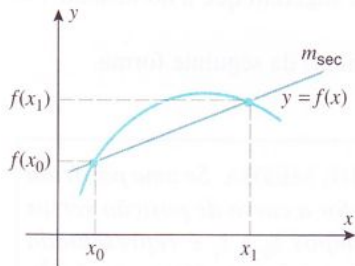
$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \end{aligned}$$

Interpretação geométrica de derivada de uma função num ponto

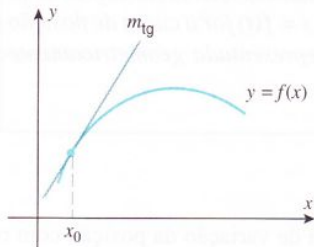
Conforme sugere a figura, o ponto Q move-se ao longo da curva em direção a P se e somente se x_1 tende para x_0 . Assim, $f'(x_0)$ representa o declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$.



Taxas de variação média e instantânea



m_{sec} é a taxa de variação média de y em relação a x no intervalo $[x_0, x_1]$.



m_{tg} é a taxa de variação instantânea de y em relação a x no ponto x_0 .

Observação 1

- Pode não existir a derivada de uma função num ponto;
- A derivada de uma função num ponto pode ser finita ou infinita;
- Uma função f diz-se **diferenciável ou derivável num ponto** x_0 se tem derivada finita nesse ponto.

Derivadas laterais

Diz-se que:

- f é derivável à **direita de x_0** se existe o

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

a que se chama **derivada à direita de x_0** e se representa por

$$f'(x_0^+); \quad f'_+(x_0); \quad f'_d(x_0); \quad \left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_0^+}; \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0^+}; \quad D_{f(x_0^+)}.$$

Derivadas laterais

Diz-se que

- f é derivável à **esquerda de x_0** se existe o

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

a que se chama **derivada à esquerda de x_0** e se representa por

$$f'(x_0^-); \quad f'_-(x_0); \quad f'_e(x_0); \quad \left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_0^-}; \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0^-}; \quad D_{f(x_0^-)}.$$

Observação 2

Uma função f é derivável num ponto x_0 se, e só se, existirem e forem iguais $f'_-(x_0)$ e $f'_+(x_0)$. Nesse caso,

$$f'(x_0^-) = f'(x_0^+) = f'(x_0).$$

Função diferenciável num intervalo

- Uma função diz-se **diferenciável num intervalo** $]a, b[$ quando admite derivada finita em todos os pontos do intervalo.
- Uma função diz-se **diferenciável num intervalo** $[a, b]$ quando
 - 1 é diferenciável em $]a, b[$
 - 2 diferenciável à direita de a e
 - 3 diferenciável à esquerda de b .

Função Derivada

Seja $y = f(x)$ uma função real de variável real e seja A o conjunto dos pontos onde f é diferenciável. Chama-se **função derivada** ou simplesmente **derivada** de f à função que a cada $x \in A$ associa a derivada nesse ponto $f'(x)$.

$$x \in A \longrightarrow f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Notação:

$$f'(x); \quad y'(x); \quad \frac{df}{dx}; \quad \frac{dy}{dx}; \quad D_f$$

Exercício 1

Considere a função real de variável real $f(x) = x^2 - 1$. Calcule:

a) $f'(x)$

b) $f'(3)$

Exercício 2

Mostre que não existe a derivada da função $f(x) = |x|$ no ponto $x = 0$.

Exercício 3

Calcule a derivada da função $g(x) = \sqrt[3]{x^2}$ no ponto $x = 0$.

Equação da reta tangente ao gráfico de uma função num ponto

Seja f uma função que admite derivada no ponto x_0 e seja $m = f'(x_0)$. Então, a equação da tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$ define-se por:

- $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, **se $f'(x_0)$ for finito;**
- $x = x_0$, **se $f'(x_0)$ for infinito.**

Equação da reta normal ao gráfico de uma função

Sabemos que duas retas são perpendiculares se o declive de uma for igual ao simétrico do inverso da outra. Assim, a equação da reta normal ao gráfico de f no ponto x_0 define-se por:

- $y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0), \quad \text{se } f'(x_0) \neq 0$

- $x = x_0, \quad \text{se } f'(x_0) = 0.$

Exercício 4

Escreva as equações da reta tangente e da reta normal à curva $y = x^3$ no ponto $(1, 1)$.

Exercício 5

Escreva uma equação da reta tangente à curva $y = \frac{2}{x-3}$ no ponto de abscissa 1.

Exercício 6

Determine as coordenadas dos pontos da curva $y = x^3 - 6x$, em que a tangente nesses pontos é uma reta horizontal.

Teorema

Toda a função diferenciável num ponto é contínua nesse ponto.

Observação 3

O recíproco do teorema anterior nem sempre é válido, isto é,

$$f \text{ contínua em } x_0 \not\Rightarrow f \text{ diferenciável em } x_0.$$

Exemplos:

- 1 A função real de variável real f definida por

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

é contínua em $x = 0$, mas não é diferenciável nesse ponto.

- 2 Dê um outro exemplo de uma função contínua num ponto, mas que não seja diferenciável nesse ponto.

Regras de derivação

Se $f(x) = c$, com $c \in \mathbb{R}$, então

$$f'(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Exemplos:

- ❶ Sendo $f(x) = 2$, então $f'(x) = 0$.
- ❷ Se $g(x) = \frac{1}{3}$, então $g'(x) = 0$.
- ❸ Se $f(x) = 2^{349000}$, então $f'(x) = 0$.

Derivada da soma algébrica e do produto

Teorema

Sejam f e g duas funções reais de variável real diferenciáveis em x_0 . Então, a soma $f + g$, a diferença $f - g$ e o produto $f \cdot g$ são também diferenciáveis em x_0 e tendo-se:

$$① \quad (f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

$$② \quad (f - g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$$

$$③ \quad (f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

Corolário 1

Se f_1, f_2, \dots, f_n são um número finito de funções diferenciáveis em x_0 , então

① $(f_1 + f_2 + \dots + f_n)$ é diferenciável em x_0

② $(f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_n)$ é diferenciável em x_0

Tendo-se

①

$$(f_1 + f_2 + \dots + f_n)'(x_0) = f_1'(x_0) + f_2'(x_0) + \dots + f_n'(x_0)$$

②

$$\begin{aligned}(f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_n)'(x_0) = & f_1'(x_0) \cdot f_2(x_0) \cdot \dots \cdot f_n(x_0) + \\ & + f_1(x_0) \cdot f_2'(x_0) \cdot \dots \cdot f_n(x_0) + \\ & + \dots + f_1(x_0) \cdot f_2(x_0) \cdot \dots \cdot f_n'(x_0)\end{aligned}$$

Corolário 2

Se f é uma função real de variável real diferenciável em x_0 , então f^n é também diferenciável em x_0 , tendo-se

$$(f^n)'(x_0) = n f^{n-1}(x_0) \cdot f'(x_0)$$

Corolário 3

Seja f uma função real de variável real diferenciável em x_0 e c uma constante. Então, a função $c \cdot f$ é também diferenciável em x_0 , tendo-se

$$(c \cdot f)'(x_0) = c \cdot f'(x_0)$$

Teorema

Seja g uma função real de variável real. Se g é diferenciável em x_0 e $g(x_0) \neq 0$, então $\frac{1}{g}$ é também diferenciável em x_0 , tendo-se

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Corolário: derivada do Quociente

Sejam f e g duas funções reais de variável real. Se f e g são diferenciáveis em x_0 e se $g(x_0) \neq 0$, então $\frac{f}{g}$ também é diferenciável em x_0 , tendo-se

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Derivada da função composta

Sejam $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : f(A) \rightarrow \mathbb{R}$, tais que f é diferenciável em x_0 e g é diferenciável em $f(x_0)$. Então, $g \circ f$ é diferenciável em x_0 , tendo-se

$$(g \circ f)'(x_0) = g'[f(x_0)] \cdot f'(x_0)$$

Derivada da função inversa

Sendo f uma bijeção definida e diferenciável em $x_0 \in]a, b[$, a bijeção inversa f^{-1} é diferenciável em y_0 e

$$(f^{-1}(y_0))' = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Derivada de uma função definida sob a forma paramétrica

- Circunferência

A equação cartesiana da circunferência de centro na origem e raio r é

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Na forma paramétrica, tem-se

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}, \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

- Elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ou na forma paramétrica

$$\begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = b \sin \theta \end{cases}, \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

Derivada de uma função definida sob a forma paramétrica

- Caso geral

Seja f uma função real de variável real definida pelas equações paramétricas

$$\begin{cases} x = f_1(t) \\ y = f_2(t) \end{cases}, t \in [t_1, t_2].$$

Suponhamos que $f_1(t)$ admite inversa e que f_1 e f_2 são diferenciáveis em $[t_1, t_2]$.

Assim,

$$x = f_1(t) \Leftrightarrow t = f_1^{-1}(x)$$

e

$$y = f_2(t) = f_2(f_1^{-1}(x)).$$

Derivada de uma função definida sob a forma paramétrica - conclusão

Ora,

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}.$$

Donde,

$$y' = \frac{dy}{dx} = f_2'(t) \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = f_2'(t) \cdot \frac{1}{f_1'(t)}.$$

Portanto,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

Exercício 7

Considere a função definida sob a forma paramétrica

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \operatorname{sen} t \end{cases}, 0 \leq t \leq \pi.$$

Calcule $\frac{dy}{dx}$.

Derivada da função implícita

Problema

Sem explicitar y , calcule a derivada de $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Não precisamos resolver uma equação para y em termos de x para encontrar a derivada de y . Em vez disso, podemos usar o método da diferenciação implícita, que consiste em derivar ambos os membros da equação em relação a x e então resolver a equação resultante para y' .

Exercício 8

Aplicando a derivada da função implícita, calcule as seguintes derivadas:

a) $y^6 + 4xy + x^3 = 0$

b) $\sin x \sin y = 1$

Derivada da função logaritmo

- Se $y = \log_a x$ com $a > 0 \wedge a \neq 1$, então $y' = \frac{1}{x \ln a}$.

Generalização:

$$[\log_a (f(x))]' = \frac{f'(x)}{f(x) \ln a}$$

Caso particular: quando $a = e$

- Se $y = \ln x$, então $y' = \frac{1}{x}$

Generalização:

$$[\ln (f(x))]' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Derivada da potência

- Se $y = x^\alpha$ com $\alpha \in \mathbb{R}$, então

$$y' = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Generalização:

$$[u(x)^\alpha]' = \alpha u^{\alpha-1}(x) u'(x)$$

Derivada da função exponencial

- Se $y = a^x$ com $a > 0$ e $a \neq 1$, então $y' = a^x \ln a$.

Generalização:

$$[a^{u(x)}]' = a^{u(x)} u'(x) \ln a$$

Caso particular: quando $a = e$

- Se $y = e^x$, então $y' = e^x$

Generalização:

$$[e^{u(x)}]' = e^{u(x)} u'(x)$$

Derivada da função exponencial - potência

Se $y = u(x)^{v(x)}$ $u(x) > 0$, então

$$y' = \underbrace{v(x) u^{v(x)-1}(x) u'(x)}_{\text{regra da potência}} + \underbrace{u^{v(x)}(x) \ln u(x) v'(x)}_{\text{regra da exponencial}}.$$

Derivadas das funções seno e cosseno

- Se $y = \text{sen } x$, então $y' = \cos x$

Generalização:

$$[\text{sen } (f(x))]' = \cos (f(x)) f'(x)$$

- Se $y = \cos x$, então $y' = -\text{sen } x$

Generalização:

$$[\cos (f(x))]' = -\text{sen } (f(x)) f'(x).$$

Derivadas das funções tangente e cotangente

- Se $y = \operatorname{tg} x$, então $y' = \sec^2 x$

Generalização:

$$[\operatorname{tg}(f(x))]' = \sec^2(f(x)) f'(x).$$

- Se $y = \operatorname{cotg} x$, então $y' = -\operatorname{cosec}^2 x$

Generalização:

$$[\operatorname{cotg}(f(x))]' = -\operatorname{cosec}^2(f(x)) f'(x).$$

Derivadas das funções secante e cossecante

- Se $y = \sec x$, então $y' = \sec x \operatorname{tg} x$

Generalização:

$$[\sec(f(x))]' = \sec(f(x)) \operatorname{tg}(f(x)) f'(x).$$

- Se $y = \operatorname{cosec} x$, então $y' = -\operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x$

Generalização:

$$[\operatorname{cosec}(f(x))]' = -\operatorname{cosec}(f(x)) \operatorname{cotg}(f(x)) f'(x).$$

Derivadas das funções seno hiperbólico e cosseno hiperbólico

- Se $y = \sinh x$, então $y' = \cosh x$

Generalização:

$$[\sinh (f(x))]' = \cosh (f(x)) f'(x)$$

- Se $y = \cosh x$, então $y' = \sinh x$

Generalização:

$$[\cosh (f(x))]' = \sinh (f(x)) f'(x).$$

Derivadas das funções tangente hiperbólica e cotangente hiperbólica

- Se $y = \operatorname{tgh} x$, então $y' = \operatorname{sech}^2 x$

Generalização:

$$[\operatorname{tgh}(f(x))]' = \operatorname{sech}^2(f(x)) f'(x).$$

- Se $y = \operatorname{cotgh} x$, então $y' = -\operatorname{cosech}^2 x$

Generalização:

$$[\operatorname{cotgh}(f(x))]' = -\operatorname{cosech}^2(f(x)) f'(x).$$

Derivadas das funções secante hiperbólica e cossecante hiperbólica

- Se $y = \operatorname{sech} x$, então $y' = -\operatorname{sech} x \operatorname{tgh} x$

Generalização:

$$[\operatorname{sech}(f(x))]' = -\operatorname{sech}(f(x)) \operatorname{tgh}(f(x)) f'(x).$$

- Se $y = \operatorname{cosech} x$, então $y' = -\operatorname{cosech} x \operatorname{cotgh} x$

Generalização:

$$[\operatorname{cosech}(f(x))]' = -\operatorname{cosech}(f(x)) \operatorname{cotgh}(f(x)) f'(x).$$

Derivadas das inversas das funções circulares

- Se $y = \arcsen x$, então $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Generalização:

$$[\arcsen (f(x))]' = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}$$

- Se $y = \arccos x$, então $y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Generalização:

$$[\arccos (f(x))]' = -\frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}.$$

Derivadas das inversas das funções circulares

- Se $y = \operatorname{arctg} x$, então $y' = \frac{1}{1+x^2}$

Generalização:

$$[\operatorname{arctg} (f(x))]' = \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}.$$

- Se $y = \operatorname{arccotg} x$, então $y' = -\frac{1}{1+x^2}$

Generalização:

$$[\operatorname{arccotg} (f(x))]' = -\frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}.$$

Derivadas das inversas das funções hiperbólicas

- Se $y = \operatorname{arcsenh} x$, então $y' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

Generalização:

$$[\operatorname{arcsenh} (f(x))]' = \frac{f'(x)}{\sqrt{1+[f(x)]^2}}$$

- Se $y = \operatorname{arccosh} x$, então $y' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

Generalização:

$$[\operatorname{arccosh} (f(x))]' = \frac{f'(x)}{\sqrt{[f(x)]^2-1}}.$$

Derivadas das inversas das funções hiperbólicas

- Se $y = \operatorname{arctgh} x$, então $y' = \frac{1}{1-x^2}$

Generalização:

$$[\operatorname{arctgh} (f(x))]' = \frac{f'(x)}{1-[f(x)]^2}.$$

- Se $y = \operatorname{arccotgh} x$, então $y' = \frac{1}{1-x^2}$

Generalização:

$$[\operatorname{arccotgh} (f(x))]' = \frac{f'(x)}{1-[f(x)]^2}.$$

Derivada de ordem n

Seja f uma função diferenciável num intervalo.

$f'(x)$	primeira derivada
$(f'(x))' = f''(x)$	segunda derivada ou derivada de segunda ordem
$(f''(x))' = f'''(x)$	terceira derivada ou derivada de terceira ordem
$(f'''(x))' = f^{(4)}(x)$	quarta derivada ou derivada de quarta ordem
\vdots	\vdots
$(f^{(n-1)}(x))' = f^{(n)}(x)$	derivada de ordem n

Notação:

$$f^{(n)}(x); \quad y^{(n)}; \quad \frac{d^n y}{dx^n}; \quad D^n y; \quad D^n f$$

Por definição:

$$f^{(n)}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(n-1)}(x+h) - f^{(n-1)}(x)}{h} = \frac{d^n f}{dx^n}$$

Exercício 9

Determine a derivada de ordem n das funções:

a) $f(x) = 5x^3 - 3x^2 + 4x - 3$;

b) $f(x) = e^{ax}$;

c) $f(x) = \frac{1}{1-x}$;

d) $f(x) = \log x$;

e) $f(x) = \sin x$;

f) $f(x) = \cos(2x)$.

Derivada de ordem n

Sejam f e g funções reais de variável real que admitem derivada de ordem n , finita no ponto x . Então as funções $(f \pm g)$, (kf) e $(f.g)$ admitem, também derivada de ordem n no ponto x , tendo-se:

$$\textcircled{1} \quad (f \pm g)^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) \pm g^{(n)}(x);$$

$$\textcircled{2} \quad (k f)^{(n)}(x) = k f^{(n)}(x);$$

$$\textcircled{3} \quad (f \times g)^{(n)}(x) = f^{(n)}(x)g(x) + \binom{n}{1} f^{(n-1)}(x)g'(x) + \\ + \binom{n}{2} f^{(n-2)}(x)g''(x) + \cdots + \binom{n}{n-1} f'(x)g^{(n-1)}(x) + f(x)g^{(n)}$$

(Fórmula de Leibniz);

Exercício 10

Considere as funções $f(x) = e^x$ e $g(x) = \cos x$. Determine:

a) $f^{(n)}(x)$;

b) $g^{(n)}(x)$;

c) $(f \times g)^{(n)}(x)$.

Mínimo absoluto e máximo absoluto

Definição

Seja $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, com $D \subset \mathbb{R}$. Diz-se que f possui um **mínimo absoluto** em $x_0 \in D$ se

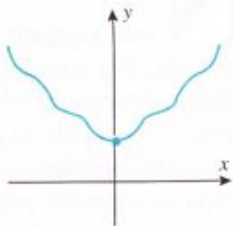
$$f(x_0) \leq f(x), \quad \forall x \in D.$$

Definição

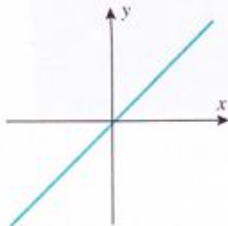
Seja $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, com $D \subset \mathbb{R}$. Diz-se que f possui um **máximo absoluto** em $x_0 \in D$ se

$$f(x_0) \geq f(x), \quad \forall x \in D.$$

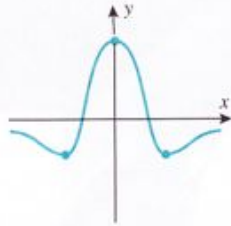
Ilustração de máximos e mínimos absolutos



f tem um mínimo absoluto mas não tem máximo absoluto em $(-\infty, +\infty)$.



f não tem extremos absolutos em $(-\infty, +\infty)$.



f tem um máximo e mínimo absolutos em $(-\infty, +\infty)$.

Mínimo local e máximo local

Definição

Seja $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, com $D \subset \mathbb{R}$ e $a \in D$. Diz-se que f possui um **mínimo local ou relativo** em a ou $f(a)$ é um **mínimo local ou relativo** da função f se e só se existir um $\delta > 0$ tal que, para todo o $x \in]a - \delta, a + \delta[\cap D$, se tenha

$$f(a) \leq f(x).$$

Definição

Seja $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, com $D \subset \mathbb{R}$ e $a \in D$. Diz-se que f possui um **máximomo local ou relativo** em a ou $f(a)$ é um **máxiimo local ou relativo** da função f se e só se existir um $\delta > 0$ tal que, para todo o $x \in]a - \delta, a + \delta[\cap D$, se tenha

$$f(a) \geq f(x).$$

Observação 4

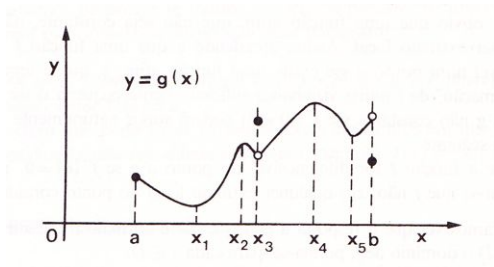
Utilizamos a expressão “*extremos de uma função*” quando pretendermos referir-nos, indistintamente, a máximos ou mínimos (absolutos ou relativos) desta função.

Observação 5

- Todo o máximo absoluto é um máximo local.
- Nem todo o máximo local é um máximo absoluto.
- Numa função constante um ponto qualquer do seu domínio é simultaneamente um máximo e um mínimo.

Exercício 11

Considere a função g cujo gráfico é:



Indique:

- ① Máximos locais;
- ② Mínimos locais;
- ③ O máximo absoluto
- ④ O mínimo absoluto

Alguns teoremas sobre funções diferenciáveis

Teorema

Sejam $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in D \cap D'$. Então

$$\textcircled{1} \quad f'(x_0^+) > 0 \quad \Rightarrow \quad \exists \delta > 0 : \forall x \in D, x \in]x_0, x_0 + \delta[\Rightarrow f(x) > f(x_0)$$

$$\textcircled{2} \quad f'(x_0^+) < 0 \quad \Rightarrow \quad \exists \delta > 0 : \forall x \in D, x \in]x_0, x_0 + \delta[\Rightarrow f(x) < f(x_0)$$

$$\textcircled{3} \quad f'(x_0^-) > 0 \quad \Rightarrow \quad \exists \delta > 0 : \forall x \in D, x \in]x_0 - \delta, x_0[\Rightarrow f(x) < f(x_0)$$

$$\textcircled{4} \quad f'(x_0^-) < 0 \quad \Rightarrow \quad \exists \delta > 0 : \forall x \in D, x \in]x_0 - \delta, x_0[\Rightarrow f(x) > f(x_0)$$

Teorema de Fermat*

Se f tiver um máximo ou mínimo local em x_0 , e $f'(x_0)$ existir, então

$$f'(x_0) = 0.$$

* Pierre Fermat (1601-1665) advogado francês que tinha por passatempo favorito a matemática. Foi, juntamente com Descartes, um dos inventores da geometria analítica. Os seus métodos para encontrar as tangentes, as curvas e os valores máximo e mínimo fazem dele um precursor de Newton na criação do cálculo diferencial.

Observação 6

A função f pode não ter extremo no ponto x_0 , no qual f' se anule, isto é:

$$f'(x_0) = 0 \quad \nRightarrow \quad x_0 \text{ seja extremo.}$$

Exemplo: A função $f(x) = x^3$ não tem máximo nem mínimo no ponto $x = 0$ e, no entanto, $f'(0) = 0$.

Observação 7

Note-se que x_0 pode ser extremo e não existir $f'(x_0)$.

Exemplo: A função $f(x) = |x|$ tem mínimo no ponto $x = 0$ e, no entanto, não existe $f'(0)$.

Definição

Uma função f diz-se **regular em** $[a, b]$ se e só se

- f é contínua em $[a, b]$
- f é diferenciável em $]a, b[$

Teorema de Rolle*

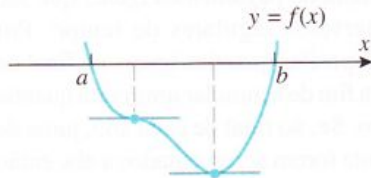
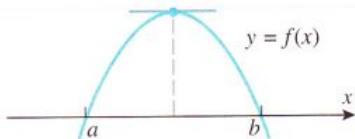
Seja f uma função real de variável real regular em $[a, b]$. Se $f(a) = f(b)$, então

$$\exists c \in]a, b[: f'(c) = 0.$$

* Michel Rolle (1652-1719) matemático francês que foi membro da Academia Francesa e contribuiu para o desenvolvimento da geometria analítica e do que viria a ser o Cálculo Diferencial. O Teorema de Rolle foi publicado pela primeira vez em 1691 no livro intitulado *Méthode pour résoudre les égalités*

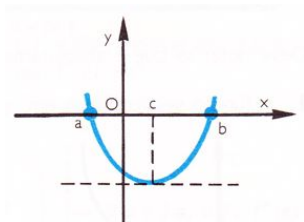
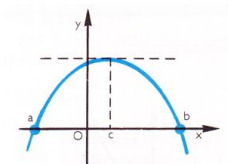
Interpretação geométrica do Teorema de Rolle

O Teorema de Rolle garante que o gráfico de f admite uma *tangente horizontal* num ponto interior de $]a, b[$.



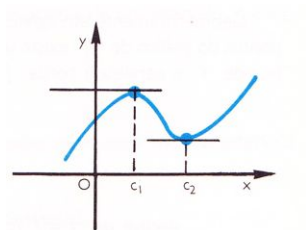
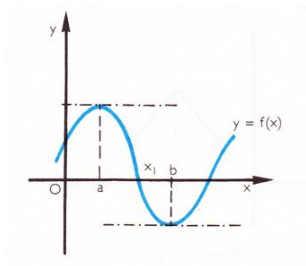
Corolário 1

Entre dois zeros de uma função (contínua e diferenciável) há pelo menos um zero da derivada.



Corolário 2

Entre dois zeros consecutivos da derivada de uma função (contínua e diferenciável) existe, quanto muito, um zero da função.



Exercício 12

Considere a função $f(x) = e^{x^2-x} - x^2 + x$. Determine os pontos do intervalo $[-1, 2]$ em que a tangente ao gráfico de f é uma reta horizontal.

(S: Os pontos são $(0, 1)$, $(\frac{1}{2}, e^{-\frac{1}{4}} + \frac{1}{4})$ e $(1, 1)$)

Exercício 13

Prove que a equação $x^3 + x - 1 = 0$ tem exatamente uma raiz real.

Teorema de Lagrange* ou do Valor Médio de Lagrange ou dos Acréscimos Finitos

Seja f uma função real de variável real regular em $[a, b]$. Então

$$\exists c \in]a, b[: f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

* Joseph-Louis de Lagrange (1736-1813) nascido na Itália, filho de pai francês e mãe italiana. Criança prodígio, tornou-se professor em Turim aos 19 anos.

Observação 8

Notemos que

$$\exists c \in]a, b[: f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

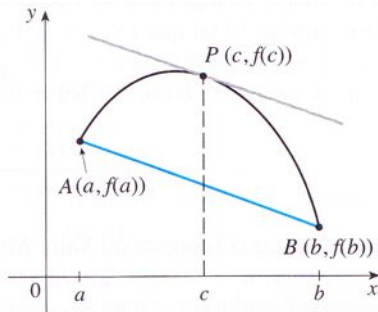
pode também escrever-se na forma

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c), \quad c \in]a, b[$$

fórmula que relaciona o acréscimo da função ($f(b) - f(a)$) com o acréscimo da variável ($b - a$). Por isso se chama a esta expressão **fórmula dos acréscimos finitos**.

Interpretação geométrica do teorema de Lagrange

O Teorema de Lagrange afirma que sendo $A(a, f(a))$ e $B(b, f(b))$ dois pontos do gráfico de f , existe um ponto $P(c, f(c))$ onde a tangente ao gráfico de f é paralela à corda $[AB]$.



Exercício 14

Determine o ponto M em que a tangente à curva $y = x^2$ é paralela à corda que une os pontos $A(1, 1)$ e $B(2, 4)$.

(S: O ponto pretendido é $M(\frac{3}{2}, \frac{9}{4})$)

Exercício 15

a) Recorrendo ao teorema de Lagrange, mostre que sendo a e b números reais positivos com $a < b$, se tem

$$\frac{b-a}{1+b^2} < \operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} a < \frac{b-a}{1+a^2}$$

b) Aplique a fórmula anterior para mostrar que

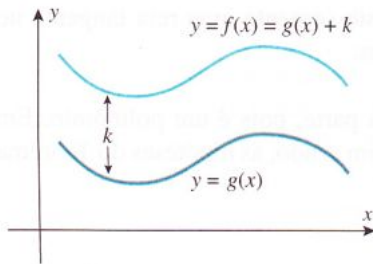
$$\frac{\pi}{4} + \frac{3}{25} < \operatorname{arctg} \frac{4}{3} < \frac{1}{6} + \frac{\pi}{4}$$

Corolário 1

Uma função f que tenha derivada nula em todos os pontos de um intervalo, é constante nesse intervalo.

Corolário 2

Se f e g são contínuas num intervalo $[a, b]$ e se $f'(x) = g'(x)$ para todo o x em $]a, b[$, então f e g diferem de uma constante em $[a, b]$, isto é, existe uma constante k tal que $f(x) - g(x) = k$ para todo o x em $[a, b]$.



Corolário 3

Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e diferenciável em $]a, b[$.

- Se $f'(x) > 0$, $\forall x \in]a, b[$, f é estritamente crescente em $]a, b[$.
- Se $f'(x) < 0$, $\forall x \in]a, b[$, f é estritamente decrescente em $]a, b[$.

Exercício 16

Determine o intervalo onde a função $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$ é crescente e o intervalo onde f é decrescente.

Corolário 4

Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e diferenciável em $[a, b]$ exceto eventualmente no ponto $x_0 \in]a, b[$, sendo x_0 um ponto crítico.

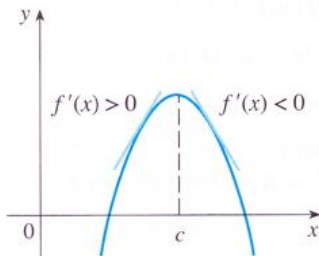
- Se

$$\begin{cases} f'(x) > 0, & x < x_0 \\ f'(x) < 0, & x > x_0 \end{cases} \quad \text{então } f \text{ admite um máximo relativo em } x_0$$

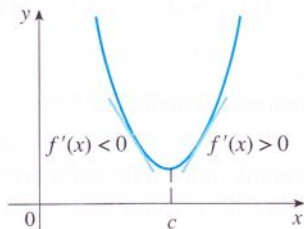
- Se

$$\begin{cases} f'(x) < 0, & x < x_0 \\ f'(x) > 0, & x > x_0 \end{cases} \quad \text{então } f \text{ admite um mínimo relativo em } x_0$$

Visualização do Corolário 4



(a) Máximo local



(b) Mínimo local

Teorema do Valor Médio de Cauchy

Sejam f e g duas f.r.v.r. regulares em $[a, b]$. Se

- $g(a) \neq g(b)$
- $f'(x)$ e $g'(x)$ não se anulam simultaneamente em $]a, b[$,

então

$$\exists c \in]a, b[: \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

A consequência mais importante do Teorema de Cauchy, é uma regra que nos permite calcular a grande maioria dos limites que dêem indeterminações dos tipos $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$.

Exercício 17

Considere $f(x) = 3x^2 + 3x + 1$ e $g(x) = x^2 - 4x + 2$ no intervalo $[0, 1]$. Calcule o valor de $c \in]0, 1[$ tal que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(1) - f(0)}{g(1) - g(0)}.$$

Indeterminações

A “Álgebra dos limites” é o conjunto de regras operatórias para o cálculo de limites. Quando a aplicação direta destas regras conduz a

$$\infty - \infty; \quad 0 \times \infty; \quad \frac{0}{0}; \quad \frac{\infty}{\infty}; \quad 1^{\infty}; \quad \infty^0; \quad 0^0$$

dizemos que “há indeterminação”, o que significa que estas regras são insuficientes para se concluir sobre a existência, ou não existência, de limite.

”Levantar a indeterminação” consiste em “descobrir” o valor do limite, caso ele exista, recorrendo a um processo específico para cada caso, mais ou menos engenhoso, conforme a situação.

1. Indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$

Suponhamos que pretendíamos calcular um limite da forma

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

e que se tinha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0.$$

Como proceder?

Recorrendo à **Regra de Cauchy**, a qual podemos usar considerando dois casos:

- 1 Quando $x \rightarrow x_0$
- 2 Quando $x \rightarrow \pm\infty$

Regra de Cauchy

1º caso - Regra de Cauchy $\left(\frac{0}{0}\right)$ quando $x \rightarrow x_0$

Sejam f e g duas funções diferenciáveis em $]a, b[\setminus \{x_0\}$ (com $x_0 \in]a, b[$, tais que:

i) $g'(x) \neq 0, \quad \forall x \in]a, b[\setminus \{x_0\}$

ii) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$.

Nestas condições se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k, \quad \text{então} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = k.$$

Exercício 18

Calcule:

a) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$

Regra de Cauchy

2º caso - Regra de Cauchy $\left(\frac{0}{0}\right)$ quando $x \rightarrow +\infty$

Sejam f e g duas funções diferenciáveis em $]M, +\infty[$, (com $M > 0$, tais que:

- i) $g'(x) \neq 0, \quad \forall x \in]M, +\infty[$
- ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.

Nestas condições

$$\text{se } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k, \quad \text{então } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k.$$

Observações

- 1 O teorema anterior com as devidas alterações também, se aplica quando $x \rightarrow -\infty$.
- 2 Se ao aplicar a regra de Cauchy verificar-se que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{0}{0}$$

utiliza-se novamente a regra de Cauchy ao quociente $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ pois, se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = k, \quad \text{então} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k.$$

Exercício 19

Calcule:

$$① \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

$$② \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{5}{x}}.$$

Indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$

Se $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$ podemos proceder de dois modos:

- **1º Processo** - Passar a uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$, tendo em conta que:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{1}{\frac{1}{g(x)}}}{\frac{1}{\frac{1}{f(x)}}}$$

- **2º Processo** - Regra de Cauchy: Sejam f e g duas funções diferenciáveis em $]a, b[$, tais que:

i) $g'(x) \neq 0, \quad \forall x \in]a, b[$

ii) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \infty$.

Nestas condições

$$\text{se } \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k, \quad \text{então } \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = k.$$

Exercício 20

Calcule:

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$$

Indeterminação do tipo $0 \times \infty$

Se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = 0 \times \infty$$

transformamos esta indeterminação numa indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$, isto é:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$

ou então

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

conforme a facilidade e aplicamos a regra de Cauchy.

Exercício 21

Calcule:

1 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x \operatorname{arcsen} \left(x - \frac{\pi}{2} \right)$

2 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 1) \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)$

Indeterminação do tipo $\infty - \infty$

Se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = \infty - \infty$$

basta fazer

$$f(x) - g(x) = f(x)g(x) \left(\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)} \right)$$

Exercício 22

Calcule:

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$$

$$2 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln(x+1)} - \frac{x+1}{x} \right)$$

Indeterminações do tipo 1^∞ , 0^0 e ∞^0

Admitamos que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)}$$

leva a uma das indeterminações 1^∞ , 0^0 e ∞^0 . Então, sendo

$$\ln \left[\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} \right] = k,$$

tem-se que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = e^k$$

Exercício 23

Calcule:

$$① \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{x - \ln x}}$$

$$② \lim_{x \rightarrow 0} (x + 1)^{\cotg x}$$

$$③ \lim_{x \rightarrow 0^+} (\cotg x)^{\frac{1}{\ln x}}$$

Observação 9

Apesar da Regra de Cauchy ser muito eficaz no cálculo de limites, existem situações em que a sua aplicação não permite calcular o limite pretendido.

Exercício 24

Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sin x}{x + \cos x}$

Representação gráfica de funções

O esboço gráfico de uma função f é um problema que em geral se resume em determinar:

- O domínio de existência de f ;
- Os pontos de interseção com os eixos;
- Os pontos de descontinuidade;
- Os intervalos de monotonia e extremos da função;
- Concavidade e pontos de inflexão;
- Assintotas (ou asymptotas) do gráfico.

Pontos críticos

Observação

Seja f uma f.r.v.r. definida e contínua em $[a, b]$. Os pontos onde f pode atingir um máximo ou mínimo são:

- *os extremos do intervalo;*
- *os pontos críticos.*

Definição

Sejam f uma f.r.v.r. e $x_0 \in D_f$. Diz-se que x_0 é ponto crítico de f se $f'(x_0) = 0$ ou não existir $f'(x_0)$ ou $f'(x_0)$ é infinita.

Determinação dos extremos de uma função

Passos necessários à determinação dos extremos de uma função:

- 1 Calcula-se $f'(x)$;
- 2 Determinam-se os pontos críticos;
- 3 Estuda-se o sinal da derivada à esquerda e à direita de cada ponto crítico. Se $f'(x)$ muda de sinal
 - de positivo para negativo, então f tem máximo relativo nesse ponto.
 - de negativo para positivo, então f tem mínimo relativo nesse ponto.

Caso contrário, f não tem extremo nesse ponto.

Exercício 25

Seja

$$f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$$

definida no intervalo $\left[-2, \frac{1}{2}\right]$. Determine os extremos de f .

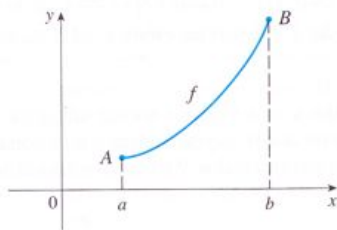
Concavidade de uma curva

Definição

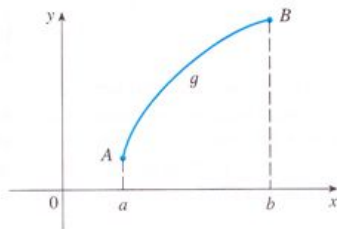
Dada uma f.r.v.r. diferenciável em $]a,b[$, diz-se que a curva representativa da função tem:

- *A concavidade no sentido dos yy negativos (concavidade voltada para baixo), se todos os pontos da curva se encontram “abaixo” da tangente à curva em qualquer um dos pontos deste intervalo.*
- *A concavidade no sentido dos yy positivos (concavidade voltada para cima), se todos os pontos da curva se encontram “acima” da tangente à curva em qualquer um dos pontos deste intervalo*

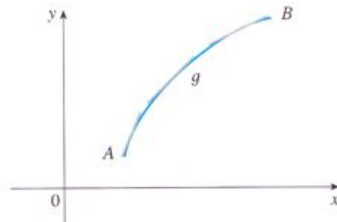
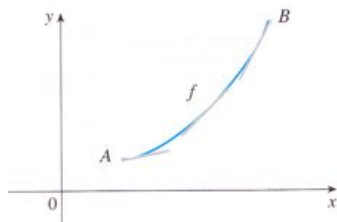
Ilustração do sentido da concavidade de uma função



(a)



(b)



Teorema

Teorema

Seja f uma f.r.v.r. que admite segunda derivada em $]a, b[$.

- Se $f''(x) > 0$, $\forall x \in]a, b[$ então f tem a concavidade voltada para cima em $]a, b[$.*
- Se $f''(x) < 0$, $\forall x \in]a, b[$ então f tem a concavidade voltada para baixo em $]a, b[$.*

Observação

O recíproco do teorema anterior não é válido.

Exemplo: $f(x) = x^4$

Ponto de Inflexão

Definição

Um ponto $(c, f(c))$ do gráfico de f diz-se **ponto de inflexão** se existir $f'(c)$ (finita ou infinita) e se existir um intervalo aberto I contendo c , tal que:

i) $f''(x) > 0$ para $x < c$ e $x \in I$ e $f''(x) < 0$ para $x > c$ e $x \in I$.

ou

ii) $f''(x) < 0$ para $x < c$ e $x \in I$ e $f''(x) > 0$ para $x > c$ e $x \in I$.

		c	
f''	+		-
f	\cup	PI	\cap

		c	
f''	-		+
f	\cap	PI	\cup

Teorema

Teorema

Sejam $y = f(x)$ a equação de uma curva, onde f é duas vezes diferenciável, e $a \in D_f$. Se $f''(a) = 0$ ou não existir $f''(a)$ e $f''(x)$ muda de sinal em $x = a$, então o ponto de abscissa $x = a$ é ponto de inflexão.

Exercício 26

Determine, se existirem, os pontos de inflexão da curva representativa de:

a) $f(x) = (x - 1)^{\frac{1}{3}}$

b) $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$

Assintotas de uma curva

Definição

Uma reta r diz-se assintota de uma curva, se a distância de um ponto M da curva à reta r tende para zero quando o ponto M “tende para infinito”.

Existem três tipos de assintotas:

- verticais;
- horizontais
- oblíquas

Assintota Vertical

Definição

A reta $x = a$, com $a \in \mathbb{R}$, diz-se uma assintota vertical da curva $y = f(x)$ se:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$$

ou

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$$

Assintota Horizontal

Definição

A reta $y = b$, com $b \in \mathbb{R}$, diz-se uma assintota horizontal da curva $y = f(x)$ se:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$$

ou

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$$

Assintota Oblíqua

Demonstra-se que

a reta $y = mx + b$, com $m, b \in \mathbb{R}$, diz-se é uma assintota oblíqua da curva $y = f(x)$ se e só se:

1

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m$$

2

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx] = b$$

Exercício 27

Determine as assintotas de:

① $f(x) = \frac{2}{x-5};$

② $g(x) = \frac{2x^2+7x+5}{x+2};$

③ $h(x) = e^{\frac{1}{x}};$

④ $r(x) = \frac{x^2-4}{x^2-x}$

Exercício 28

Faça o estudo da função f e esboce o seu gráfico, sendo

$$f(x) = \frac{x^3}{1 - x^2}.$$

Fórmulas de Taylor e de Maclaurin

As fórmulas de Taylor e de Maclaurin possibilitam o cálculo aproximado de algumas funções logarítmicas, exponenciais e trigonométricas a partir de uma função polinomial.

Funções de classe C^n

Definição

Diz-se que a função f é n -vezes continuamente diferenciável ou n -vezes continuamente derivável em I se e só se for n -vezes diferenciável em I e a função $f^{(n)}$ for contínua em I .

Definição

As funções definidas e n -vezes continuamente diferenciáveis em I dizem-se também funções de classe C^n nesse conjunto. Escrevemos $f \in C^n(I)$.

Funções de classe C^0 e C^∞

Em particular:

- $f \in C^0$ se f é contínua em I ;
- $f \in C^\infty$ se f é indefinidamente diferenciável em I ;

Exemplos

- 1 Todo o polinómio é uma função de classe C^∞ em \mathbb{R} .
- 2 Toda a função racional é uma função de classe C^∞ no seu domínio.
- 3 As funções trigonométricas são de classe C^∞ em cada intervalo onde estão definidas.
- 4 A função logarítmica e função exponencial são de classe C^∞ .

Definição

Sejam $n \in \mathbb{N}$, $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$ tais que f é derivável até à ordem $(n - 1)$ numa vizinhança de x_0 e $f^{(n-1)}$ é derivável em x_0 . Definimos o **polinómio de Taylor** de ordem n de f em x_0 como sendo a (única) função polinomial de grau menor ou igual a n tal que $P^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$, para $0 \leq k \leq n$. Ou seja, $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é definida para todo $x \in \mathbb{R}$ por:

$$P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

Fórmula de Taylor de ordem n com resto de Lagrange

Sejam $n \in \mathbb{N}$, $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ derivável até à ordem $(n+1)$ e $x_0, x \in I$. Então existe c entre x_0 e x (isto é, $x_0 < c < x$ ou $x < c < x_0$) tal que:

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k}_{\text{polinómio de Taylor}} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}}_{R_n(x)}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} f(x) = & f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \cdots + \\ & + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \end{aligned}$$

Fórmula de Maclaurin

Se $x_0 = 0$ a fórmula de Taylor passa a chamar-se fórmula de Maclaurin, tendo-se:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^n(0)}{n!}x^n + R_n(x)$$

onde

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\mathbf{c})}{(n+1)!}x^{n+1}$$

com c entre 0 e x .

Exemplo 1 - Aproximação de $f(x) = e^x$

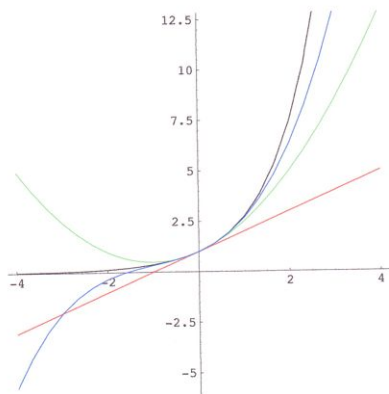


Gráfico de $f(x) = e^x$ e seus polinômios de Taylor de ordem 1 (vermelho), 2 (verde) e 3 (azul) em $x_0 = 0$

Exemplo 2 - Aproximação de $f(x) = \sin x$

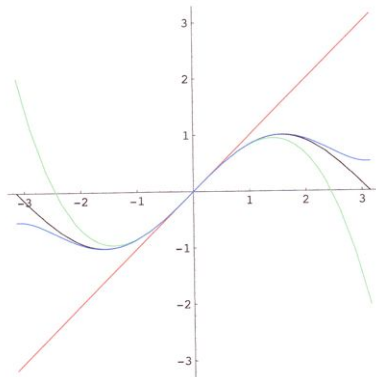


Gráfico de $f(x) = \sin x$ e seus polinómios de Taylor de ordem 1 (vermelho), 3 (verde) e 5 (azul) em $x_0 = 0$

Exercício 29

Recorrendo à fórmula de Maclaurin desenvolva as funções:

① $f(x) = e^x;$

② $f(x) = \operatorname{sen} x;$

③ $f(x) = \cos x.$

Exercício 30

Determine os polinómios de quarto grau em $(x - a)$ para aproximar as funções:

- 1 e^x para $a = 0$;
- 2 $\sin x$ para $a = \frac{\pi}{2}$
- 3 $\log x$ para $a = 1$;
- 4 $\operatorname{tg} x$ para $a = 0$.

Exercício 31

- 1 Escreva a função $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - x + 3$ como um polinómio nas potências de $(x - 1)$.
- 2 Aplique a fórmula de Taylor para exprimir o polinómio $f(x) = 4x^3 + 5x^2 - 2x + 1$ como um polinómio nas potências de $(x + 2)$.

Estudo dos extremos de uma função recorrendo à fórmula de Taylor

Sejam f uma função com derivadas até à ordem n contínuas num intervalo $]a, b[$ e $c \in]a, b[$ tal que

$$f'(c) = f''(c) = \dots = f^{(n-1)}(c) = 0$$

com $f^{(n)}(c) \neq 0$. Então:

- 1 Se n é par e $f^{(n)}(c) < 0$, então a função tem um **máximo** no ponto $x = c$;
- 2 Se n é par e $f^{(n)}(c) > 0$, então a função tem um **mínimo** no ponto $x = c$;
- 3 Se n é ímpar, então a função **não tem extremo** no ponto $x = c$.

Exercício 32

Recorrendo à fórmula de Taylor, determine os extremos das seguintes funções:

1 $f(x) = x^4 - 4x^3;$

2 $f(x) = \frac{x^4}{6} + \frac{x^3}{3};$

3 $f(x) = \frac{x^3}{1-x^2}.$

- Howard Anton, *Cálculo um novo horizonte*, vol. 1, 6ª Edição, Kookman, 2000.
- James Stewart, *Cálculo*, vol. 1, 5ª Edição, Thomson, 2008.
- J. Campos Ferreira, *Introdução à Análise Matemática*, 3ª Edição, Fundação Calouste Gulbenkian.
- M. Augusta Neves, M. teresa Vieira e Alfredo Alves, *livro de texto 12º ano matemática*, Porto Editora.
- M. Augusta Neves, M. Teresa Vieira e Alfredo Alves, *exercícios de matemática, 12º ano*, vol.2, Porto Editora.
- <http://www.ime.usp.br/mat/0143-2006/textos/Taylor.pdf>
- <http://w3.ualg.pt/holivei/Cap-5>

FUNÇÕES INVERSAS das FUNÇÕES CIRCULARES

Maria do Carmo Martins

outubro 2013

Funções Trigonométricas ou Circulares

No círculo trigonométrico, a medida do comprimento do arco é igual à medida, em radianos, do ângulo ao centro correspondente. Assim, se o ângulo α está expresso em radianos, $\sen \alpha$, $\cos \alpha$ ou $\tg \alpha$ podem ser considerados como seno, cosseno (usam-se ainda as formas coseno e co-seno) ou tangente de um arco de comprimento s ($\alpha = s$).

Como as medidas do arco são expressas em medidas de comprimento (m , dm , cm , etc.) e estas medidas são números reais, consequentemente $\sen \alpha$, $\cos \alpha$ e $\tg \alpha$ podem ser considerados como seno, cosseno e tangente de um número real. Deste modo, a cada número real x corresponde um e um só número real y tal que $y = \sen x$, $y = \cos x$ e $y = \tg x$.

As funções definidas por $y = \sen x$, $y = \cos x$ e $y = \tg x$ podem ser consideradas como funções reais de variável real.

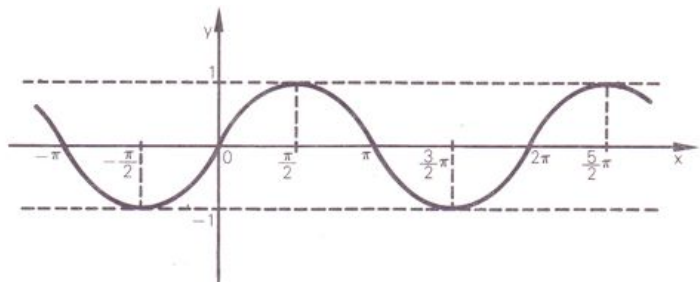
Função seno

Consideremos a função real de variável real definida por:

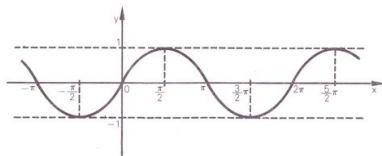
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = \text{sen } x$$

A representação gráfica de f é:

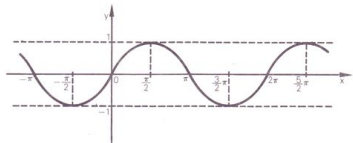


Função Seno - continuação



- Domínio: \mathbb{R}
- Contradomínio: $[-1, 1]$
- Paridade: f é uma função ímpar, isto é,
 $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in D_f$
- Injetividade: f não é injetiva
- Período: o período positivo mínimo é 2π
- Zeros: Todos os pontos da forma $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
- Positiva: nos intervalos $]2k\pi, \pi + 2k\pi[$, $k \in \mathbb{Z}$
- Negativa: nos intervalos $]\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi[$, $k \in \mathbb{Z}$

Função Seno - continuação



- Mínimo: -1 para $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
- Máximo: 1 para $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
- Crescente: nos intervalos $[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$
- Decrescente: nos intervalos $[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$
- Equações: Seja $a \in [-1, 1]$ e $\sin \alpha = a$. Então:

$\sin x = a \Leftrightarrow \sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi \vee x = (\pi - \alpha) + 2k\pi$,
com $k \in \mathbb{Z}$.

Exercício 1

Resolva as seguintes equações:

① $2 \operatorname{sen} (3x) = 1$

② $\operatorname{sen} (5x) = 0$

③ $2 \operatorname{sen} (10x) = \sqrt{3}$

④ $\operatorname{sen} (2x) = -\operatorname{sen} x$

Função cossecante

Definição

Chama-se **cossecante de x** a função definida por

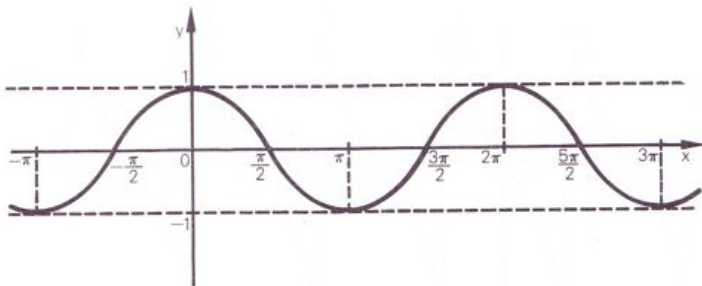
$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}.$$

Função cosseno

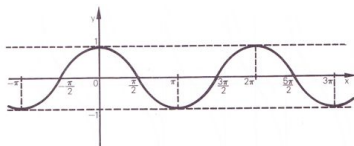
Consideremos a função real de variável real definida por:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \cos x \end{aligned}$$

A representação gráfica de f é:

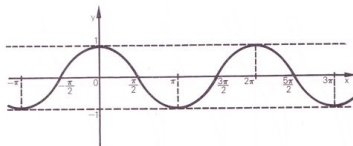


Função cosseno - continuação



- Domínio: \mathbb{R}
- Contradomínio: $[-1, 1]$
- Paridade: f é uma função par, isto é, $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in D_f$
- Injetividade: f não é injetiva
- Período: O período positivo mínimo é 2π
- Zeros: Todos os pontos da forma $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
- Positiva: nos intervalos $]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi[$, $k \in \mathbb{Z}$
- Negativa: nos intervalos $]\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi[$, $k \in \mathbb{Z}$

Função cosseno - continuação



- Mínimo: -1 para $x = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
- Máximo: 1 para $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
- Crescente: nos intervalos $[-\pi + 2k\pi, 2k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$
- Decrescente: nos intervalos $[2k\pi, \pi + 2k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$
- Equações: Seja $a \in [-1, 1]$ e $\cos \alpha = a$. Então:

$$\cos x = a \Leftrightarrow \cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi \vee x = -\alpha + 2k\pi,$$

com $k \in \mathbb{Z}$.

Exercício 2

Resolva as seguintes equações:

① $2 \cos (3x) = 1$

② $\cos (5x) = 0$

③ $\cos (2x) = -\cos x$

Função Secante

Definição

Chama-se **secante de x** à função definida por

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}.$$

Função tangente

Consideremos a função real de variável real definida por:

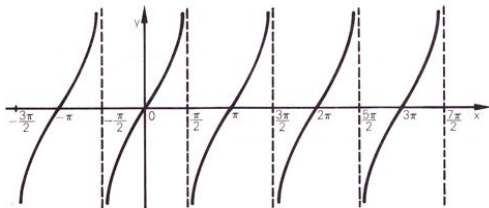
$$f : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = \operatorname{tg} x$$

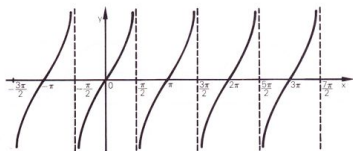
Notemos a alteração imposta ao domínio da função uma vez que

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x}, \text{ pelo que } \operatorname{cos} x \neq 0.$$

A representação gráfica de f é:

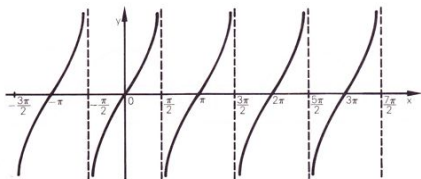


Função tangente - continuação



- Domínio: $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
- Contradomínio: \mathbb{R}
- Paridade: f é uma função ímpar, isto é,
 $f(-x) = -f(x), \forall x \in D_f$
- Injetividade: f não é injetiva
- Período: O período positivo mínimo é π
- Zeros: Todos os pontos da forma $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- Positiva: nos intervalos $]k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[, k \in \mathbb{Z}$
- Negativa: nos intervalos $]\frac{\pi}{2} + k\pi, \pi + k\pi[, k \in \mathbb{Z}$

Função tangente - continuação



- Mínimo: não tem
- Máximo: não tem
- Crescente: nos intervalos $\left[-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$
- Decrescente: nunca
- Equações: Seja $a \in \mathbb{R}$ e $\operatorname{tg} \alpha = a$. Então:

$$\operatorname{tg} x = a \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Exercício 3

Resolva a seguinte equação trigonométrica

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x = 0.$$

Função cotangente

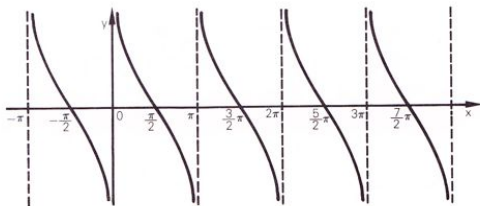
Consideremos a função real de variável real definida por:

$$f : \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = \operatorname{cotg} x$$

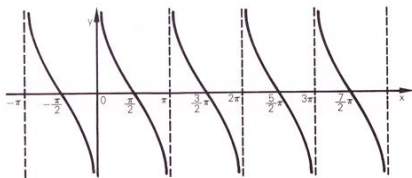
Notemos a alteração imposta ao domínio da função uma vez que

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, \text{ pelo que } \sin x \neq 0.$$

A representação gráfica de f é:

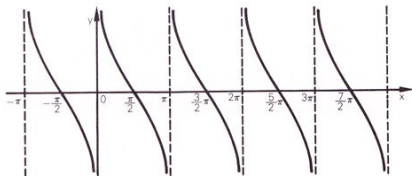


Função cotangente - continuação



- Domínio: $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
- Contradomínio: \mathbb{R}
- Paridade: f é uma função ímpar, isto é,
 $f(-x) = -f(x), \forall x \in D_f$
- Injetividade: f não é injetiva
- Período: O período positivo mínimo é π
- Zeros: Todos os pontos da forma $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- Positiva: nos intervalos $]k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[, k \in \mathbb{Z}$
- Negativa: nos intervalos $]\frac{\pi}{2} + k\pi, \pi + k\pi[, k \in \mathbb{Z}$

Função cotangente - continuação



- Mínimo: não tem
- Máximo: não tem
- Crescente: nunca
- Decrescente: nos intervalos $[k\pi, \pi + k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$
- Equações: Seja $a \in \mathbb{R}$ e $\cotg \alpha = a$. Então:

$$\cotg x = a \Leftrightarrow \cotg x = \cotg \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Exercício 4

Mostre que

$$\frac{1}{\sin x} = \sin x (\cos 2x + \cot^2 x).$$

Introdução às funções inversas das funções circulares

Tendo em conta que apenas as funções injetivas admitem inversas, não podemos, à priori, falar em inversas das funções circulares. Deste modo, definem-se restrições das funções onde sejam bijetivas e assim, podemos definir as inversas das funções circulares.

Função arco-seno

Consideremos a função real de variável real definida por:

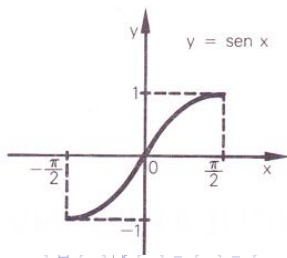
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow [-1, 1] \\ x &\mapsto f(x) = \text{sen } x \end{aligned}$$

Qualquer restrição de f a um intervalo do tipo

$$\left[-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right], \quad k \in \mathbb{Z}$$

é bijetiva. De entre estas, chama-se **restrição principal** à função

$$\begin{aligned} g : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] &\longrightarrow [-1, 1] \\ x &\mapsto g(x) = \text{sen } x \end{aligned}$$



Função inversa da função seno

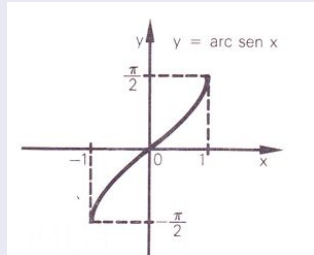
Nos intervalos em que a inversa de $\sin x$ é uma função, ela representa-se por $\arcsen x$ e permite obter o ângulo y cujo seno é x .

Definição

Define-se a função inversa da função seno, **arco-seno**, por

$$g^{-1} : [-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

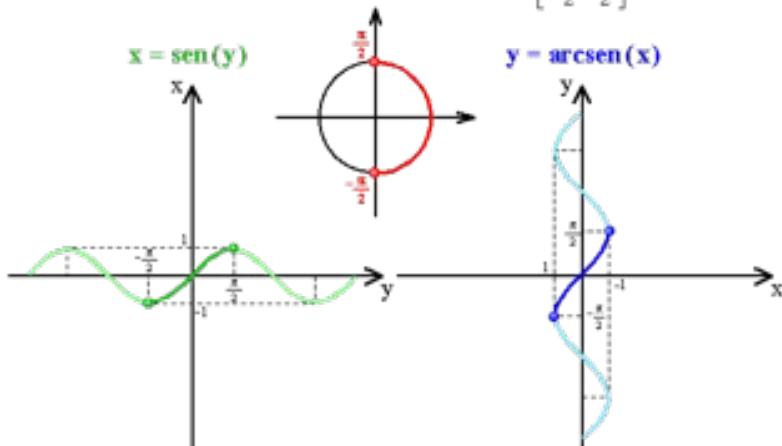
$$x \mapsto g^{-1}(x) = \arcsen x$$



Resumo e visualização da função seno e da sua inversa

A função inversa do seno, denotada por \arcsen , é definida como :

$$y = \arcsen(x) \Leftrightarrow x = \sen(y) \quad \text{e} \quad y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$



Exercício 5

Calcule:

① $\arcsen 0$

② $\arcsen \left(\frac{1}{2}\right)$

③ $\arcsen \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

④ $\arcsen \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Exercício 6

Determine o domínio e a inversa da função definida por

$$f(x) = \arcsen(2x - 3).$$

Função arco-cosseno

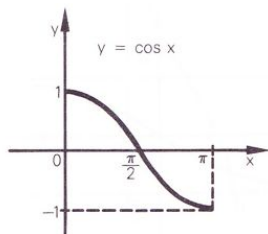
O que se passa com a função seno passa-se com as restantes funções trigonométricas. Interessa apenas fixar a restrição principal para se poder definir a inversa.

Qualquer restrição da função cosseno a um intervalo do tipo

$$[k\pi, \pi + k\pi], \quad k \in \mathbb{Z}$$

é bijetiva. No caso da função cosseno, considera-se como restrição principal a função

$$\begin{aligned} h : [0, \pi] &\longrightarrow [-1, 1] \\ x &\mapsto h(x) = \cos x \end{aligned}$$



Função arco-cosseno - continuação

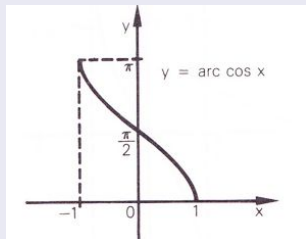
Nos intervalos em que a inversa de $\cos x$ é uma função, ela representa-se por $\arccos x$ e permite obter o ângulo y cujo cosseno é x .

Definição

Define-se a função inversa da função cosseno, **arco-cosseno**, por

$$h^{-1} : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$$

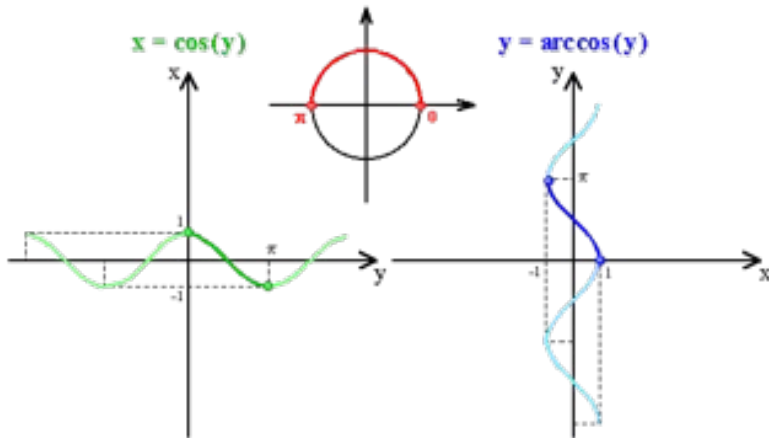
$$x \mapsto h^{-1}(x) = \arccos x$$



Resumo e visualização da função cosseno e da sua inversa

A função inversa do cosseno, denotada por \arccos , é definida como :

$$y = \arccos(x) \Leftrightarrow x = \cos(y) \quad \text{e} \quad y \in [0, \pi]$$



Exercício 7

Calcule:

① $\arccos 0$

② $\arccos \left(\frac{1}{2} \right)$

③ $\arccos \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$

④ $\arccos \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$

Exercício 8

Determine o domínio e a inversa da função definida por

$$f(x) = 3 \arccos(2x - 3).$$

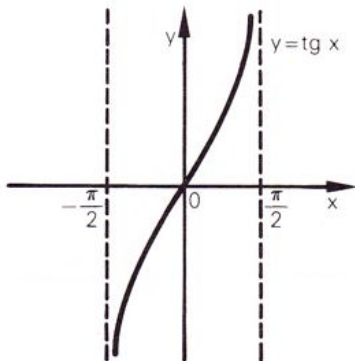
Função arco-tangente

Qualquer restrição da função tangente a um intervalo do tipo

$$\left] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[\quad k \in \mathbb{Z}$$

é bijetiva. No caso da função tangente, considera-se como restrição principal a função

$$s : \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto s(x) = \operatorname{tg} x$$



Função arco-tangente - continuação

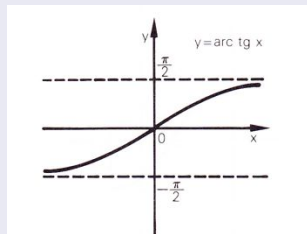
Nos intervalos em que a inversa de $\operatorname{tg} x$ é uma função, ela representa-se por $\operatorname{arctg} x$ e permite obter o ângulo y cuja tangente é x .

Definição

Define-se a função inversa da função tangente, **arco-tangente**, por

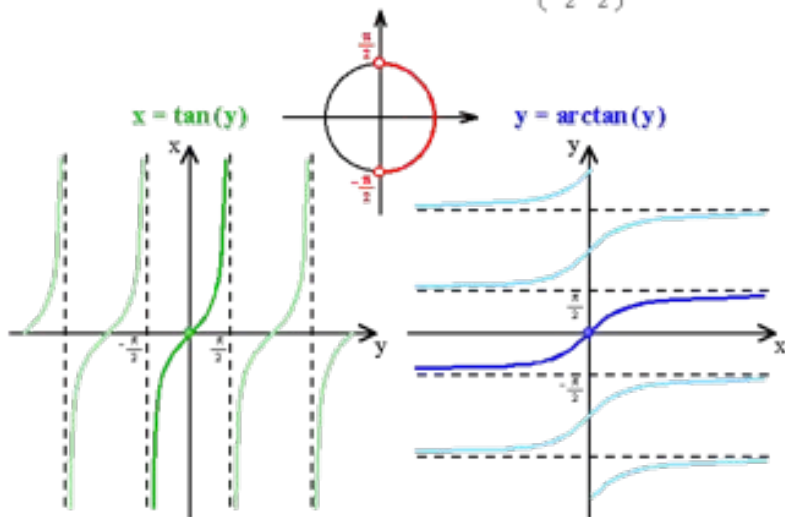
$$s^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$$

$$x \mapsto s^{-1}(x) = \operatorname{arctg} x$$



Resumo e visualização da função tangente e da sua inversa

$$y = \arctan(x) \Leftrightarrow x = \tan(y) \quad \text{e} \quad y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$



Exercício 9

Caracterize a inversa da função definida por

$$g(x) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(x + 3) - \frac{\pi}{4}.$$

Função arco-cotangente

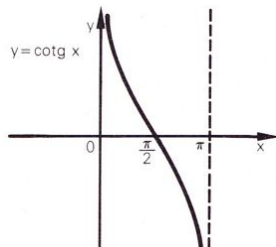
Qualquer restrição da função tangente a um intervalo do tipo

$$]k\pi, \pi + k\pi[\quad k \in \mathbb{Z}$$

é bijetiva. No caso da função cotangente, considera-se como restrição principal a função

$$t :]0, \pi[\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto t(x) = \cotg x$$



Função arco-cotangente - continuação

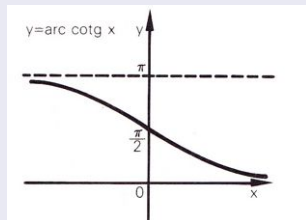
Nos intervalos em que a inversa de $\cotg x$ é uma função, ela representa-se por $\operatorname{arccotg} x$ e permite obter o ângulo y cuja cotangente é x .

Definição

Define-se a função inversa da função cotangente, arco-cotangente, por

$$t^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow]0, \pi[$$

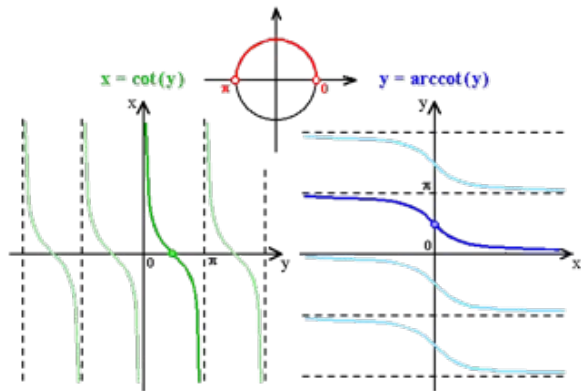
$$x \mapsto t^{-1}(x) = \operatorname{arccotg} x$$



Resumo e visualização da função cotangente e da sua inversa

A função inversa da cotangente, denotada por $\operatorname{arccotg}$, é definida por:

$$y = \operatorname{arccotg}(x) \Leftrightarrow x = \cotg(y) \text{ e } y \in]0, \pi[$$



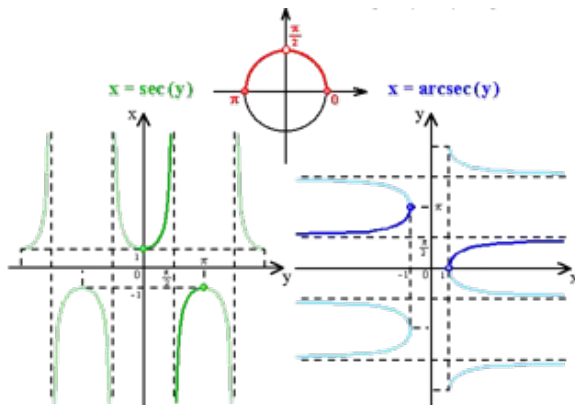
Exercício 10

Calcule $\operatorname{arccotg}(\sqrt{3})$.

Função arco-secante

A função inversa da secante, denotada por arcsec, é definida por:

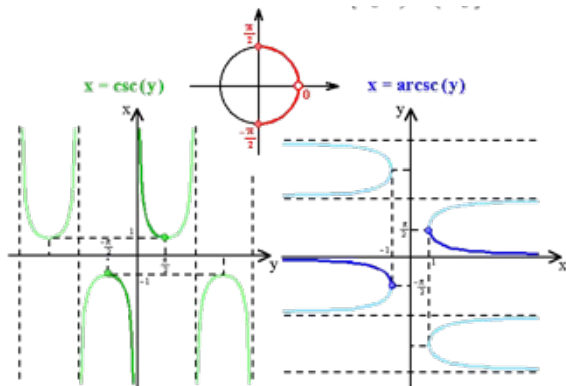
$$y = \operatorname{arcsec}(x) \Leftrightarrow x = \sec(y) \text{ e } y \in]0, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \pi[$$



Função arco-cossecante

A função inversa da cossecante, denotada por $\operatorname{arccosec}$, é definida por:

$$y = \operatorname{arccosec}(x) \Leftrightarrow x = \operatorname{cosec}(y) \text{ e } y \in]-\frac{\pi}{2}, 0[\cup]0, \frac{\pi}{2}[$$



Referências:

- Maria Augusta F. Neves, Maria Teresa C. Vieira e Alfredo G. Alves, *livro de texto 12º matemática*, Porto Editora.
- Texto de apoio (Teoria e Prática) de Matemática I do Dr. José Eduardo Carreiro (moodle da unidade curricular)
- Howard Anton, *Cálculo um novo horizonte*, Vol.1, Bookman, 6ª Edição.
- www.uff.br/webmat/Calc1-LivroOnLine/Cap14-Calc1.htm

SUCESSÕES de NÚMEROS REAIS

Maria do Carmo Martins

outubro de 2013

Nota histórica

O termo **sucessão** está relacionado com conjuntos de objetos dispostos numa dada ordem.

Na antiguidade, os Matemáticos gregos dedicaram-se ao estudo das propriedades de sequências numéricas associadas a sequências geométricas como os números poligonais triangulares, quadrados perfeitos, pentagonais, etc.

Uma sucessão histórica é a sucessão de Fibonacci, que foi apresentada por Leonardo de Pisa, (1175-1250). Esta sucessão foi motivada pelos processos hereditários nos coelhos.

Poema sobre sucessões de Maria Augusta

*“Era uma vez uma bola
Que caiu de uma janela
Sobe e desce sempre metade
Ninguém mais teve mão nela.*

*Quanto a bola andou
Já a matemática demonstrou.
Mas será verdade?
Se a bola ainda não parou
Como a soma se calculou?”*

Sucessão de números reais

Definição

Chama-se **sucessão de números reais** ou **sucessão numérica** a toda a aplicação u de \mathbb{N} em \mathbb{R} .

Simbolicamente:

$$\begin{aligned}u : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto u(n)\end{aligned}$$

Observação 1

Quando se trata de sucessões é usual substituir a notação $u(n)$ por u_n .

Termo e ordem do termo de uma sucessão

Definição

Numa sucessão, a cada imagem chamamos termo da sucessão, enquanto que ao respetivo objeto chamamos ordem do termo.

Uma sucessão representa-se por:

- $(u_1, u_2, \dots, u_n, \dots)$;
- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$;
- (u_n) .

Exemplo

Seja $u_n = n + 1$.

- $u_1 = 1 + 1 = 2$ diz-se o 1º termo da sucessão ou termo de ordem 1;
- $u_2 = 2 + 1 = 3$ diz-se o 2º termo da sucessão ou termo de ordem 2;
- \vdots
- $u_n = n + 1$ diz-se o n -ésimo termo da sucessão ou termo de ordem n ou termo geral da sucessão.

Termo geral de uma sucessão

Definição

Termo geral de uma sucessão é uma expressão designatória, de domínio \mathbb{N} , que gera todos os termos da sucessão.

Conjunto dos termos de uma sucessão

Qualquer sucessão, como aplicação que é, tem um contradomínio (conjunto das imagens), que no caso das sucessões é frequentemente designado por **conjunto dos termos da sucessão**.

Exercício 1

Indique o conjunto dos termos de cada uma das seguintes sucessões:

① $u_n = n;$

② $u_n = (-1)^n;$

③ $u_n = 4.$

Modos de definir uma sucessão

Para determinar (ou referirmo-nos a) uma sucessão, indica-se geralmente uma fórmula, através da qual pode-se obter para cada $n \in \mathbb{N}$ o correspondente termo de ordem n .

Exemplo: Seja (u_n) a sucessão definida por:

$$u_n = \begin{cases} 5, & n \text{ par} \\ \frac{2}{4+3n}, & n \text{ ímpar} \end{cases}$$

Modos de definir uma sucessão - continuação

Evidentemente, a determinação de uma sucessão pode fazer-se por outros processos:

- Indicam-se alguns termos iniciais considerados suficientes para determinar qualquer outro termo.

Exemplo: Seja (x_n) definida por:

$$3, 8, 13, 18, \dots$$

Modos de definir uma sucessão - continuação

- Por recorrência - Uma sucessão diz-se definida por recorrência quando são dados o primeiro, ou os primeiros termos, e os seguintes são obtidos à custa dos anteriores.

Exemplo: Seja (v_n) definida por:

$$v_1 = 0$$

$$v_2 = 1$$

$$v_{n+2} = 5 v_{n+1} + v_n$$

Sucessão de Fibonacci

Esta sucessão surgiu com o problema inicial dos coelhos:

- Num pátio fechado, coloca-se um casal de coelhos. Supondo que em cada mês, a partir do segundo mês de vida, cada casal dá origem a um novo casal de coelhos, ao fim de um ano, quantos casais de coelhos estão no pátio?

Esta sucessão, por recorrência, é definida por:

$$v_1 = 1$$

$$v_2 = 1$$

$$v_n = v_{n-1} + v_{n-2}, \quad n > 2.$$

Definição

*Uma sucessão diz-se **monótona** quando é crescente ou decrescente (em sentido lato ou estrito).*

Sucessão crescente e sucessão crescente em sentido lato

Definição

Seja (u_n) uma sucessão de números reais. Diz-se que (u_n) é:

- *Crescente ou estritamente crescente ou crescente em sentido estrito se*

$$u_{n+1} > u_n, \forall n \in \mathbb{N} \iff u_{n+1} - u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

- *Não decrescente ou crescente em sentido lato se*

$$u_{n+1} \geq u_n, \forall n \in \mathbb{N} \iff u_{n+1} - u_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Sucessão decrescente e sucessão decrescente em sentido lato

Definição

- *Decrescente ou estritamente decrescente ou decrescente em sentido estrito se*

$$u_{n+1} < u_n, \forall n \in \mathbb{N} \iff u_{n+1} - u_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

- *Não crescente ou decrescente em sentido lato se*

$$u_{n+1} \leq u_n, \forall n \in \mathbb{N} \iff u_{n+1} - u_n \leq 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Exercício 2

Verifique se são monótonas as sucessões cujos termos gerais são:

$$① \quad u_n = \frac{n}{n+1};$$

$$② \quad u_n = \begin{cases} 2n+1, & n \text{ par} \\ -n+3, & n \text{ ímpar} \end{cases}$$

$$③ \quad u_n = \frac{(-1)^{n+1} + 2}{n+1};$$

$$④ \quad u_n = \frac{1}{2n-1}.$$

Sucessão limitada inferiormente

Definição

*Diz-se que uma sucessão (u_n) é **minorada** ou **limitada inferiormente** se, e só se, o conjunto dos seus termos for minorado, isto é, se existir $b \in \mathbb{R}$, tal que*

$$u_n \geq b, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Sucessão limitada superiormente

Definição

*Diz-se que uma sucessão (u_n) é **majorada** ou **limitada superiormente** se, e só se, o conjunto dos seus termos for majorado, isto é, se existir $c \in \mathbb{R}$, tal que*

$$u_n \leq c, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Sucessão limitada

Definição

*Diz-se que uma sucessão (u_n) é **limitada** se, e só se, o conjunto dos seus termos for limitado, isto é, se existir $a, b \in \mathbb{R}$ tais que*

$$a \leq u_n \leq b, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por vezes, é conveniente usar a seguinte definição:

$$(u_n) \text{ é limitada} \Leftrightarrow \exists L \in \mathbb{R}^+ : |u_n| \leq L, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Exercício 3

Prove que são limitadas as sucessões definidas por:

① $u_n = 1 + \frac{1}{n}$;

② $u_n = (-1)^n$.

Ínfimo e supremo de uma sucessão

Definição

Se a é minorante de (u_n) e verificar-se a condição $a \geq c$, sendo c qualquer minorante de (u_n) , então a é o maior dos minorantes ou o **ínfimo** de (u_n) .

Definição

Se b é majorante de (u_n) e verificar-se a condição $b \leq d$, sendo d qualquer majorante de (u_n) , então b é o menor dos majorantes ou o **supremo** de (u_n) .

Definição

Chama-se **subsucessão de uma sucessão** (u_n) a toda a sucessão que se obtém de (u_n) por supressão de alguns termos.

Representa-se por

$$(u'_n) = (u_n)_{n \in \mathbb{N}'}, \quad \text{com } \mathbb{N}' \subset \mathbb{N}.$$

Exercício 4

Indique duas subsucessões de cada uma das sucessões que se segue:

① $u_n = n;$

② $u_n = \frac{1 + (-1)^n}{n}.$

Observação 2

- 1 Qualquer subsucessão de uma sucessão limitada é limitada.
- 2 Qualquer subsucessão de uma sucessão monótona é também monótona (crescente ou decrescente consoante a sucessão considerada).
- 3 De uma sucessão não monótona é possível extrair subsucessões monótonas.
- 4 Toda a sucessão crescente (mesmo em sentido lato) é limitada inferiormente pelo seu primeiro termo.
- 5 Toda a sucessão decrescente (mesmo em sentido lato) é limitada superiormente pelo seu primeiro termo.

Limite de uma sucessão

Definição

Seja (u_n) uma sucessão de números reais e $a \in \mathbb{R}$. Diz-se que (u_n) **converge para** a ou **tende para** a ou **tem limite** a e escreve-se

$$u_n \rightarrow a$$

se, e só se, para todo o número real positivo δ , é possível obter um número natural n_0 , tal que para $n > n_0$ se tem $|u_n - a| < \delta$.

Simbolicamente:

$$u_n \rightarrow a \Leftrightarrow \forall \delta > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : n > n_0 \Rightarrow |u_n - a| < \delta$$

Observação 3

Podemos assim verificar que, se $\lim u_n = a$, então qualquer intervalo do tipo $]a - \delta, a + \delta[$ contém todos os termos de (u_n) , com exceção no máximo de um número finito de termos.

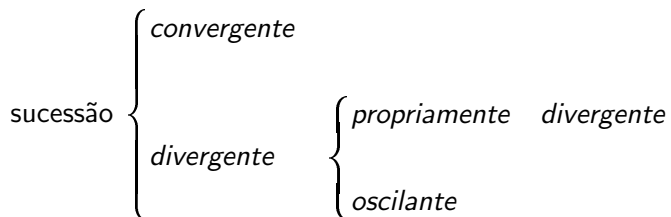
Definição

*Se o limite é zero, diz-se que (u_n) é um **infinitésimo**.*

Definição

- *Uma sucessão diz-se **convergente** se tiver limite finito, isto é, se tender para um número real.*
- *Uma sucessão diz-se **divergente** se não for convergente.*

Classificação das sucessões quanto à existência e natureza do limite:



Exercício 5

Prove, pela definição de limite, que $\lim u_n = \frac{2}{3}$, sendo $u_n = \frac{2n-1}{3n+1}$.

Exercício 6

Seja $u_n = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}$.

a) Determine a ordem a partir da qual:

① $|u_n - 1| < 0,1$

② $|u_n - 1| < 3$

b) Prove, pela definição, que $u_n \rightarrow 1$.

Teorema 1 (Unicidade do limite)

O limite de uma sucessão, quando existe, é único.

Teoremas sobre limites de sucessões

Teorema 2

Qualquer subsucessão de uma sucessão convergente é também convergente para o mesmo limite.

Corolário 1

Se $\lim u_n = a$, então

$$\forall k \in \mathbb{N}, \lim u_{n+k} = a.$$

Isto é, o limite de uma sucessão não se altera, quando se retira um número finito de termos.

Observação 4

- 1 Do teorema anterior resulta que, se uma sucessão (u_n) admitir duas subsucessões com limites diferentes, então (u_n) é divergente.
- 2 Para determinar o limite de uma sucessão (u_n) que se sabe ser convergente, basta determinar o limite de uma das suas subsucessões, pois este será também o limite de (u_n) .

Teoremas sobre limites de sucessões

Teorema 3

Toda a sucessão **convergente** é **limitada**.

Observação:

O recíproco do teorema anterior nem sempre é válido, isto é,

$$(u_n) \text{ limitada} \not\Rightarrow (u_n) \text{ convergente}$$

Teoremas sobre limites de sucessões

Teorema 4 (Convergência das sucessões monótonas)

Toda a sucessão monótona e limitada é convergente.

Corolário 1

Se (u_n) é uma sucessão monótona e possui uma subsucessão convergente, então (u_n) é convergente.

Teoremas sobre limites de sucessões

Teorema 5

Seja (x_n) um infinitésimo e (y_n) uma sucessão limitada. Então a sucessão $(x_n \cdot y_n)$ é um infinitésimo (mesmo que não exista $\lim y_n$).

Nota

Este resultado é referido muitas vezes dizendo-se que “o produto de um infinitésimo por uma sucessão limitada é um infinitésimo”.

Teoremas sobre limites de sucessões

Teorema 6

Se $\lim x_n = a$ e $\lim y_n = b$ então:

- 1 $\lim (x_n + y_n) = a + b;$
- 2 $\lim (x_n - y_n) = a - b;$
- 3 $\lim (x_n \cdot y_n) = ab;$
- 4 $\lim \left(\frac{x_n}{y_n} \right) = \frac{a}{b};$
- 5 $\lim \sqrt[p]{x_n} = \sqrt[p]{\lim x_n} = \sqrt[p]{a};$
- 6 $\lim |x_n| = |\lim x_n| = |a|.$

Observação 5

- 1 Os resultados das alíneas (1) e (2) do teorema anterior são válidos para um número finito de sucessões.
- 2 Deve-se ter o cuidado de não aplicar o teorema nas somas (ou produtos) em que o número de parcelas (ou fatores) é variável e cresce acima de qualquer limite.

Teoremas sobre limites de sucessões

Teorema 7 (Permanência do sinal)

Se uma sucessão tem limite positivo, então a partir de uma certa ordem todos os seus termos são positivos.

Nota:

Do mesmo modo se prova que se $\lim x_n = b$, com $b < 0$, então a partir de uma certa ordem, todos os termos x_n são negativos.

Teoremas sobre limites de sucessões

Teorema 8 (Passagem ao limite numa desigualdade)

Sejam (x_n) e (y_n) duas sucessões convergentes. Se $x_n \leq y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, então

$$\lim x_n \leq \lim y_n.$$

Nota

Supondo $x_n < y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, não podemos garantir que

$$\lim x_n < \lim y_n.$$

Corolário 1

Seja (u_n) uma sucessão convergente. Se $u_n \geq a$, $\forall n \in \mathbb{N}$, então

$$\lim u_n \geq a.$$

Nota:

Refira-se que se $u_n > a$, então $\lim u_n \geq a$.

Teoremas sobre limites de sucessões

Teorema 9 (Teorema ou Critério das Sucessões Enquadradas)

Se (u_n) e (v_n) são duas sucessões de números reais convergentes para o mesmo limite a e, se a partir de certa ordem, a sucessão (w_n) é tal que

$$u_n \leq w_n \leq v_n,$$

então

$$\lim w_n = a.$$

Exercício 7

Recorrendo ao teorema das sucessões enquadradas, calcule o limite das sucessões definidas por:

$$① \quad w_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k} = \frac{n}{n^2 + 1} + \frac{n}{n^2 + 2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n}$$

$$② \quad w_n = \frac{1 + \operatorname{sen}^2[(2n)!]}{n + 3}.$$

Teoremas sobre limites de sucessões

Lema 1

Toda a sucessão limitada possui subsucessões convergentes.

Limites infinitos - infinitamente grande positivo

Definição

Seja (u_n) uma sucessão. Diz-se que (u_n) é um **infinitamente grande positivo**, e escreve-se $u_n \rightarrow +\infty$ ou $\lim u_n = +\infty$, se

$$\forall L \in \mathbb{R}^+, \exists p \in \mathbb{N} : n > p \Rightarrow u_n > L.$$

Exemplo

A sucessão de termo geral $u_n = n^2$ é um infinitamente grande positivo.

Limites infinitos - infinitamente grande negativo

Definição

Seja (u_n) uma sucessão. Diz-se que (u_n) é um **infinitamente grande negativo**, e escreve-se $u_n \rightarrow -\infty$ ou $\lim u_n = -\infty$ se, e só se, a sucessão $(-u_n)$ for um infinitamente grande positivo.

Exemplo

A sucessão de termo geral $u_n = -n^2$ é um infinitamente grande negativo.

Limites infinitos - infinitamente grande (sem sinal)

Definição

Seja (u_n) uma sucessão. Diz-se que (u_n) é um **infinitamente grande (sem sinal)** ou **infinitamente grande em módulo** se, e só se, $|u_n| \rightarrow +\infty$

Exemplo

- 1 A sucessão de termo geral $u_n = (-1)^{n+1}n^2$ é um infinitamente grande (sem sinal);
- 2 A sucessão de termo geral $u_n = 3 + (-1)^n n$ é um infinitamente grande em módulo.

Teorema

Sejam (x_n) e (y_n) duas sucessões de números reais.

1) Se $\lim x_n = +\infty$ e (y_n) é limitada inferiormente por um número positivo, então $\lim (x_n + y_n) = +\infty$.

2) Se $\lim x_n = +\infty$ e (y_n) é limitada inferiormente por um número positivo, então $\lim (x_n \cdot y_n) = +\infty$.

3) Se (x_n) é uma sucessão de termos positivos, então

$$\lim x_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim \frac{1}{x_n} = +\infty.$$

Teorema - continuação

4) Se (x_n) e (y_n) são sucessões de termos positivos:

- Se (x_n) é limitada inferiormente por um número positivo e $\lim y_n = 0$, então

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = +\infty.$$

- Se (x_n) é limitada superiormente e $\lim y_n = +\infty$, então

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = 0.$$

Propriedades algébricas dos limites

- $\lim (x_n + y_n) = \lim x_n + \lim y_n$
(Desde que as sucessões não tenham simultaneamente limites infinitos de sinais contrários)
- $\lim (x_n - y_n) = \lim x_n - \lim y_n$
(Desde que as sucessões não tenham simultaneamente limites infinitos com o mesmo sinal)
- $\lim (x_n \cdot y_n) = \lim x_n \cdot \lim y_n$
(Desde que as sucessões não tenham simultaneamente limite nulo e limite infinito)
- $\lim \left(\frac{x_n}{y_n} \right) = \frac{\lim x_n}{\lim y_n}$
(Desde que as sucessões não tenham simultaneamente limites nulos ou limites infinitos)

Propriedades algébricas dos limites

- $\lim |x_n| = |\lim x_n|$
- $\lim \sqrt[p]{x_n} = \sqrt[p]{\lim x_n}$, com $p \in \mathbb{N}$
(Desde que a expressão tenha significado)
- $\lim (x_n^k) = (\lim x_n)^k$, desde que para $k = 0$ $\lim x_n \neq 0$ e $\lim x_n \neq \infty$.
- $\lim (k^{x_n}) = k^{\lim x_n}$, desde que para $k = 1$, $\lim x_n \neq \infty$ e para $k = 0$, $\lim x_n \neq 0$.
- $\lim (x_n^{y_n}) = (\lim x_n)^{\lim y_n}$, desde que para
 - ① $\lim x_n = 0$, $\lim y_n \neq 0$;
 - ② $\lim x_n = \infty$, $\lim y_n \neq 0$;
 - ③ $\lim x_n = 1$, $\lim y_n \neq \infty$.

Propriedades algébricas dos limites

- $\lim (\log x_n) = \log (\lim x_n)$, desde que a expressão tenha significado.

- $\lim \operatorname{sen} x_n = \operatorname{sen} \lim x_n$

$$\lim \cos x_n = \cos \lim x_n$$

$$\lim \operatorname{tg} x_n = \operatorname{tg} \lim x_n$$

$$\lim \operatorname{cotg} x_n = \operatorname{cotg} \lim x_n$$

Limite do quociente entre dois polinómios em n

$$\lim \frac{a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \dots + a_p n^p}{b_0 + b_1 n + b_2 n^2 + \dots + b_q n^q} = \begin{cases} \infty & \text{se } p > q \\ \frac{a_p}{b_q} & \text{se } p = q \\ 0 & \text{se } p < q \end{cases}$$

Exercício 8 - Complete:

① $\lim \frac{3n^3 + 5}{n^2} = \dots$

② $\lim \frac{5n^2 + n + 3}{4n^2 + 6} = \dots$

③ $\lim \frac{n}{n^2 + 4} = \dots$

Limite da Exponencial

$$\lim a^n = \begin{cases} \infty & \text{se } |a| > 1 \\ 1 & \text{se } a = 1 \\ \nexists & \text{se } a = -1 \\ 0 & \text{se } |a| < 1 \end{cases}$$

Exercício 9 - Complete:

① $\lim 2^n = \dots$

② $\lim (-1)^n = \dots$

③ $\lim \left(\frac{1}{2}\right)^n = \dots$

④ $\lim \left(\frac{-1}{4}\right)^n = \dots$

⑤ $\lim (-3)^n = \dots$

A sucessão $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

A sucessão (u_n) é estritamente crescente e limitada, pois

$$2 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Logo, pelo teorema de convergência das sucessões monótonas, (u_n) é convergente, tendo-se

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\lim_{u_n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{u_n}\right)^{u_n} = e$$

$$\lim_{u_n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{k}{u_n}\right)^{u_n} = e^k$$

Exercício 10

Calcule os seguintes limites:

$$\textcircled{1} \lim \left(1 + \frac{2}{n} \right)^{n+2}$$

$$\textcircled{2} \lim \left(1 - \frac{9}{4n^2} \right)^{3n}$$

Regras para a determinação de limites de sucessões

Consideremos as sucessões (u_n) e $(\frac{u_n}{n})$. Demonstra-se que:

$$\lim(u_{n+1} - u_n) = a \Rightarrow \lim \frac{u_n}{n} = a.$$

Exercício 11 - Calcule:

$$\lim \frac{\log(n+1)}{n}.$$

Regras para a determinação de limites de sucessões

Consideremos as sucessões (u_n) com $u_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e $(\sqrt[n]{u_n})$.
Demonstra-se que:

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = b \Rightarrow \lim \sqrt[n]{u_n} = b.$$

Exercício 12 - Calcule:

① $\lim \sqrt[n]{n+1}$

② $\lim \frac{1}{n} \sqrt[n]{n!}$

Regras para a determinação de limites de sucessões

Demonstra-se que se (u_n) é uma sucessão convergente, então

$$\lim u_n = k \Rightarrow \lim \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n} = k.$$

Exercício 13 - Calcule:

1 $\lim \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n} \right);$

2 $\lim \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}, \text{ com } a_n = \frac{3n^2-1}{n^2+1}.$

Regras para a determinação de limites de sucessões

Demonstra-se que se (u_n) é uma sucessão convergente e $u_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, então

$$\lim u_n = r \Rightarrow \lim \sqrt[n]{u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_n} = r$$

Exercício 14 - Calcule:

1 $\lim \sqrt[n]{\frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{5}{6} \dots \frac{2n-1}{2n}}$

2 $\lim \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{1}\right) \left(1 + \frac{1}{2}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{n}\right)}$

Regras para a determinação de limites de sucessões

Sejam (u_n) e (v_n) duas sucessões reais com (v_n) sucessão crescente. Demonstra-se que

$$\lim \frac{u_{n+1} - u_n}{v_{n+1} - v_n} = m \Rightarrow \lim \frac{u_n}{v_n} = m.$$

Exercício 15 - Calcule:

① $\lim \frac{\log n}{n}$

② $\lim \frac{3n^2 + 2}{\log n}$

③ $\lim \frac{\sum_{i=1}^n \sqrt{2i}}{\sum_{i=1}^n \sqrt{2i-1}}$

Regras para a determinação de limites de sucessões

A exponencial de base maior do que um evolui mais rapidamente do que qualquer potência do seu expoente.

$$\lim \frac{a^{u_n}}{(u_n)^k} = \infty, \quad \text{com } u_n \rightarrow +\infty \text{ e } a > 1$$

$$\lim \frac{(u_n)^k}{a^{u_n}} = 0, \quad \text{com } u_n \rightarrow +\infty \text{ e } a > 1$$

Exercício 16

Calcule, se existirem, os seguintes limites:

$$\textcircled{1} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n}{n}$$

$$\textcircled{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-n}}{-n}$$

$$\textcircled{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+2}}{(n+2)^{100}}$$

$$\textcircled{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+4)^{10}}{6^{3n+4}}$$

Regras para a determinação de limites de sucessões

Os números evoluem mais rapidamente do que qualquer potência dos seus logaritmos.

$$\lim \frac{n}{(\log n)^k} = \infty$$
$$\lim \frac{(\log n)^k}{n} = 0$$

Generalização:

$$\lim \frac{u_n}{(\log u_n)^k} = \infty, \quad \text{com } u_n \rightarrow \infty \quad \text{e} \quad u_n > 0$$

$$\lim \frac{(\log u_n)^k}{u_n} = 0, \quad \text{com } u_n \rightarrow \infty \quad \text{e} \quad u_n > 0$$

Exercício 17

Calcule:

$$\textcircled{1} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n+1)}{n+1}$$

$$\textcircled{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\log n)^5}{n}$$

$$\textcircled{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^6 + 1}{[\log(n^6 + 1)]^2}$$

Regras para a determinação de limites de sucessões

$$\lim_{u_n \rightarrow 0} \frac{\text{sen } u_n}{u_n} = 1$$

$$\lim_{u_n \rightarrow 0} \frac{\text{tg } u_n}{u_n} = 1$$

Exercício 18 - Calcule:

① $\lim n^2 \text{sen} \left(\frac{1}{n^2} \right)$

② $\lim \frac{\text{tg} \left(\frac{1}{2} \right)^n}{\left(\frac{1}{2} \right)^n}$

Exercício 19

Determine, caso exista, os seguintes limites:

① $\lim \sin n$

② $\lim \frac{\sin n}{n}$

③ $\lim n \sin \left(\frac{1}{n}\right)$

④ $\lim \cos \left(\frac{1}{n}\right)$

⑤ $\lim \frac{\sin n}{n^2 + 1}$

⑥ $\lim \frac{n \sin n}{n^2 + 1}$

Regras para a determinação de limites de sucessões

$$\lim y_n(x_n - 1) = k \Rightarrow \lim(x_n)^{y_n} = e^k$$

(só serve para indeterminações do tipo 1^∞)

Exercício 20 - Calcule:

$$\lim \left(\frac{\log(n+1)}{\log n} \right)^n.$$

Exercício 21- Produtos sucessivos

Considere a sucessão de termo geral $u_n = \frac{1.3.5.7 \cdots (2n-1)}{2^n n!}$.

1 Calcule

1 u_1

2 u_2

3 u_3

4 u_4

5 u_9

6 u_{20}

2 Estude a monotonia de (u_n) .

Exercício 22- Produtos sucessivos

Considere a sucessão de termo geral $u_n = 2.4.6 \cdots (2n)$.

1 Calcule:

1 u_1

2 u_2

3 u_3

4 u_{10}

5 u_{30}

2 Estude a monotonia de (u_n) .

Exercício 23- Somas sucessivas

Considere a sucessão de termo geral $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdots + \frac{1}{n}$.

① Calcule:

① u_1

② u_2

③ u_3

④ u_{10}

⑤ u_{40}

② Estude a monotonia de (u_n) .

SÉRIES NUMÉRICAS

Maria do Carmo Martins

Novembro de 2013

Definição e generalidades

Definição

Seja (u_n) uma sucessão de números reais. Chama-se **série numérica** ou **série de números reais** ou **soma infinita** à expressão que se obtém somando todos os termos de (u_n) . Simbolicamente:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \dots = \sum_1^{\infty} u_n$$

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \dots = \sum u_n$$

Definição e generalidades

Considerando a série $\sum u_n$, tem-se

$$\left. \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \\ \vdots \end{array} \right\} \text{termos da série}$$

em que u_n é o termo geral da série.

Observação 1

Por vezes é conveniente considerar séries do tipo $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$, ou mais geralmente, $\sum_{n=p}^{\infty} u_n$, onde p é um número natural. Assim, são também séries as expressões:

$$\sum_{n=2}^{\infty} u_n = u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

$$\sum_{n=8}^{\infty} u_n = u_8 + u_9 + \cdots + u_n + \cdots$$

Sucessão associada a uma série

Definição

Considere-se a série numérica $\sum u_n$. Define-se

$S_1 = u_1$	<i>primeiro termo da série</i>
$S_2 = u_1 + u_2$	<i>soma dos dois primeiros termos da série</i>
$S_3 = u_1 + u_2 + u_3$	<i>soma dos três primeiros termos da série</i>
\vdots	
$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$	<i>soma dos n primeiros termos da série</i>
\vdots	

Sucessão associada a uma série

$$\left. \begin{array}{c} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_n \\ \vdots \end{array} \right\} \text{somas parciais da série } \sum u_n$$

$(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou (S_n) é uma sucessão de números reais chamada **sucessão das somas parciais** da série $\sum u_n$ ou **sucessão associada** à série.

Exercício 1

Considere a série $\sum \frac{1}{n}$. Calcule S_2 , S_3 , S_{10} e S_n .

Sucessão associada a uma série

Considere-se a série $\sum u_n$. Então

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} + u_n$$

$$S_{n-1} = u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}$$

$$S_n - S_{n-1} = (u_1 + \cdots + u_{n-1} + u_n) - (u_1 + \cdots + u_{n-1}) = u_n.$$

Assim,

$$S_n - S_{n-1} = u_n.$$

Exercício 2

Seja $S_n = \frac{n}{n+1}$ o termo geral da sucessão das somas parciais da série $\sum u_n$. Determine u_n .

Convergência da sucessão associada à série

Considere-se a série numérica $\sum u_n$ e seja (S_n) a sua sucessão associada. Então

$$(S_n) \text{ converge} \Leftrightarrow \sum u_n \text{ converge.}$$

Natureza de uma série

Definição

- Diz-se que a série de termo geral u_n é **convergente** se existir em \mathbb{R} o

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S.$$

O número real S diz-se a **soma da série** $\sum u_n$. Escreve-se então, $\sum u_n = S$.

- Diz-se que a série de termo geral u_n é **divergente** se a sucessão associada à série for divergente, isto é, se $\lim S_n = \infty$ ou $\nexists \lim S_n$.

Chama-se **natureza de uma série** à propriedade de ser **convergente** ou **divergente**.

Observação 2

Note-se que sendo (S_n) uma sucessão, o cálculo do limite de S_n obedece às propriedades algébricas dos limites das sucessões, podendo aplicar-se, sempre que seja possível, as regras práticas já estudadas.

Exercício 3

Estude a natureza das séries:

① $\sum \frac{1}{n(n+1)};$

② $\sum c,$ com $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\};$

③ $\sum 0;$

④ $\sum (-1)^{n+1} 5.$

Definição

Seja $\sum u_n$ uma série numérica. Chama-se **resto de ordem p** da série $\sum u_n$ à série que se obtém suprimindo os p primeiros termos da série. Simbolicamente

$$R_p = u_{p+1} + u_{p+2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_{p+n}.$$

Exercício 4

Escreva o resto de ordem 4 da série $\sum \frac{1}{n}$.

Observação 3

Suponhamos que $\sum u_n$ é uma série numérica convergente cuja soma é S . Então

$$S = \sum u_n = \underbrace{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}_{S_n} + \underbrace{u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots}_{R_n}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} S &= S_n + R_n \\ R_n &= S - S_n. \end{aligned}$$

Observação 3 (continuação)

Tomando limites, tem-se:

$$\begin{aligned}\lim R_n &= \lim (S - S_n) \\ &= \lim S - \lim S_n \\ &= S - S \\ &= 0.\end{aligned}$$

Concluimos então que uma série é convergente se o resto de ordem n for um infinitésimo, isto é:

$$\sum u_n \text{ é convergente} \quad \Leftrightarrow \quad \lim R_n = 0$$

Série geométrica

Definição

Chama-se **série geométrica** a toda a série da forma

$$\sum ar^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^n + \dots$$

Refira-se que, numa série geométrica cada termo pode ser obtido a partir do termo anterior multiplicando pela razão r .

Exercício 5

Verifique que a série $\sum \frac{1}{2^n}$ é geométrica e indique a razão.

Natureza da série Geométrica (1)

Estudemos a natureza (convergente ou divergente) da série geométrica.

Escrevendo a sucessão das somas parciais, (S_n) , multiplicando-a por r , (rS_n) , e subtraindo rS_n a S_n , vem:

$$S_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1}$$

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 \dots + ar^{n-1} + ar^n$$

$$S_n - rS_n = (a + ar + \dots + ar^{n-1}) - (ar + \dots + ar^{n-1} + ar^n)$$

$$S_n - rS_n = a - ar^n$$

$$S_n(1 - r) = a - ar^n$$

Natureza da série Geométrica (2)

Consideremos os seguintes casos:

1) Se $r \neq 1$, então $S_n = \frac{a-ar^n}{1-r}$.

Calculemos o limite de S_n :

$$\begin{aligned}\lim S_n &= \lim \frac{a - ar^n}{1 - r} \\&= \lim \left(\frac{a}{1 - r} - \frac{ar^n}{1 - r} \right) \\&= \frac{a}{1 - r} - \lim \frac{ar^n}{1 - r} \\&= \frac{a}{1 - r} - \frac{a}{1 - r} \lim r^n\end{aligned}$$

Sendo r^n uma exponencial, o limite vai depender da base.

Natureza da série Geométrica (3)

Assim, teremos de considerar os casos:

- 1 $|r| < 1$;
- 2 $|r| > 1$;
- 3 $r = -1$.

Analisemos cada caso:

- Se $|r| < 1$, então $\lim r^n = 0$ e assim $\lim S_n = \frac{a}{1-r}$.

Sendo (S_n) convergente, então a série $\sum ar^{n-1}$ é convergente e a sua soma é $S = \frac{a}{1-r}$.

Natureza da série geométrica (4)

- Se $|r| > 1$, então $\lim r^n = \infty$ e assim $\lim S_n = \infty$.

Sendo (S_n) divergente, então a série $\sum ar^{n-1}$ é divergente.

- Se $r = -1$, então $\sum ar^{n-1}$ é divergente, pois:
 - Se n é par, então $S_n = \frac{a}{1-(-1)} - \frac{a}{1-(-1)} = 0$, pelo que $\lim S_n = 0$.
 - Se n é ímpar, então $S_n = \frac{a}{1-(-1)} - \left(-\frac{a}{1-(-1)}\right) = a$, pelo que $\lim S_n = a$.

Assim, $S_n = a$ para n ímpar e $S_n = 0$ para n par. É sabido que esta sucessão não tem limite e, portanto, a série é divergente.

Natureza da série geométrica (5)

2) Se $r = 1$, então $S_n = na$. Calculando o limite de S_n tem-se:

$$\lim S_n = \lim na = \infty$$

Como (S_n) é divergente, então $\sum ar^{n-1}$ é divergente.

Conclusão:

A série geométrica $\sum ar^{n-1}$ converge se, e só se, $|r| < 1$. Neste caso, a sua soma é

$$S = \frac{a}{1-r}.$$

Exercício 6

Determine a natureza das seguintes séries e, em caso de convergência, calcule a respectiva soma:

1 $\sum \frac{2}{3^n}$

2 $\sum \left(\frac{5}{4}\right)^n$

Série de Mengoli

Definição

Chama-se **série de Mengoli**^a a toda a série cujo termo geral pode ser escrito numa das seguintes formas:

$$u_n = a_n - a_{n+1}; \quad (1)$$

$$u_n = a_n - a_{n+2}; \quad (2)$$

$$u_n = a_n - a_{n+p}, \quad p \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

^aPietro Mengoli, matemático italiano que em 1650 estabeleceu a soma de grande número de séries de termos positivos e a divergência da série harmónica.

Exercício 7

Verifique que são de Mengoli as seguintes séries:

$$① \sum \frac{1}{n(n+1)}$$

$$② \sum \frac{1}{n(n+3)}$$

Série de Mengoli

Analiseemos cada um dos casos da definição anterior. Consideremos o caso (1). Admitamos que existe uma sucessão (a_n) tal que $u_n = a_n - a_{n+1}$. Tem-se

$$\begin{aligned} S_n &= u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n \\ &= (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \cdots + (a_{n-1} - a_n) + (a_n - a_{n+1}) \\ &= a_1 - a_{n+1}. \end{aligned}$$

Calculemos o limite de S_n :

$$\begin{aligned} \lim S_n &= \lim(a_1 - a_{n+1}) \\ &= \lim a_1 - \lim a_{n+1} \\ &= a_1 - \lim a_{n+1} \\ &= a_1 - \lim a_n \end{aligned}$$

Série de Mengoli

Portanto,

$$\begin{aligned}(S_n) \text{ converge} &\Leftrightarrow (a_n) \text{ converge} \\ \sum u_n \text{ converge} &\Leftrightarrow (a_n) \text{ converge}\end{aligned}$$

Conclusão: A série de Mengoli

$$\sum u_n = \sum (a_n - a_{n+1})$$

converge se, e só se, (a_n) for convergente. Em caso de convergência, a sua soma é

$$S = a_1 - \lim a_n.$$

Série de Mengoli

Consideremos o caso (2). Admitamos que existe uma sucessão (a_n) tal que $u_n = a_n - a_{n+2}$. Tem-se

$$\begin{aligned} S_n &= u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n \\ &= (a_1 - a_3) + (a_2 - a_4) + (a_3 - a_5) + \cdots + (a_{n-2} - a_n) \\ &\quad + (a_{n-1} - a_{n+1}) + (a_n - a_{n+2}) \\ &= a_1 + a_2 - a_{n+1} - a_{n+2}. \end{aligned}$$

Calculemos o limite de S_n :

$$\begin{aligned} \lim S_n &= \lim(a_1 + a_2 - a_{n+1} - a_{n+2}) \\ &= a_1 + a_2 - \lim a_{n+1} - \lim a_{n+2} \\ &= a_1 + a_2 - 2 \lim a_n \end{aligned}$$

Série de Mengoli

Portanto,

$$\begin{aligned}(S_n) \text{ converge} &\Leftrightarrow (a_n) \text{ converge} \\ \sum u_n \text{ converge} &\Leftrightarrow (a_n) \text{ converge}\end{aligned}$$

Conclusão: A série de Mengoli

$$\sum u_n = \sum (a_n - a_{n+2})$$

converge se, e só se, (a_n) for convergente. Em caso de convergência, a sua soma é

$$S = a_1 + a_2 - 2 \lim a_n.$$

Série de Mengoli

Consideremos, finalmente, o caso (3). Admitamos que existe uma sucessão (a_n) tal que $u_n = a_n - a_{n+p}$, com $p \in \mathbb{N}$. Tem-se

$$\begin{aligned} S_n &= u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n \\ &= (a_1 - a_{1+p}) + (a_2 - a_{2+p}) + \cdots + (a_{n-1} - a_{n-1+p}) + \\ &\quad + (a_n - a_{n+p}) \\ &= a_1 + a_2 + \cdots + a_p - a_{n+1} - a_{n+2} - \cdots - a_{n+p}. \end{aligned}$$

Calculemos o limite de S_n :

$$\begin{aligned} \lim S_n &= \lim(a_1 + a_2 + \cdots + a_p - a_{n+1} - a_{n+2} - a_{n+p}) \\ &= a_1 + a_2 + \cdots + a_p - \lim a_{n+1} - \lim a_{n+2} - \lim a_{n+p} \\ &= a_1 + a_2 + \cdots + a_p - p \lim a_n \end{aligned}$$

Conclusão: A série de Mengoli

$$\sum u_n = \sum (a_n - a_{n+p}), \quad \text{com } p \in \mathbb{N}$$

converge se, e só se, (a_n) for convergente. Em caso de convergência, a sua soma é

$$S = a_1 + a_2 + \cdots + a_p - p \lim a_n.$$

Exercício 8

Calcule a soma das séries das seguintes séries

1 $\sum \frac{1}{n(n+1)}$

2 $\sum \frac{1}{n(n+3)}$

Série Aritmética

Definição

Chama-se **série aritmética** a toda a série em que é constante a diferença entre um termo e o seu antecedente.

Portanto, a série $\sum u_n$ é uma série aritmética se $u_{n+1} - u_n = r$, com r constante. Tem-se assim,

$$S_n = \underbrace{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}_{\text{soma de } n \text{ termos de uma p.a.}} = \frac{u_1 + u_n}{2} \times n$$

Como $\lim S_n = \infty$, a série aritmética é sempre divergente.

Exercício 9

Determine a natureza da série $\sum 2n$.

Série geométrica-aritmética

Definição

Chama-se **série geométrica-aritmética** a toda a série da forma

$$\sum n a r^{n-1} = a + 2ar + 3ar^2 + 4ar^3 + \cdots + nar^{n-1} + \dots$$

Exercício 10

Verifique que a série $\sum \frac{n}{2^n}$ é uma série geométrica-aritmética.

Natureza da série geométrica-aritmética (1)

Estudemos a natureza da série $\sum nar^{n-1}$, procedendo de modo análogo ao das séries geométricas.

$$S_n = a + 2ar + 3ar^2 + \cdots + (n-1)ar^{n-2} + nar^{n-1}$$

$$rS_n = ar + 2ar^2 + 3ar^3 \cdots + (n-1)ar^{n-1} + nar^n$$

$$S_n - rS_n = \underbrace{a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1}}_{\text{soma de n termos de uma p.g.}} - nar^n$$

$$S_n(1-r) = \frac{a - ar^n}{1-r} - nar^n$$

Natureza da série geométrica-aritmética (2)

Consideremos os seguintes casos:

1) Se $r \neq 1$, então $S_n = \frac{a-ar^n}{(1-r)^2} - \frac{nar^n}{1-r}$.

Calculemos o limite de S_n :

$$\lim S_n = \lim \left(\frac{a - ar^n}{(1-r)^2} - \frac{nar^n}{1-r} \right)$$

Sendo r^n uma exponencial, o limite vai depender da base. Assim, teremos de considerar os casos:

- 1 $|r| < 1$;
- 2 $|r| > 1$;
- 3 $r = -1$.

Analisemos cada caso:

Natureza da série geométrica-aritmética (3)

- Se $|r| < 1$, então

$$\begin{aligned}\lim S_n &= \lim \left(\frac{a - ar^n}{(1-r)^2} - \frac{nar^n}{1-r} \right) \\ &= \lim \left(\frac{a}{(1-r)^2} - \frac{ar^n}{(1-r)^2} - \frac{anr^n}{1-r} \right)\end{aligned}$$

Ora, se $|r| < 1$, então:

- $\lim r^n = 0$
- $\lim nr^n = \lim \frac{n}{(\frac{1}{r})^n} \stackrel{1}{=} 0$.

Assim, $\lim S_n = \frac{a}{(1-r)^2}$. Sendo (S_n) convergente, então a série $\sum nar^{n-1}$ é convergente e a sua soma é $S = \frac{a}{(1-r)^2}$.

¹Recorde-se que a exponencial de base maior que um evolui mais rapidamente do que qualquer potência do seu expoente.

Natureza da série geométrica-aritmética (4)

- Se $|r| > 1$,

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{a - ar^n}{(1-r)^2} - \frac{nar^n}{1-r} \\ &= \frac{a - ar^n - nar^n(1-r)}{(1-r)^2} \\ &= \frac{a - [ar^n + nar^n(1-r)]}{(1-r)^2} \\ &= \frac{a - r^n[a + na(1-r)]}{(1-r)^2} \end{aligned}$$

Assim $\lim S_n = \infty$. Sendo (S_n) divergente, então a série $\sum nar^{n-1}$ é divergente.

Natureza da série geométrica-aritmética (5)

- Se $r = -1$, então $\sum nar^{n-1}$ é divergente, pois:
 - Se n é par, então $S_n = \frac{-na}{2}$, pelo que $\lim S_n$ depende do sinal de a .
 - Se n é ímpar, então $S_n = \frac{a+na}{2}$, pelo que

$$\lim S_n = \lim \frac{a + na}{2} = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 0 \\ -\infty & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

Assim, não existe $\lim S_n$ e, portanto, a série é divergente.

Natureza da série geométrica-aritmética (6)

2) Se $r = 1$, então $S_n = \frac{an+an^2}{2}$. Calculando o limite de S_n tem-se:

$$\lim S_n = \lim \frac{an^2 + an}{2} = \infty$$

Como (S_n) é divergente, então $\sum nar^{n-1}$ é divergente.

Conclusão: A série geométrica-aritmética $\sum nar^{n-1}$ converge se, e só se, $|r| < 1$. Neste caso, a sua soma é

$$S = \frac{a}{(1-r)^2}.$$

Teorema 1 - Critério Geral de Cauchy

Para que uma série $\sum u_n$ seja convergente é necessário e suficiente que

$$\forall \delta > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : n > n_0 \Rightarrow |S_{n+p} - S_n| < \delta, \forall p \in \mathbb{N}$$

isto é,

$$\forall \delta > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : n > n_0 \Rightarrow |u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| < \delta, \forall p \in \mathbb{N}$$

Note-se que:

Teorema (Critério de Cauchy para as sucessões) *Seja (u_n) uma sucessão numérica.*

$$(u_n) \text{ converge} \Leftrightarrow \forall \delta > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : n > n_0 \Rightarrow |u_{n+p} - u_n| < \delta, \forall p \in \mathbb{N}.$$

Corolário 1 - Condição necessária para a convergência (série)

Corolário

Se a série $\sum u_n$ é convergente, então $\lim u_n = 0$.

Observação 4

O corolário anterior diz-nos que

$$\sum u_n \text{ converge} \Rightarrow \lim u_n = 0.$$

No entanto,

$$\lim u_n = 0 \not\Rightarrow \sum u_n \text{ converge.}$$

Exercício 11

Aplicando o critério geral de convergência determine a natureza da série $\sum \frac{1}{n}$.

Corolário 2 (Teste da Divergência)

Corolário

Se $\sum u_n$ é uma série tal que $\lim u_n \neq 0$, então a série $\sum u_n$ é divergente.

$$\lim u_n \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \sum u_n \text{ é divergente.}$$

Exercício 12

Determine a natureza da série $\sum \frac{n+1}{3n-1}$.

Teorema 2

Teorema

Se c é uma constante não nula, então as séries

$$\sum u_n \quad \text{e} \quad \sum c u_n$$

são da mesma natureza e, no caso de convergência, se for S a soma de $\sum u_n$, então $c S$ será a soma de $\sum c u_n$.

Exercício 13

Estude a natureza das séries:

1 $\sum \frac{1}{3n(n+1)}$

2 $\sum \frac{a}{n}, a \neq 0$

3 $\sum 5e^{\frac{1}{n}}$

Teorema 3

Teorema

Sejam $\sum u_n$ e $\sum v_n$ duas séries convergentes, cujas somas são respectivamente S' e S'' . Então

- ① A série $\sum(u_n + v_n)$ é convergente e a sua soma é $S' + S''$.*
- ② A série $\sum(u_n - v_n)$ é convergente e a sua soma é $S' - S''$.*

Exercício 14

Mostre que a série $\sum \left(\frac{4}{2^{n-1}} - \frac{2}{n^2 + 3n} \right)$ é convergente.

Corolário

Se a série

- $\sum u_n$ *é convergente e*
- *a série* $\sum v_n$ *é divergente*

(ou vice-versa), então a série

$$\sum (u_n + v_n)$$

é divergente.

Exercício 15

Determine a natureza das séries:

1 $\sum \left(\frac{1}{4n} - \frac{1}{4^n} \right)$

2 $\sum (2 + e)$

Conclusão

$$\left. \begin{array}{l} \sum u_n \text{ convergente} \\ \sum v_n \text{ convergente} \end{array} \right\} \Rightarrow \sum (u_n + v_n) \text{ convergente.}$$

$$\left. \begin{array}{l} \sum u_n \text{ convergente} \\ \sum v_n \text{ divergente} \end{array} \right\} \Rightarrow \sum (u_n + v_n) \text{ divergente.}$$

$$\left. \begin{array}{l} \sum u_n \text{ divergente} \\ \sum v_n \text{ divergente} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{nada se pode concluir acerca} \\ \text{da natureza da série } \sum (u_n + v_n).$$

Teorema 4

Teorema

Se uma série, $\sum u_n$, é convergente, então a série, $\sum u'_n$, que se obtém associando dois a dois os termos consecutivos da série de forma a construir novos termos é também convergente e têm a mesma soma.

Corolário

Se $\sum u'_n$ é divergente, então $\sum u_n$ é divergente.

Teorema 5

Teorema

A natureza de uma série não se altera se modificarmos um número finito dos seus termos, isto é,

- *Se duas séries diferem de um número finito de termos elas têm a mesma natureza.*

Nota: As séries referidas no teorema anterior têm a mesma natureza, mas podem não ter a mesma soma.

Exercício 16

Determine a natureza da série

$$\sum u_n = 1 + 2 + 3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

e, em caso de convergência, calcule a soma.

Séries de termos não negativos

Definição

Uma série $\sum u_n$ diz-se de **termos não negativos** se

$$u_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Exemplo:

- ① $\sum n$ é uma série de termos não negativos.
- ② $\sum n^2$ é uma série de termos não negativos.
- ③ $\sum (n - 5)$ **não** é uma série de termos não negativos.
- ④ $\sum (n - 1)$ é uma série de termos não negativos.

Série de termos não positivos

Definição

Uma série $\sum u_n$ diz-se de **termos não positivos** se

$$u_n \leq 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Exemplo:

- ① $\sum -n$ é uma série de termos não positivos.
- ② $\sum -n^2$ é uma série de termos não positivos.
- ③ $\sum (n - 5)$ **não** é uma série de termos não positivos.
- ④ $\sum (1 - n)$ é uma série de termos não positivos.

Observação 5

Suponhamos que $\sum a_n$ é uma série de termos não positivos. Então, por definição

$$a_n \leq 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Mas,

$$a_n \leq 0, \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow -a_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

pelo que, a série

$$\sum (-a_n) = -\sum a_n$$

é uma série de termos não negativos. Assim, o estudo de uma série de *termos não positivos* reduz-se ao estudo de uma série de *termos não negativos*, uma vez que as séries $\sum a_n$ e $\sum -a_n$ têm a mesma natureza.

Teorema 6 - Condição necessária e suficiente de convergência de uma série de termos não negativos

Teorema

É condição necessária e suficiente para que uma série de termos não negativos seja convergente que a sucessão (S_n) , das somas parciais da série, seja limitada superiormente.

Exercício 17

Prove que $\sum \frac{1}{n!}$ é convergente, utilizando o teorema anterior.

Teorema 7 - Critério de comparação

Teorema

Sejam $\sum u_n$ e $\sum v_n$ duas séries de termos não negativos, tais que

$$u_n \leq v_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Então

- 1 Se $\sum v_n$ converge, então $\sum u_n$ converge
- 2 Se $\sum u_n$ diverge, então $\sum v_n$ diverge

Série majorante e série minorante

Definição

Chama-se **série majorante** de uma série $\sum u_n$ à série $\sum v_n$, tal que

$$u_n \leq v_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

- $\sum v_n$ é a **série majorante** da série $\sum u_n$
- $\sum u_n$ é a **série minorante** da série $\sum v_n$

O Critério de Comparação pode ser enunciado do seguinte modo:

- 1 A convergência da série majorante implica a convergência da série minorante.
- 2 A divergência da série minorante implica a divergência da série majorante.

Observação 6

Como a natureza de uma série não depende dos seus primeiros termos (em número finito), o teorema anterior ainda é válido para o caso em que a condição $u_n \leq v_n$ se verifica apenas a partir de uma certa ordem, isto é, se

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow u_n \leq v_n.$$

Exercício 18 - Determine a natureza da série $\sum \frac{1}{5^n(n+1)}$, aplicando o critério de comparação.

Exercício 19

- 1 Utilizando o critério de comparação, conclua que a série $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ é divergente.
- 2 Determine a natureza da série $\sum \frac{1}{n^n}$.

Corolário 1

Corolário

Sejam $\sum u_n$ uma série de termos não negativos e $\sum v_n$ uma série de termos positivos. Se existir um $c > 0$, tal que a condição

$$\frac{u_n}{v_n} \leq c$$

se verifica a partir de uma certa ordem, então:

- 1 Se $\sum v_n$ é convergente, então $\sum u_n$ converge.
- 2 Se $\sum u_n$ é divergente, então $\sum v_n$ diverge.

Corolário 2

Corolário

Sejam $\sum u_n$ e $\sum v_n$ duas séries de termos positivos. Se existirem $c > 0$ e $d > 0$ tais que

$$c \leq \frac{u_n}{v_n} \leq d,$$

a partir de uma certa ordem, então as séries $\sum u_n$ e $\sum v_n$ são da mesma natureza.

Corolário 3 - Critério de comparação por limites

Corolário

Sejam $\sum u_n$ e $\sum v_n$ duas séries de termos positivos. Então:

- 1 Se $\lim \frac{u_n}{v_n} = \ell \neq 0, +\infty$ (então) as séries $\sum u_n$ e $\sum v_n$ são da mesma natureza.
- 2 Se $\lim \frac{u_n}{v_n} = 0$, então a convergência de $\sum v_n$ implica a convergência de $\sum u_n$ ou a divergência de $\sum u_n$ implica a divergência de $\sum v_n$.
- 3 Se $\lim \frac{u_n}{v_n} = +\infty$, então a convergência de $\sum u_n$ implica a convergência de $\sum v_n$ ou a divergência de $\sum v_n$ implica a divergência de $\sum u_n$.

Exercício 20

Utilizando o **Critério de comparação por limites**, estude a natureza da série

$$\sum \frac{n+1}{n \cdot 4^n}.$$

Corolário 4 - Comparação de razões

Corolário

Sejam $\sum u_n$ e $\sum v_n$ duas séries de termos positivos. Se existir uma ordem p , a partir da qual

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n},$$

então:

- Se $\sum v_n$ converge, então $\sum u_n$ converge.
- Se $\sum u_n$ diverge, então $\sum v_n$ diverge.

Exercício 21

Estude a natureza das séries:

1 $\sum \frac{2^n + 5}{3^n - 11}$

2 $\sum \frac{\log n}{n}$

3 $\sum \frac{1 + \operatorname{sen} n}{2^n}$

4 $\sum \log\left(1 + \frac{3}{n}\right)$

Definição

Chama-se **Série de Dirichlet**^a a toda a série da forma

$$\sum \frac{1}{n^{\alpha}},$$

sendo α um número real.

^aPeter Gustave Lejeune Dirichlet (1805-1859), matemático Alemão, foi professor em Berlin e Göttingen e deu importantes contribuições para a Análise e Teoria dos Números

Exercício 22

① $\sum \frac{1}{n}; \quad \alpha = 1$ (**Série harmónica**);.

② $\sum \frac{1}{n^3}; \quad \alpha = 3.$

③ $\sum \frac{1}{n^{-9}}; \quad \alpha = -9.$

④ $\sum \frac{1}{n^{-\frac{5}{2}}}; \quad \alpha = -\frac{5}{2}.$

Teorema 8

Teorema

Seja (u_n) uma sucessão de termos não negativos e decrescente. Então as séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad e \quad \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \cdot u_{2^k}$$

são da mesma natureza.

Corolário

Corolário

A série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge para $\alpha > 1$ e diverge para $\alpha \leq 1$.

Exercício 23

a) Estude a natureza da série $\sum \frac{n+1}{\sqrt{3n^3+2}}$.

b) Recorrendo ao critério de comparação por limites, determine a natureza das seguintes séries:

① $\sum \frac{n+4}{\sqrt[3]{n^7+2}}$

② $\sum \log\left(1 + \frac{3}{n^3}\right)$

③ $\sum \frac{\sin \frac{1}{n}}{\sqrt{n^3+2}}$

Séries de Bertrand ²

Definição

Chama-se **Série de Bertrand** a toda a série da forma

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha} (\log n)^{\beta}}, \quad \text{com } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$



²Joseph Louis François Bertrand (1822-1900) foi um matemático, historiador de ciências e acadêmico francês.

Natureza das séries de Bertrand

Observação

Consideremos a série de Bertrand:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha} (\log n)^{\beta}}, \quad \text{com } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

- Se $\alpha > 1$, a série de Bertrand converge $\forall \beta \in \mathbb{R}$;
- Se $\alpha < 1$, a série diverge $\forall \beta \in \mathbb{R}$;
- Se $\alpha = 1$, então
 - Se $\beta > 1$ a série converge;
 - Se $\beta \leq 1$ a série diverge.

Exemplos

① $\sum_2^{\infty} \frac{1}{n^2 \log n}$; Série de Bertrand convergente; $\alpha = 2 > 1$.

② $\sum_2^{\infty} \frac{1}{n^5 (\log n)^3}$; Série de Bertrand convergente; $\alpha = 5 > 1$ e $\beta = 3 > 1$.

③ $\sum_2^{\infty} \frac{1}{n \log n}$; Série de Bertrand divergente; $\alpha = 1$ e $\beta = 1$.

Teorema 9 - Critério da razão

Teorema

Seja $\sum u_n$ uma série de termos positivos.

- ① Se existir $k > 0$ tal que

$$\exists p \in \mathbb{N} : n \geq p \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq k < 1,$$

então a série converge.

- ② Se

$$\exists p \in \mathbb{N} : n \geq p \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1,$$

então a série diverge.

Corolário 1 - Critério D'Alembert

Corolário

Seja $\sum u_n$ uma série de termos positivos. Suponhamos que

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \quad (\ell \text{ finito ou infinito})$$

- ❶ Se $\ell < 1$, então $\sum u_n$ é convergente
- ❷ Se $\ell > 1$, então $\sum u_n$ é divergente
- ❸ Se $\ell = 1$, nada se pode concluir quanto à natureza da série $\sum u_n$.

Jean D'Alembert³



³ Jean Le Rond D'Alembert (1717-1783), notável matemático, filósofo e escritor Francês do tempo dos enciclopedistas, foi secretário perpétuo da Academia Francesa.

Observação 7

Observação

Sendo $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, nada se pode concluir, no entanto,

- *se $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1^+$ (por valores superiores a 1), então a série $\sum u_n$ é divergente.*
- *Se $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1^-$, então nada se pode concluir quanto à natureza de $\sum u_n$.*

Exercício 24

Aplicando o Critério D'Alembert, estude a natureza das séries

1 $\sum \frac{1}{n}$

2 $\sum \frac{1}{n^2}$

3 $\sum \frac{n}{n+1}$

Corolário 2

Corolário

Seja $\sum u_n$ uma série de termos positivos.

- 1 Se $\overline{\lim} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, então $\sum u_n$ converge
- 2 Se $\underline{\lim} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, então $\sum u_n$ diverge.

Resumo

Dada a série $\sum u_n$, com $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$,

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \begin{cases} \ell < 1, & \sum u_n \text{ converge} \\ \ell > 1, & \sum u_n \text{ diverge} \\ \ell = 1^+, & \sum u_n \text{ diverge} \\ \ell = 1^-, & \text{nada se pode concluir.} \end{cases}$$

$$\nexists \lim \frac{u_{n+1}}{u_n} \text{ e se } \begin{cases} \overline{\lim} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1, & \sum u_n \text{ converge} \\ \underline{\lim} \frac{u_{n+1}}{u_n}, & \sum u_n \text{ diverge} \end{cases}$$

Observação 8

Observação

O critério de D'Alembert aplica-se às séries que apresentam no seu termo geral:

- *produtos*
- *potências*
- *factoriais*

Exercício 25

Determine a natureza das séries:

1 $\sum \frac{n+3}{(n+2)!}$

2 $\sum \frac{n^3}{n!}$

3 $\sum \frac{n+2+2^n}{5^n}$

Teorema 10 - Critério da Raiz

Teorema

Seja $\sum u_n$ uma série de termos não negativos.

- ① Se existir uma ordem a partir da qual $\sqrt[n]{u_n} \leq k < 1$ ($k > 0$), então a série $\sum u_n$ é convergente.*
- ② Se existir uma ordem a partir da qual $\sqrt[n]{u_n} \geq 1$, então a série $\sum u_n$ é divergente.*

Corolário 1 - Critério de Cauchy

Corolário

Seja $\sum u_n$ uma série de termos não negativos. Suponhamos que $\lim \sqrt[n]{u_n} = \ell$

- 1 Se $\ell < 1$, então $\sum u_n$ é convergente
- 2 Se $\ell > 1$, então $\sum u_n$ é divergente
- 3 Se $\ell = 1$, nada se pode concluir quanto à natureza da série.



⁴Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) Matemático francês. Foi um dos fundadores da teoria dos grupos finitos. Em análise infinitesimal, criou a noção moderna de continuidade para as funções de variável real ou complexa.

Observação

- Se $\lim \sqrt[n]{u_n} = 1^+$, então a série $\sum u_n$ é divergente.
- Se $\lim \sqrt[n]{u_n} = 1^-$, então nada se pode concluir quanto à natureza da série $\sum u_n$.

Corolário 2

Corolário

Seja $\sum u_n$ uma série de termos não negativos:

- 1 Se $\overline{\lim} \sqrt[n]{u_n} < 1$, então $\sum u_n$ converge.
- 2 Se $\underline{\lim} \sqrt[n]{u_n} > 1$, então $\sum u_n$ diverge.

Exercício 26

Estude a natureza das séries

1 $\sum (1 + \frac{1}{n})^{n^2}$

2 $\sum \frac{|\operatorname{sen} n|}{n^{\frac{n}{2}}}$

3 $\sum [n^2 \log(1 + \frac{1}{2n}) \operatorname{tg} \frac{1}{n}]^n$

Resumo

Dada a série $\sum u_n$, com $u_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$

$$\lim \sqrt[n]{u_n} = \begin{cases} \ell < 1, & \sum u_n \text{ converge} \\ \ell > 1, & \sum u_n \text{ diverge} \\ \ell = 1^+, & \sum u_n \text{ diverge} \\ \ell = 1^-, & \text{nada se pode concluir.} \end{cases}$$

$$\nexists \lim \sqrt[n]{u_n} \text{ e se } \begin{cases} \overline{\lim} \sqrt[n]{u_n} < 1, & \sum u_n \text{ converge} \\ \underline{\lim} \sqrt[n]{u_n}, & \sum u_n \text{ diverge} \end{cases}$$

Observação 9

Observação

O critério de Cauchy aplica-se nos casos em que todos os factores do termo geral da série estão elevados, pelo menos, ao expoente n , isto é, utiliza-se quando u_n está elevado a

$$n, \quad n^2, \quad n^3, \dots$$

Teorema

Seja $\sum u_n$ uma série de termos positivos tal que

$$\lim \left[n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) \right] = \ell \quad (\text{finito ou não}).$$

- ❶ Se $\ell > 1$, então $\sum u_n$ converge
- ❷ Se $\ell < 1$, então $\sum u_n$ diverge.

Joseph Ludwig Raabe



Joseph L. Raabe (1801-1859) foi um dos precursores da somabilidade das séries pela média das somas parciais, método que utilizou para alguns tipos especiais de séries.

Observação 10

Observação

- Se $\lim[n(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1)] = 1^+$, então nada se pode concluir quanto à natureza da série.
- Se $\lim[n(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1)] = 1^-$, então a série $\sum u_n$ é divergente.

Exercício 27

Aplicando o critério de Raabe estude a natureza das séries:

a) $\sum (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

b) $\sum \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}$

Exercício 28

Aplicando o critério de Raabe, determine os valores de a para os quais a série

$$\sum \frac{a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1)}{n!}$$

é convergente.

SÉRIES ALTERNADAS e SÉRIES de POTÊNCIAS

Maria do Carmo Martins

Novembro de 2013

Séries Alternadas

Definição

Chama-se **série alternada** a toda a série da forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n+1} a_n + \cdots$$

ou da forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 + \cdots + (-1)^n a_n + \cdots$$

com $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$

Critério de Leibniz

Para esse tipo de série temos o seguinte critério:

Teorema

Seja $\sum (-1)^{n+1} a_n$ uma série alternada. Se

- 1 $\lim a_n = 0$;
- 2 (a_n) é não crescente, isto é, $a_{n+1} \leq a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$,

então a série é convergente

Gottfried Wilhelm Leibniz



Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) notável filósofo e matemático alemão que criou e desenvolveu o Cálculo Diferencial e Integral ao mesmo tempo que o matemático inglês Isaac Newton.

Observação

O critério de Leibniz também é aplicável às séries alternadas do tipo

$$\sum (-1)^n a_n,$$

com $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. **Porquê?**

Exercício 1

Estude a natureza da série $\sum_{n=2} (-1)^n \frac{2n}{n^2 - 1}$.

Séries de termos quaisquer

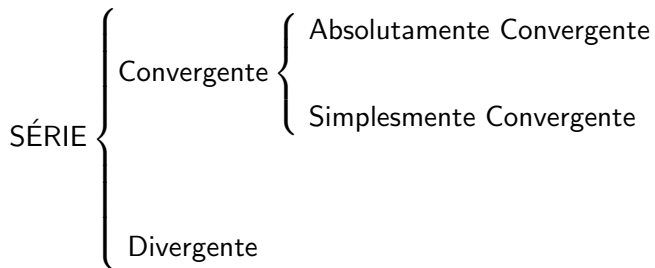
Definição

- Dada uma série $\sum u_n$, chama-se **série dos módulos de $\sum u_n$** à série

$$\sum |u_n| = |u_1| + |u_2| + \cdots + |u_n| + \cdots$$

- A série $\sum u_n$ diz-se **absolutamente convergente** quando a série dos módulos, $\sum |u_n|$, for convergente.
- A série $\sum u_n$ diz-se **simplesmente convergente ou condicionalmente convergente** quando a série for convergente e a série dos módulos, $\sum |u_n|$, for divergente.

Em síntese:



Teorema

Teorema

Toda a série absolutamente convergente é convergente.

Observação:

O recíproco do teorema anterior não é verdadeiro.

Exercício 2

Estude o tipo de convergência da série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$.

Exercício 3

Mostre, sem recorrer ao critério de Leibniz, que a série $\sum \frac{(-1)^n}{n^4}$ é convergente.

Exercício 4

Mostre que são absolutamente convergentes as séries:

$$1 \quad \sum \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{n^2}$$

$$2 \quad \sum \frac{\cos n\beta}{n!}$$

$$3 \quad \sum \frac{(-1)^n}{n^2}$$

Exercício 5

Mostre que a série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ é simplesmente convergente.

Exercício 6

Estude a natureza da série $\sum \frac{2(-1)^n+1}{n^2}$.

Séries de Potências de $(x - a)$

Definição

Chama-se **série de potências de $(x - a)$** a toda a expressão da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - a)^n = a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + \cdots + a_n(x - a)^n + \cdots$$

onde

- a é um número real fixo
- a_0, a_1, \dots, a_n são constantes reais chamadas **coeficientes da séries**
- e x uma variável real.

Observação

Se na definição anterior $a = 0$, tem-se

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

chamada **série de potências de x** .

- As séries de potências de x são uma generalização da noção de polinómio.

Exemplos

São exemplos de séries de potências:

$$\textcircled{1} \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^n + \cdots$$

em que $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = \cdots = 1$;

$$\textcircled{2} \sum_{n=0}^{\infty} n!x^n = 1 + x + 2!x^2 + 3!x^3 + 4!x^4 + \cdots + n!x^n + \cdots$$

$$\textcircled{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

Exemplo

Consideremos a série de potências de x :

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \underbrace{1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^n + \cdots}_{\substack{\text{série geométrica cujo} \\ \text{primeiro termo é 1 e razão } r = x}}$$

Atendendo à caracterização das séries geométricas, esta série diverge em qualquer ponto x tal que $|x| \geq 1$ e converge em todos os pontos do intervalo $] -1, 1[$. Em caso de convergência a sua soma é $S = \frac{1}{1-x}$.

Exemplo - (continuação)

- Se $x = 3$, tem-se

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3^n = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^n + \cdots$$

que é uma série geométrica com $r = 3$, logo divergente.

- Se $x = \frac{1}{2}$, tem-se

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

que é uma série geométrica com $r = \frac{1}{2}$, logo convergente.

Observações

- 1 Ao concretizarmos x na série de potências de x , $\sum a_n x^n$, obtemos uma série numérica que pode ser convergente ou divergente.
- 2 Se a série numérica $\sum a_n x_0^n$, com $x_0 \in \mathbb{R}$, for convergente, diz-se que a série de potências $\sum a_n x^n$ é convergente no ponto x_0 .
- 3 O conjunto dos pontos de convergência de uma série é um intervalo que se pode reduzir a um ponto.

Série de potências de x

De seguida abordamos o problema da determinação do conjunto dos pontos no qual a série $\sum a_n x^n$ é convergente. Assim sendo, o resultado essencial é o que se exprime no teorema seguinte:

Série de potências de x

Teorema

A série de potências de x , $\sum a_n x^n$ é:

- absolutamente convergente no intervalo $] -r, r[$ com
$$r = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}},$$
 com a convenção natural de se tomar
 - $r = 0$ se $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$ e
 - $r = +\infty$ se $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$
- divergente no intervalo $] -\infty, -r[\cup]r, +\infty[$

Definições

- Ao número r , considerado no teorema anterior, chamamos **raio de convergência** da série de potências de x , $\sum a_n x^n$.
- Ao intervalo $] -r, r[$ chamamos **intervalo de convergência** da série de potências de x , $\sum a_n x^n$.
- Ao conjunto dos valores reais que, substituídos na série, originam uma série numérica convergente chamamos **domínio de convergência**.

Note-se que o teorema esclarece a questão da convergência de $\sum a_n x^n$ em todos os pontos $x \in \mathbb{R}$, **exceto nos extremos do intervalo de convergência**, isto é nos pontos $-r$ e r . Nestes pontos a natureza da série não pode ser estabelecida em termos gerais, tendo de ser estudada em cada caso.

Exercício 7

Determine o domínio de convergência das seguintes séries:

1 $\sum x^n$

2 $\sum [3 + (-1)^n]^n x^n$

3 $\sum (nx)^n$

Corolário

O raio de convergência da série de potências de x , $\sum a_n x_n$, é:

$$r = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|,$$

quando esse limite existe.

Exercício 8

Determine o domínio de convergência da série $\sum \frac{x^n}{n}$.

Série de potências de $(x - a)$

No caso da série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - a)^n$ como determinar

- o raio de convergência?
- o intervalo de convergência?
- e domínio de convergência?

Série de potências de $(x - a)$ - continuação

Consideremos a série de potências de $(x - a)$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - a)^n$.
Atendendo a que

$$\sum_{n=0} a_n(x - a)^n \leq \sum_{n=0} |a_n(x - a)^n|,$$

à série dos módulos podemos aplicar o Critério da razão (ou da raiz) impondo a condição de convergência. Deste modo, temos:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}(x - a)^{n+1}}{a_n(x - a)^n} \right| < 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \left| \frac{(x - a)^{n+1}}{(x - a)^n} \right| < 1$$

Série de potências de $(x - a)$ - continuação

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |x - a| < 1$$

Fazendo $\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{r}$ e substituindo na última desigualdade, vem:

$$\frac{1}{r} |x - a| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |x - a| < r \quad \Leftrightarrow \quad a - r < x < a + r,$$

onde r é o raio de convergência.

Exercício 9

Confirme o resultado anterior, pelo critério de Cauchy.

Exercício 10

Determine o domínio de convergência da série $\sum \frac{(-1)^n (x+1)^n}{3^n n^2}$.

PRIMITIVAÇÃO

Maria do Carmo Martins

Novembro de 2013

Poema de Luís Soares

Cada reta é um caminho interrompido
Que curva
No desconhecido.

Nenhuma reta se traça
Entre quem ama e quem não ama
A geometria do amor é não-euclidiana.

De variáveis imaginadas
A vida é complexa função.
A sua **primitiva** permanece incógnita
Presa de irresolúvel equação.

O matemático é um poeta
Que pinta
Sem paleta.

Definição

Seja I um intervalo de \mathbb{R} não degenerado (isto é, com mais de um ponto) e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Diz-se que F é uma **primitiva** de f em I se $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ é tal que

$$F'(x) = f(x), \forall x \in I.$$

Nestas condições, diz-se que f é **primitivável**.

Exemplo 1

A função $F(x) = \frac{x^3}{3}$ é uma primitiva de $f(x) = x^2$ em \mathbb{R} , pois para cada $x \in \mathbb{R}$,

$$F'(x) = \frac{3x^2}{3} = x^2.$$

Notemos que esta não é a única primitiva de f em \mathbb{R} . Efetivamente, sendo c uma constante a função

$$F(x) + c = \frac{x^3}{3} + c$$

é também uma primitiva de f , uma vez que

$$[F(x) + c]' = F'(x) + 0 = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Observação 1

Seja I um intervalo de \mathbb{R} , $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$. Se F é uma primitiva de f em I , então

$$F + c$$

é também uma primitiva de f em I . Conclui-se deste modo que, se f admite uma primitiva em I , então admite uma infinidade de primitivas em I . O problema da primitivação é assim um problema indeterminado.

Observação 2

Se F_1 e F_2 são duas primitivas de f em I , então

$$[F_1 - F_2]' = F_1' - F_2' = f - f = 0.$$

Assim, $F_1 - F_2$ é uma função constante em I . Portanto, sendo F uma primitiva de f em I , então todas as primitivas de f em I são da forma $F + c$, com $c \in \mathbb{R}$. Diz-se que,

$$F(x) + c$$

é a expressão geral das primitivas de f nesse intervalo, sendo c uma constante.

Observação 3

- **Será que toda a função é primitivável?**

Notemos que nem toda a função é primitivável. Por exemplo, a função de Heaviside $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$h(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ 1, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

não é primitivável em \mathbb{R} , uma vez que se o fosse, qualquer primitiva H restringida ao intervalo $]0, +\infty[$ seria da forma $x + c$, com $c \in \mathbb{R}$. Por outro lado, também a restrição de H ao intervalo $] -\infty, 0[$ seria da forma k , com $k \in \mathbb{R}$. Portanto,

Observação 3 - continuação

$$H(x) = \begin{cases} k, & \text{se } x < 0 \\ x + c, & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Como facilmente se verifica, a função H não tem derivada em $x = 0$ independentemente do valor dado a $H(0)$. Assim, H não é uma primitiva de h em \mathbb{R} , pelo que h não é primitivável.

Exercício 1

Determine a equação de uma curva G , sabendo que $G'(x) = x$ e $G(0) = 1$. Interprete geometricamente o problema.

$$(R: G(x) = \frac{x^2}{2} + 1)$$

Sendo f uma função primitivável (num dado intervalo que muitas vezes não será necessário especificar) usaremos o símbolo

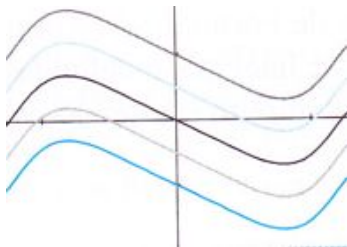
$$\int f \quad \text{ou} \quad \int f(x) \, dx,$$

para designar o conjunto de todas as primitivas de f (no intervalo considerado). Assim, pelo que já foi dito

$$\int f(x) \, dx = F(x) + c, \quad \text{com } c \in \mathbb{R}.$$

Observação 4

Geometricamente, o integral indefinido representa uma família de curvas em relação às quais se passa de uma para outra efetuando uma translação que pode ser no sentido positivo ou negativo do eixo Oy .



Os gráficos das primitivas de uma função f são chamados **curvas integrais de f** .

Observação 5

Por simplificação, dx é, às vezes, absorvido pela função a integrar.
Por exemplo:

$$\int 1 \, dx \quad \text{pode ser escrito como} \quad \int dx$$

$$\int \frac{1}{x^2} \, dx \quad \text{pode ser escrito como} \quad \int \frac{dx}{x^2}$$

Teorema 1

Teorema

- ① *Uma constante pode mover-se através do sinal de integração, isto é*

$$\int c f(x) dx = c \int f(x) dx$$

- ② *O integral de uma soma é a soma dos integrais, isto é,*

$$\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

- ③ *O integral de uma diferença é a diferença dos integrais, isto é,*

$$\int [f(x) - g(x)] dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$$

Observação 6

Só é possível passar para fora do sinal de integração fatores constantes. Refira-se que:

$$\int \frac{2x}{x^2 + 5} dx \quad \text{não é o mesmo que} \quad 2x \int \frac{dx}{x^2 + 5}$$

Primitivação Imediata

Como já foi referido, a operação de primitivação é inversa da de derivação. Isto significa que, as regras de primitivação são obtidas invertendo-se as de derivação. As primitivas que são determinadas aplicando simplesmente essas regras são denominadas por **primitivas imediatas**. Vejamos alguns exemplos:

Função Constante

$\int k \, dx = kx + c$, com k constante, para todo o $x \in \mathbb{R}$, e $c \in \mathbb{R}$

Exemplo 2:

① $\int 2 \, dx = 2 \int dx = 2x + c$

② $\int -\sqrt{5} \, dx = -\sqrt{5} \int dx = -\sqrt{5} x + c$

Exercício 2

Calcule:

$$\int e^{7\sqrt{13}\pi} \times 9^{100} dx$$

(R: $e^{7\sqrt{13}\pi} \times 9^{100}x + c$, com $c \in \mathbb{R}$)

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + c, \text{ com } m \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^+.$$

Generalização:

$$\int f^m(x) f'(x) dx = \frac{f^{m+1}(x)}{m+1} + c,$$

para $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, em qualquer intervalo de \mathbb{R} onde f é diferenciável e $f(x) > 0$.

Exemplo 3

$$\textcircled{1} \int x^5 dx = \frac{x^{5+1}}{5+1} + c = \frac{x^6}{6} + c$$

$$\textcircled{2} \int \underbrace{(x^2 + 5)^3}_{f^m} \underbrace{2x}_{f'} dx = \frac{(x^2 + 5)^{3+1}}{3 + 1} + c = \frac{(x^2 + 5)^4}{4} + c$$

Exercício 3

Calcule:

$$\int x^{17} (10x^{18} + \pi)^6 dx$$

$$(R: \frac{1}{180 \times 7} (10x^{18} + \pi)^7 + c, \text{ com } c \in \mathbb{R})$$

$$\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c,$$

em qualquer intervalo de \mathbb{R} que não contenha o ponto $x = 0$.

Generalização:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c,$$

em qualquer intervalo de \mathbb{R} onde f é diferenciável e $f(x) \neq 0$.

Exemplo 4

$$\textcircled{1} \int (5+x)^{-1} dx = \int \frac{1}{5+x} dx = \ln |5+x| + c$$

$$\textcircled{2} \int \frac{e^{x+6}}{1+e^x} dx = \int \frac{e^6 e^x}{1+e^x} dx = e^6 \ln(1+e^x) + c$$

Exercício 4

Calcule:

$$\int \frac{1}{x \ln x} dx$$

(R: $\ln |\ln x| + c$, com $c \in \mathbb{R}$)

Exponencial de base e

$$\int e^x dx = e^x + c,$$

para todo o $x \in \mathbb{R}$.

Generalização:

$$\int e^{f(x)} f'(x) dx = e^{f(x)} + c,$$

em qualquer intervalo de \mathbb{R} onde f é diferenciável.

Exemplo 5

$$\textcircled{1} \int e^{4x} dx = \frac{1}{4} \int e^{4x} 4 dx = \frac{1}{4} e^{4x} + c$$

$$\textcircled{2} \int e^{\frac{x}{3}} dx = 3 \int e^{\frac{x}{3}} \frac{1}{3} dx = 3 e^{\frac{x}{3}} + c$$

Exercício 5

Calcule:

$$\int x^5 e^{x^6} dx$$

(R: $\frac{1}{6} e^{x^6} + c$, com $c \in \mathbb{R}$)

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c,$$

com $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Generalização:

$$\int a^{f(x)} f'(x) dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + c,$$

com $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, em qualquer intervalo de \mathbb{R} onde f é diferenciável.

Exemplo 6

$$\textcircled{1} \int 5^x dx = \frac{1}{\ln 5} \int 5^x \ln 5 dx = \frac{5^x}{\ln 5} + c$$

$$\textcircled{2} \int -2^{3x} dx = -\frac{1}{3 \ln 2} \int 2^{3x} 3 \ln 2 dx = \frac{2^{3x}}{3 \ln 2} + c$$

Exercício 6

Calcule:

$$\int x^5 9^{x^6+3} dx$$

(R: $\frac{1}{6 \ln 9} 9^{x^2+3} + c$, com $c \in \mathbb{R}$)

$$\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x + c,$$

para todo o $x \in \mathbb{R}$.

Generalização:

$$\int f'(x) \cos(f(x)) \, dx = \operatorname{sen}(f(x)) + c,$$

em qualquer intervalo de \mathbb{R} onde f é diferenciável.

Exemplo 7

$$\begin{aligned}\int x^2 \cos(x^3) \, dx &= \\&= \frac{1}{3} \int 3x^2 \cos(x^3) \, dx = \\&= \frac{1}{3} \operatorname{sen}(x^3) + c\end{aligned}$$

Exercício 7

Calcule:

$$\int 2^x \cos(2^x) dx$$

(R: $\frac{1}{\ln 2} \operatorname{sen}(2^x) + c$, com $c \in \mathbb{R}$)

$$\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + c,$$

para todo o $x \in \mathbb{R}$.

Generalização:

$$\int f'(x) \operatorname{sen} (f(x)) \, dx = -\cos (f(x)) + c,$$

em qualquer intervalo de \mathbb{R} onde f é diferenciável.

Exemplo 8

$$\begin{aligned} & \int \frac{(x^2 + 1) \operatorname{sen}(\sqrt{x^3 + 3x})}{\sqrt{x^3 + 3x}} dx = \\ &= \int \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^3 + 3x}} \operatorname{sen}(\sqrt{x^3 + 3x}) dx = \\ &= \frac{2}{3} \int \frac{3(x^2 + 1)}{2\sqrt{x^3 + 3x}} \operatorname{sen}(\sqrt{x^3 + 3x}) dx = \\ &= -\frac{2}{3} \cos(\sqrt{x^3 + 3x}) + c \end{aligned}$$

Exercício 8

Calcule:

$$\int \frac{\operatorname{sen}(\operatorname{arctg} x)}{1+x^2} dx$$

(R: $-\cos(\operatorname{arctg} x) + c$, com $c \in \mathbb{R}$)

Secante ao quadrado

$$\int \sec^2 x \, dx = \operatorname{tg} x + c,$$

em qualquer intervalo de \mathbb{R} que não contenha pontos $\frac{\pi}{2} + k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$.

Generalização:

$$\int f'(x) \sec^2(f(x)) \, dx = \operatorname{tg}(f(x)) + c,$$

em qualquer intervalo de \mathbb{R} onde f é diferenciável e $\cos(f(x)) \neq 0$.

Exemplo 9

$$\int \frac{2x + 1}{\cos^2(x^2 + x)} dx =$$

$$\int (2x + 1) \frac{1}{\cos^2(x^2 + x)} dx =$$

$$= \int (2x + 1) \sec^2(x^2 + x) dx =$$

$$= \operatorname{tg}(x^2 + x) + c$$

Exercício 9

Calcule

$$\int e^{3x} \sec^2(e^{3x}) dx$$

(R: $\frac{1}{3} \operatorname{tg}(e^{3x}) + c$, com $c \in \mathbb{R}$)

Cossecante ao quadrado

$$\int \operatorname{cosec}^2 x \, dx = -\cotg x + c,$$

em qualquer intervalo de \mathbb{R} que não contenha nenhum dos pontos $k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$.

Generalização:

$$\int f'(x) \operatorname{cosec}^2(f(x)) \, dx = -\cotg(f(x)) + c,$$

em qualquer intervalo de \mathbb{R} onde f é diferenciável e $\operatorname{sen}(f(x)) \neq 0$.

Exemplo 10

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2(8x)} dx &= \\&= \frac{1}{8} \int 8 \operatorname{cosec}^2(8x) dx = \\&= -\frac{1}{8} \cotg(8x) + c\end{aligned}$$

Exercício 10

Calcule:

$$\int \frac{\operatorname{cosec}^2(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$$

(R: $-2 \cotg(\sqrt{x}) + c$, com $c \in \mathbb{R}$)

$$\int \sec x \operatorname{tg} x \, dx = \sec x + c$$

Generalização:

$$\int f'(x) \sec(f(x)) \operatorname{tg} f(x) \, dx = \sec(f(x)) + c,$$

em qualquer intervalo de \mathbb{R} onde f é diferenciável e $\cos(f(x)) \neq 0$.

Exemplo 11

$$\begin{aligned} & \int \frac{\text{sen}(\sqrt{x})}{\sqrt{x} \cos^2(\sqrt{x})} dx = \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{1}{\cos(\sqrt{x})} \frac{\text{sen}(\sqrt{x})}{\cos(\sqrt{x})} dx = \\ &= 2 \int \frac{1}{2\sqrt{x}} \sec(\sqrt{x}) \text{tg}(\sqrt{x}) dx = \\ &= 2 \sec(\sqrt{x}) + c \end{aligned}$$

Exercício 11

Calcule:

$$\int \sec(4x) \operatorname{tg}(4x) \, dx$$

(R: $\frac{1}{4} \sec(4x) + c$, com $c \in \mathbb{R}$)

$$\int \operatorname{cosec} x \cotg x \, dx = -\operatorname{cosec} x + c.$$

Generalização:

$$\int f'(x) \operatorname{cosec} (f(x)) \cotg (f(x)) \, dx = -\operatorname{cosec} (f(x)) + c,$$

em qualquer intervalo de \mathbb{R} onde f é diferenciável e $\operatorname{sen} (f(x)) \neq 0$.

Exemplo 12

$$\begin{aligned}\int x \operatorname{cosec}(x^2) \cotg(x^2) dx &= \\&= \frac{1}{2} \int 2x \operatorname{cosec}(x^2) \cotg(x^2) dx = \\&= -\frac{1}{2} \operatorname{cosec}(x^2) + c\end{aligned}$$

Exercício 12

Calcule:

$$\int \frac{\operatorname{cosec}(\sqrt{x}) \cotg(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$$

(R: $-2 \operatorname{cosec}(\sqrt{x}) + c$, com $c \in \mathbb{R}$)

$$\int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \cotg x dx = \ln |\sin x| + c$$

Generalização:

$$\int f'(x) \cotg (f(x)) dx = \ln |\sin (f(x))| + c,$$

em qualquer intervalo de \mathbb{R} onde f é diferenciável e $\sin (f(x)) \neq 0$.

Exemplo 13

$$\int \frac{dx}{\operatorname{tg} \frac{x}{5}} =$$

$$= \int \operatorname{cotg} \left(\frac{x}{5} \right) dx =$$

$$= 5 \int \frac{\cos \left(\frac{x}{5} \right)}{\operatorname{sen} \left(\frac{x}{5} \right)} dx =$$

$$= 5 \ln |\operatorname{sen} x| + c$$

Exercício 13

Calcule:

$$\int \frac{x^3 \cos(x^4)}{\operatorname{sen}(x^4)} dx$$

(R: $\frac{1}{4} \ln |\operatorname{sen}(x^4)| + c$, com $c \in \mathbb{R}$)

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx = \int \operatorname{tg} x dx = -\ln |\cos x| + c$$

Generalização:

$$\int f'(x) \operatorname{tg}(f(x)) dx = -\ln |\cos(f(x))| + c,$$

em qualquer intervalo de \mathbb{R} onde f é diferenciável e $\cos(f(x)) \neq 0$.

Exemplo 14

$$\begin{aligned}\int x \operatorname{tg}(x^2 + 1) dx &= \\&= \int x \frac{\operatorname{sen}(x^2 + 1)}{\cos(x^2 + 1)} dx = \\&= \frac{1}{2} \int 2x \frac{\operatorname{sen}(x^2 + 1)}{\cos(x^2 + 1)} dx = \\&= -\frac{1}{2} \int 2x \frac{-\operatorname{sen}(x^2 + 1)}{\cos(x^2 + 1)} dx = \\&= -\frac{1}{2} \ln |\cos(x^2 + 1)| + c\end{aligned}$$

Exercício 14

Calcule:

$$\int \frac{\operatorname{tg}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$$

(R: $-2 \ln |\cos(x^4)| + c$, com $c \in \mathbb{R}$)

$$\int \sec x \, dx = \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| + c$$
$$\int \sec x \, dx = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right| + c,$$

em qualquer intervalo de \mathbb{R} que não contenha nenhum dos pontos $\frac{\pi}{2} + k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$.

Generalização:

$$\int f'(x) \sec(f(x)) \, dx = \ln |\sec(f(x)) + \operatorname{tg} f(x)| + c$$
$$\int f'(x) \sec(f(x)) \, dx = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{f(x)}{2} \right) \right| + c,$$

em qualquer intervalo de \mathbb{R} onde f é diferenciável e $\cos(f(x)) \neq 0$.

Exemplo 15

$$\begin{aligned}\int x^2 \sec(x^3 + 2) dx &= \\&= \frac{1}{3} \int 3x^2 \sec(x^3 + 2) dx = \\&= \frac{1}{3} \ln |\sec(x^3 + 2) + \operatorname{tg}(x^3 + 2)| + c\end{aligned}$$

Ou

$$\begin{aligned}\int x^2 \sec(x^3 + 2) dx &= \\&= \frac{1}{3} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x^3 + 2}{2} \right) \right| + c\end{aligned}$$

Exercício 15

Calcule:

$$\int \frac{\sec(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$$

(R: $2 \ln |\sec(\sqrt{x}) + \operatorname{tg}(\sqrt{x})| + c$
ou $2 \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{x}}{2} \right) \right| + c$, com $c \in \mathbb{R}$)

$$\int \operatorname{cosec} x \, dx = \ln |\operatorname{cosec} x - \cotg x| + c$$

$$\int \operatorname{cosec} x \, dx = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} \right) \right| + c,$$

em qualquer intervalo de \mathbb{R} que não contenha nenhum dos pontos $k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$.

Generalização:

$$\int f'(x) \operatorname{cosec} (f(x)) \, dx = \ln |\operatorname{cosec} (f(x)) - \cotg (f(x))| + c$$

$$\int f'(x) \operatorname{cosec} (f(x)) \, dx = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{f(x)}{2} \right) \right| + c,$$

em qualquer intervalo de \mathbb{R} onde f é diferenciável e $\operatorname{sen} (f(x)) \neq 0$.

Exemplo 16

$$\begin{aligned} & \int x^3 \operatorname{cosec}(x^4 + 20) \, dx = \\ &= \frac{1}{4} \int 4x^3 \operatorname{cosec}(x^4 + 20) \, dx = \\ &= \frac{1}{4} \ln |\operatorname{cosec}(x^4 + 20) - \cotg(x^4 + 20)| + c \end{aligned}$$

Ou

$$\begin{aligned} & \int x^3 \operatorname{cosec}(x^4 + 20) \, dx = \\ &= \frac{1}{4} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x^4 + 20}{2} \right) \right| + c \end{aligned}$$

Exercício 16

Calcule:

$$\int \frac{\operatorname{cosec}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$$

(R: $2 \ln |\operatorname{cosec}(\sqrt{x}) - \cotg(\sqrt{x})| + c$
ou $2 \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\sqrt{x}}{2} \right) \right| + c$, com $c \in \mathbb{R}$)

$$\int \cosh x \, dx = \sinh x + c$$

Generalização:

$$\int f'(x) \cosh (f(x)) \, dx = \sinh (f(x)) + c,$$

em qualquer intervalo onde f é diferenciável.

Exemplo 17

$$\begin{aligned}\int \frac{\cosh\left(\frac{1}{x^3}\right)}{x^4} dx &= \\&= \frac{1}{-3} \int \frac{-3}{x^4} \cosh\left(\frac{1}{x^3}\right) dx = \\&= -\frac{1}{3} \sinh\left(\frac{1}{x^3}\right) + c\end{aligned}$$

Exercício 17

Calcule:

$$\int 2^x \cosh(2^x) \, dx$$

(R: $\frac{1}{\ln 2} \sinh(2^x) + c$, com $c \in \mathbb{R}$)

$$\int \sinh x \, dx = \cosh x + c$$

Generalização:

$$\int f'(x) \sinh (f(x)) \, dx = \cosh (f(x)) + c,$$

em qualquer intervalo onde f é diferenciável.

Exemplo 18

$$\begin{aligned} & \int \frac{1}{\operatorname{cosech}(\sqrt[3]{x})} x^{-\frac{2}{3}} dx = \\ &= \frac{1}{3} \int 3x^{-\frac{2}{3}} \sinh(\sqrt[3]{x}) dx = \\ &= 3 \cosh(\sqrt[3]{x}) + c \end{aligned}$$

Exercício 18

Calcule:

$$\int \frac{\ln x \sinh(\ln^2 x)}{x} dx$$

(R: $\frac{1}{2} \cosh(\ln^2 x) + c$, com $c \in \mathbb{R}$)

$$\int \operatorname{sech}^2 x \, dx = \operatorname{tgh} x + c$$

Generalização:

$$\int f'(x) \operatorname{sech}^2 (f(x)) \, dx = \operatorname{tgh} (f(x)) + c,$$

em qualquer intervalo onde f é diferenciável.

Exemplo 19

$$\begin{aligned} & \int \frac{1}{\sqrt{x} \cosh^2(\sqrt{x})} dx = \\ &= 2 \int \frac{1}{2\sqrt{x}} \operatorname{sech}^2(\sqrt{x}) dx = \\ &= 2 \operatorname{tgh}(\sqrt{x}) + c \end{aligned}$$

Exercício 19

Calcule:

$$\int x^2 \operatorname{sech}^2(x^3) dx =$$

(R: $\frac{1}{3} \operatorname{tgh}(x^3) + c$, com $c \in \mathbb{R}$)

$$\int \operatorname{cosech}^2 x \, dx = -\operatorname{cotgh} x + c,$$

para todo o $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Generalização:

$$\int f'(x) \operatorname{cosech}^2 (f(x)) \, dx = -\operatorname{cotgh} (f(x)) + c,$$

em qualquer intervalo onde f é diferenciável e $\sinh (f(x)) \neq 0$.

Exemplo 20

$$\begin{aligned} & \int \frac{1}{\sqrt{x} \sinh^2(\sqrt{x})} dx = \\ &= 2 \int \frac{1}{2\sqrt{x}} \operatorname{cosech}^2(\sqrt{x}) dx = \\ &= -2 \operatorname{cotgh}(\sqrt{x}) + c \end{aligned}$$

Exercício 20

Calcule:

$$\int \operatorname{cosech}^2(2x) \, dx$$

(R: $-\frac{1}{2} \operatorname{cotgh}(2x) + c$, com $c \in \mathbb{R}$)

Secante tangente hiperbólicas

$$\int \operatorname{sech} x \operatorname{tgh} x \, dx = -\operatorname{sech} x + c$$

Generalização:

$$\int f'(x) \operatorname{sech} (f(x)) \operatorname{tgh} (f(x)) \, dx = -\operatorname{sech} (f(x)) + c,$$

em qualquer intervalo onde f é diferenciável.

Exemplo 21

$$\begin{aligned} & \int -\frac{\sinh(x+1)}{\cosh^2(x+1)} dx = \\ &= \int -\frac{1}{\cosh(x+1)} \frac{\sinh(x+1)}{\cosh(x+1)} dx = \\ &= \int -\operatorname{sech}(x+1) \operatorname{tgh}(x+1) dx = \\ &= \operatorname{sech}(x+1) + c \end{aligned}$$

Exercício 21

Calcule

$$\int 5^x \operatorname{sech}(5^x) \operatorname{tgh}(5^x) dx$$

(R: $-\frac{1}{\ln 5} \operatorname{sech}(5^x) + c$, com $c \in \mathbb{R}$)

Cosecante cotangente hiperbólicas

$$\int \operatorname{cosech} x \cotgh x \, dx = -\operatorname{cosech} x + c,$$

para todo o $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Generalização:

$$\int f'(x) \operatorname{cosech} (f(x)) \cotgh (f(x)) \, dx = -\operatorname{cosech} (f(x)) + c,$$

em qualquer intervalo onde f é diferenciável e $\sinh (f(x)) \neq 0$

Exemplo 22

$$\begin{aligned} & \int \cos(2x) \operatorname{cotgh}(\operatorname{sen} 2x) \operatorname{cosech}(\operatorname{sen} 2x) \, dx = \\ &= \frac{1}{2} \int 2 \cos(2x) \operatorname{cotgh}(\operatorname{sen} 2x) \operatorname{cosech}(\operatorname{sen} 2x) \, dx = \\ &= -\frac{1}{2} \operatorname{cosech}(\operatorname{sen} 2x) + c \end{aligned}$$

Exercício 22

Calcule:

$$\int \frac{\cosh(6x)}{\sinh^2(6x)} dx$$

(R: $-\frac{1}{6} \operatorname{cosech}(6x) + c$, com $c \in \mathbb{R}$)

$$\int \operatorname{cotgh} x \, dx = \int \frac{\cosh x}{\sinh x} \, dx = \ln |\sinh x| + c,$$

para todo o $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Generalização:

$$\int f'(x) \operatorname{cotgh} (f(x)) \, dx = \ln |\sinh (f(x))| + c,$$

em qualquer intervalo onde f é diferenciável e $\sinh (f(x)) \neq 0$.

Exemplo 23

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\operatorname{tgh}(7x)} &= \\&= \frac{1}{7} \int \frac{7 \cosh(7x)}{\sinh(7x)} dx = \\&= \frac{1}{7} \ln |\sinh x| + c\end{aligned}$$

Exercício 23

Calcule:

$$\int \frac{x^3 \sinh(x^4)}{\cosh(x^4)} dx$$

(R: $\frac{1}{4} \ln |\cosh(x^4)| + c$, com $c \in \mathbb{R}$)

Tangente hiperbólica

$$\int \operatorname{tgh} x \, dx = \int \frac{\sinh x}{\cosh x} \, dx = \ln |\cosh x| + c$$

Generalização:

$$\int f'(x) \operatorname{tgh} (f(x)) \, dx = \ln |\cosh (f(x))| + c,$$

em qualquer intervalo onde f é diferenciável.

Exemplo 24

$$\begin{aligned}\int \frac{\operatorname{tgh}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx &= \\&= 2 \int \frac{1}{2\sqrt{x}} \frac{\sinh(\sqrt{x})}{\cosh(\sqrt{x})} dx = \\&= 2 \ln |\cosh(\sqrt{x})| + c\end{aligned}$$

Exercício 24

Calcule:

$$\int x \operatorname{tgh}(x^2 + 1) dx$$

(R: $\frac{1}{2} \ln |\cosh(x^2 + 1)| + c$, com $c \in \mathbb{R}$)

$$\int \operatorname{sech} x \, dx = \operatorname{arctg} (\sinh x) + c$$

$$\int \operatorname{sech} x \, dx = 2 \operatorname{arctg} (e^x) + c.$$

Generalização:

$$\int f'(x) \operatorname{sech} (f(x)) \, dx = \operatorname{arctg} [\sinh (f(x))] + c$$

$$\int f'(x) \operatorname{sech} (f(x)) \, dx = 2 \operatorname{arctg} (e^{f(x)}) + c,$$

em qualquer intervalo onde f é diferenciável

Cossecante hiperbólica

$$\int \operatorname{cosech} x \, dx = \ln \left| \operatorname{tgh} \left(\frac{x}{2} \right) \right| + c$$

$$\int \operatorname{cosech} x \, dx = -2 \operatorname{arccotgh} (e^x) + c$$

$$\int \operatorname{cosech} x \, dx = \ln |\operatorname{cosech} x - \operatorname{cotgh} x| + c$$

Generalização:

$$\int f'(x) \operatorname{cosech}(f(x)) \, dx = \ln \left| \operatorname{tgh} \left(\frac{f(x)}{2} \right) \right| + c$$

$$\int f'(x) \operatorname{cosech}(f(x)) \, dx = -2 \operatorname{arccotgh} \left(e^{f(x)} \right) + c$$

$$\int f'(x) \operatorname{cosech}(f(x)) \, dx = \ln |\operatorname{cosech}(f(x)) - \operatorname{cotgh}(f(x))| + c,$$

em qualquer intervalo onde f é diferenciável e $\sinh(f(x)) \neq 0$.

Expressão da forma $1/\sqrt{1-x^2}$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsen x + c, \text{ para todo } x \in]-1, 1[.$$

Generalização:

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}} dx = \arcsen (f(x)) + c, \text{ em qualquer intervalo onde } f \text{ é diferenciável e } |f(x)| < 1.$$

Exemplo 25

$$\begin{aligned}\int \frac{e^x}{\sqrt{1-4e^{2x}}} dx &= \\&= \int \frac{e^x}{\sqrt{1-(2e^x)^2}} dx = \\&= \frac{1}{2} \int \frac{2e^x}{\sqrt{1-(2e^x)^2}} dx = \\&= \frac{1}{2} \operatorname{arcsen}(2e^x) + c\end{aligned}$$

Exercício 25

Calcule:

$$\int \frac{3x}{\sqrt{16 - 25x^4}} dx$$

$$(R: \frac{3}{10} \arcsen \left(\frac{5x^2}{4} \right) + c, \text{ com } c \in \mathbb{R})$$

Expressão da forma $1/\sqrt{1-x^2}$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\arccos x + c, \text{ para todo } x \in]-1, 1[.$$

Generalização:

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}} dx = -\arccos(f(x)) + c, \text{ em qualquer intervalo}$$

onde f é diferenciável e $|f(x)| < 1$.

Expressão da forma $1/(1 + x^2)$

$$\int \frac{1}{1 + x^2} dx = \operatorname{arctg} x + c$$

Generalização:

$$\int \frac{f'(x)}{1 + f^2(x)} dx = \operatorname{arctg} (f(x)) + c, \text{ em qualquer intervalo onde } f \text{ é diferenciável.}$$

Exemplo 26

$$\begin{aligned} & \int \frac{5x}{9+x^4} dx = \\ &= \int \frac{\frac{5x}{9}}{\frac{9+x^4}{9}} dx = \\ &= \int \frac{\frac{5x}{9}}{1+\frac{x^4}{9}} dx = \\ &= \int \frac{\frac{5x}{9}}{1+\left(\frac{x^2}{3}\right)^2} dx = \\ &= \frac{5}{6} \int \frac{\frac{2x}{3}}{1+\left(\frac{x^2}{3}\right)^2} dx = \\ &= \frac{5}{6} \operatorname{arctg} \left(\frac{x^2}{3} \right) + c \end{aligned}$$

Exercício 26

Calcule:

$$\int \frac{1}{x^2 + x + 1} dx$$

$$(R: \frac{2}{\sqrt{3}} \arctg \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right) + c, \text{ com } c \in \mathbb{R})$$

Expressão da forma $1/(1+x^2)$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = -\operatorname{arccotg} x + c$$

Generalização:

$$\int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)} dx = -\operatorname{arccotg} (f(x)) + c, \text{ em qualquer intervalo}$$

onde f é diferenciável.

Expressão da forma $1/\sqrt{1+x^2}$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \operatorname{arcsenh} x + c, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Generalização:

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}} dx = \operatorname{arcsenh} (f(x)) + c, \text{ em qualquer intervalo}$$

onde f é diferenciável.

Exemplo 27

$$\begin{aligned}\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{1+16e^{4x}}} dx &= \\&= \int \frac{e^{2x}}{\sqrt{1+(4e^{2x})^2}} dx = \\&= \frac{1}{8} \int \frac{8e^{2x}}{\sqrt{1+(4e^{2x})^2}} dx = \\&= \frac{1}{8} \operatorname{arcsenh}(4e^{2x}) + c\end{aligned}$$

Exercício 27

Calcule:

$$\int \frac{3x}{\sqrt{16 + 25x^4}} dx$$

$$(R: \frac{3}{10} \operatorname{arcsenh} \left(\frac{5x^2}{4} \right) + c, \text{ com } c \in \mathbb{R})$$

Expressão da forma $1/\sqrt{x^2 - 1}$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx = \operatorname{arccosh} x + c, \text{ para todo } x \geq 1.$$

Generalização:

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f^2(x) - 1}} dx = \operatorname{arccosh} (f(x)) + c, \text{ em qualquer intervalo}$$

onde f é diferenciável.

Exemplo 28

$$\begin{aligned} & \int \frac{e^x}{\sqrt{4e^{2x} - 1}} dx = \\ &= \int \frac{e^x}{\sqrt{(2e^x)^2 - 1}} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2e^x}{\sqrt{(2e^x)^2 - 1}} dx = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{arccosh}(2e^x) + c \end{aligned}$$

Exercício 28

Calcule:

$$\int \frac{3x}{\sqrt{25x^4 - 16}} dx$$

$$(R: \frac{3}{10} \operatorname{arccosh} \left(\frac{5x^2}{4} \right) + c, \text{ com } c \in \mathbb{R})$$

Expressão da forma $1/(1 - x^2)$

$$\int \frac{1}{1 - x^2} dx = \operatorname{arctgh} x + c$$

$$\int \frac{1}{1 - x^2} dx = \operatorname{arccotgh} x + c$$

Generalização:

$$\int \frac{f'(x)}{1 - f^2(x)} dx = \operatorname{arctgh} (f(x)) + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{1 - f^2(x)} dx = \operatorname{arccotgh} (f(x)) + c,$$

em qualquer intervalo onde f é diferenciável.

Exemplo 29

$$\begin{aligned} & \int \frac{5x}{9-x^4} dx = \\ &= \int \frac{5x}{9(1-\frac{x^4}{9})} dx = \\ &= \frac{1}{9} \int \frac{5x}{1-\left(\frac{x^2}{3}\right)^2} dx = \\ &= \frac{5}{2 \times 3} \int \frac{\frac{2x}{3}}{1-\left(\frac{x^2}{3}\right)^2} dx = \\ &= \frac{5}{6} \operatorname{arctgh} \left(\frac{x^2}{3} \right) + c \end{aligned}$$

$$\text{ou } \int \frac{5x}{9-x^4} dx = \frac{5}{6} \operatorname{arccotgh} \left(\frac{x^2}{3} \right) + c$$

Exercício 29

Calcule:

$$\int \frac{x^3}{36 - x^8} dx$$

(R: $\frac{1}{24} \operatorname{arctgh} \left(\frac{x^4}{6} \right) + c$ ou $\frac{1}{24} \operatorname{arccotgh} \left(\frac{x^4}{6} \right) + c$, com $c \in \mathbb{R}$)

Observação 7

Seja $m \in \mathbb{N}$. Se f_1, f_2, \dots, f_m são m funções primitiváveis num intervalo I , então qualquer combinação linear $k_1 f_1 + \dots + k_m f_m$, (com $k_1, \dots, k_m \in \mathbb{R}$), também é primitivável em I , tendo-se

$$\int (k_1 f_1 + \dots + k_m f_m) dx = k_1 \int f_1 dx + \dots + k_m \int f_m dx.$$

Exemplo 30

$$\begin{aligned}& \int \left(\frac{x^2}{1+x^3} + \frac{x}{\sqrt{4+x^2}} \right) dx = \\&= \int \frac{x^2}{1+x^3} dx + \int \frac{x}{\sqrt{4+x^2}} dx = \\&= \frac{1}{3} \int \frac{3x^2}{1+x^3} dx + \int x(4+x^2)^{-\frac{1}{2}} dx = \\&= \frac{1}{3} \ln |1+x^3| + \frac{1}{2} \int 2x(4+x^2)^{-\frac{1}{2}} dx = \\&= \frac{1}{3} \ln |1+x^3| + \frac{1}{2} \frac{(4+x^2)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c = \\&= \frac{1}{3} \ln |1+x^3| + \sqrt{4+x^2} + c\end{aligned}$$

PRIMITIVAÇÃO POR PARTES

Maria do Carmo Martins

Dezembro de 2013

O **Método de Primitivação por partes** é o método de primitivação do produto.

Este método geral é consequência imediata da regra de derivação do produto. Sendo f e g duas funções diferenciáveis no intervalo I , sabemos que

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

Sendo o primeiro membro integrável em I , se algum dos produtos do segundo membro for primitivável o outro também será.

Teorema - Fórmula do método de primitivação por partes

Sejam f e g são funções diferenciáveis no intervalo I . Então o produto $f'g$ é primitivável em I se, e só se, fg' o for, tendo-se

$$\int f'(x)g(x) \, dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) \, dx.$$

Observação

Na prática procura-se decompor a função a primitivar num produto de dois fatores, em que um dos quais, pelo menos, é necessário saber primitivar (esse fator corresponde à função f'). Este método resulta se soubermos também primitivar o produto fg' .

Exemplo 1

$$P = \int \underbrace{x \ln x} \quad dx$$
$$\begin{array}{ll} f' = x & f = \frac{x^2}{2} \\ g = \ln x & g' = \frac{1}{x} \end{array}$$

$$\begin{aligned} P &= \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{1}{x} \frac{x^2}{2} dx = \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + c \end{aligned}$$

Exemplo 2

$$P = \int \underbrace{x e^x}_{\substack{f' = e^x \quad f = e^x \\ g = x \quad g' = 1}} dx$$

$$\begin{aligned} P &= x e^x - \int e^x dx = \\ &= x e^x - e^x + c = \\ &= e^x(x - 1) + c \end{aligned}$$

Exemplo 3

$$P = \int \ln x \, dx = \int \underbrace{1 \times \ln x}_{\substack{f' = 1 \quad f = x \\ g = \ln x \quad g' = \frac{1}{x}}} \, dx$$

$$\begin{aligned} P &= x \ln x - \int \frac{1}{\cancel{x}} \cancel{x} \, dx = \\ &= x \ln x - \int dx = \\ &= x \ln x - x + c. \end{aligned}$$

Exemplo 4

$$P = \int \operatorname{arctg} x \, dx = \int \underbrace{1 \times \operatorname{arctg} x}_{\substack{f' = 1 \quad f = x \\ g = \operatorname{arctg} x \quad g' = \frac{1}{1+x^2}}} \, dx$$

$$\begin{aligned} P &= x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2} \, dx = \\ &= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} \, dx = \\ &= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c = \\ &= x \operatorname{arctg} x - \ln \sqrt{1+x^2} + c \end{aligned}$$

Exemplo 5

$$P = \int \underbrace{x^3 e^x}_{\substack{f' = e^x \quad f = e^x \\ g = x^3 \quad g' = 3x^2}} dx$$

$$\begin{aligned} P &= x^3 e^x - \int 3x^2 e^x dx = \\ &= x^3 e^x - 3 \int \underbrace{x^2 e^x}_{\substack{f' = e^x \quad f = e^x \\ g = x^2 \quad g' = 2x}} dx \end{aligned}$$

$$P = x^3 e^x - 3 \left[x^2 e^x - 2 \int x e^x dx \right]$$

Exemplo 5 - continuação

$$P = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6 \int \underbrace{x e^x}_{\substack{f' = e^x \quad f = e^x \\ g = x \quad g' = 1}} dx$$

$$\begin{aligned} P &= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6 \left[x e^x - \int e^x dx \right] = \\ &= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x e^x - 6e^x + c. \end{aligned}$$

Exemplo 6

$$P = \int \underbrace{e^x \cos x}_{\substack{f' = \cos x \quad f = \sin x \\ g = e^x \quad g' = e^x}} \, dx$$

$$\begin{aligned} P &= e^x \sin x - \int \underbrace{e^x \sin x}_{\substack{f' = \sin x \quad f = -\cos x \\ g = e^x \quad g' = e^x}} \, dx = \\ &= e^x \sin x - \left[-e^x \cos x - \int -e^x \cos x \, dx \right] = \\ &= e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x \, dx. \end{aligned}$$

Exemplo 6 - continuação

Assim, tem-se

$$\begin{aligned}\int e^x \cos x \, dx &= e^x(\sin x + \cos x) - \int e^x \cos x \, dx \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2 \int e^x \cos x \, dx &= e^x(\sin x + \cos x) + c_1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \int e^x \cos x \, dx &= \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + c.\end{aligned}$$

Exemplo 7

$$P = \int \sin^2 x \, dx = \int \underbrace{\sin x \sin x} \, dx$$
$$\begin{array}{ll} f' = \sin x & f = -\cos x \\ g = \sin x & g' = \cos x \end{array}$$

$$\begin{aligned} P &= -\sin x \cos x - \int -\cos x \cos x \, dx = \\ &= -\sin x \cos x + \int \cos^2 x \, dx = \\ &= -\sin x \cos x + \int (1 - \sin^2 x) \, dx = \\ &= -\sin x \cos x + x - \int \sin^2 x \, dx. \end{aligned}$$

Exemplo 7 - continuação

Tem-se então

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \, dx &= -\sin x \cos x + x - \int \sin^2 x \, dx \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2 \int \sin^2 x \, dx &= -\sin x \cos x + x + c_1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \int \sin^2 x \, dx &= -\frac{1}{2} \sin x \cos x + \frac{x}{2} + c \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \int \sin^2 x \, dx &= -\frac{1}{4} \sin(2x) + \frac{x}{2} + c.\end{aligned}$$

Observação

Notemos que o exemplo anterior pode ser resolvido da forma:

①

$$\int \sin^2 x \, dx = \int \underbrace{1 \cdot \sin^2 x}_{\substack{f' = 1 \quad f = x \\ g = \sin^2 x \quad g' = 2 \sin x \cos x}} \, dx = \dots$$

② $\int \sin^2 x \, dx = \int \frac{1 - \cos(2x)}{2} \, dx = \dots$

Exemplo 8

Sendo $n \in \mathbb{N}$, com $n \geq 2$, calcule $\int \cos^n x \, dx$.

$$P = \int \cos^n x \, dx = \int \underbrace{\cos^{n-1} x}_{\substack{f' = \cos x \\ g = \cos^{n-1} x}} \underbrace{\cos x}_{\substack{f = \sin x \\ g' = -(n-1) \cos^{n-2} \sin x}} \, dx$$

$$\begin{aligned} P &= \cos^{n-1} x \sin x - \int (n-1) \cos^{n-2} x (-\sin x) \sin x \, dx = \\ &= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int \cos^{n-2} x \sin^2 x \, dx = \\ &= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int \cos^{n-2} x (1 - \cos^2 x) \, dx \end{aligned}$$

continuação do exemplo 8

$$P = \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int \cos^{n-2} x \, dx - (n-1) \int \cos^n x \, dx$$

Assim, tem-se:

$$\begin{aligned} \int \cos^n x \, dx &= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int \cos^{n-2} x \, dx - \\ &\quad - (n-1) \int \cos^n x \, dx \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow n \int \cos^n x \, dx &= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int \cos^{n-2} x \, dx \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \int \cos^n x \, dx &= \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \int \cos^{n-2} x \, dx \end{aligned}$$

Alguns critérios para a escolha de f' e g

Função	f'	g
$f(x) e^x$	e^x	$f(x)$
$f(x) \operatorname{sen} x$	$\operatorname{sen} x$	$f(x)$
$f(x) \operatorname{cos} x$	$\operatorname{cos} x$	$f(x)$
$f(x) \operatorname{arctg} x$	$f(x)$	$\operatorname{arctg} x$
$f(x) \log x$	$f(x)$	$\log x$

Exercícios propostos:

Calcule:

$$\textcircled{1} \int \frac{x \arcsen x}{\sqrt{1-x^2}} dx;$$

$$\textcircled{2} \int x \sen^2\left(\frac{x}{2}\right) dx;$$

$$\textcircled{3} \int \sen x \cos(3x) dx;$$

$$\textcircled{4} \int (1-x)e^{1+2x} dx;$$

$$\textcircled{5} \int e^{-x} \sen(3x) dx.$$

REGRAS PRÁTICAS PARA PRIMITIVAR POTÊNCIAS de FUNÇÕES CIRCULARES e HIPERBÓLICAS

Maria do Carmo Martins

Dezembro 2013

Potências pares de $\sin x$, $\cos x$, $\sinh x$ ou $\cosh x$

Passa-se para o ângulo duplo através das fórmulas:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

$$\sinh^2 x = \frac{\cosh(2x) - 1}{2}$$

$$\cosh^2 x = \frac{\cosh(2x) + 1}{2}$$

Exercício 1

Calcule:

① $\int \cos^2(4x) \, dx$

② $\int \sinh^4(6x) \, dx$

Resolução do exercício 1.1

$$\begin{aligned}\int \cos^2(4x) \, dx &= \\&= \int \frac{1 + \cos(8x)}{2} \, dx = \\&= \int \frac{1}{2} \, dx + \frac{1}{2} \int \cos(8x) \, dx = \\&= \frac{x}{2} \, dx + \frac{1}{2 \times 8} \int 8 \cos(8x) \, dx = \\&= \frac{x}{2} \, dx + \frac{1}{16} \sin(8x) + c\end{aligned}$$

Potências ímpares de $\sin x$, $\cos x$, $\sinh x$ ou $\cosh x$

Destaca-se uma unidade à potência ímpar e o fator resultante passa-se para a co-função através das fórmulas:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Exercício 2

Calcule:

① $\int \operatorname{sen}^3 x \, dx$

② $\int \cosh^5 x \, dx$

Resolução do Exercício 2.1

$$\begin{aligned} & \int \sin^3 x \, dx = \\ &= \int \sin x \sin^2 x \, dx = \\ &= \int \sin x (1 - \cos^2 x) \, dx = \\ &= \int \sin x \, dx + \int \underbrace{-\sin x}_{f'} \underbrace{\cos^2 x}_{f^m} \, dx = \\ &= -\cos x + \frac{\cos^{2+1} x}{2+1} + c = \\ &= -\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x + c \end{aligned}$$

Potências pares ou ímpares de $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$, $\operatorname{tgh} x$ ou $\operatorname{cotgh} x$

Destaca-se $\operatorname{tg}^2 x$, $\operatorname{cotg}^2 x$, $\operatorname{tgh}^2 x$ ou $\operatorname{cotgh}^2 x$ e aplica-se uma das fórmulas:

$$\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$$

$$\operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x - 1$$

$$\operatorname{tgh}^2 x = 1 - \operatorname{sech}^2 x$$

$$\operatorname{cotgh}^2 x = 1 + \operatorname{cosech}^2 x$$

Exercício 3

Calcule:

1 $\int \operatorname{tg}^3 x \, dx$

2 $\int \operatorname{cotg}^3 x \, dx$

3 $\int \operatorname{tgh}^4 x \, dx$

4 $\int \operatorname{cotgh}^4 x \, dx$

Resolução do Exercício 3.1

$$\begin{aligned} & \int \operatorname{tg}^3 x \, dx = \\ &= \int \operatorname{tg}^2 x \operatorname{tg} x \, dx = \\ &= \int (\sec^2 x - 1) \operatorname{tg} x \, dx = \\ &= \int \underbrace{\sec^2 x}_{f'} \underbrace{\operatorname{tg} x}_{fm} \, dx - \int \operatorname{tg} x \, dx = \\ &= \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \int \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x} \, dx = \\ &= \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \ln |\cos x| + c \end{aligned}$$

Potências pares de $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$, $\operatorname{sech} x$ ou $\operatorname{cosech} x$

Destaca-se $\sec^2 x$, $\operatorname{cosec}^2 x$, $\operatorname{sech}^2 x$ ou $\operatorname{cosech}^2 x$ e ao fator resultante aplica-se uma das fórmulas:

$$\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$$

$$\operatorname{cosec}^2 x = 1 + \operatorname{cotg}^2 x$$

$$\operatorname{sech}^2 x = 1 - \operatorname{tgh}^2 x$$

$$\operatorname{cosech}^2 x = \operatorname{cotgh}^2 x - 1$$

Exercício 4

Calcule:

① $\int \operatorname{cosec}^4 x \, dx$

② $\int \operatorname{sech}^4 x \, dx$

Resolução do Exercício 4.1

$$\begin{aligned} & \int \operatorname{cosec}^4 x \, dx = \\ &= \int \operatorname{cosec}^2 x \operatorname{cosec}^2 x \, dx = \\ &= \int (1 + \cot^2 x) \operatorname{cosec}^2 x \, dx = \\ &= \int \operatorname{cosec}^2 x \, dx + \underbrace{\int \cot^2 x}_{f^m} \operatorname{cosec}^2 x \, dx = \\ &= \int \operatorname{cosec}^2 x \, dx - \underbrace{\int \cot^2 x}_{f^m} \underbrace{(-\operatorname{cosec}^2 x)}_{f'} \, dx = \\ &= -\cot x \, dx - \frac{\cot^3 x}{3} + c \end{aligned}$$

Potências ímpares de $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$, $\operatorname{sech} x$ ou $\operatorname{cosech} x$

Destaca-se $\sec^2 x$, $\operatorname{cosec}^2 x$, $\operatorname{sech}^2 x$ ou $\operatorname{cosech}^2 x$ e primitiva-se por partes começando por este fator.

Exercício 5

Calcule:

① $\int \sec^3 x \, dx$

② $\int \operatorname{cosech}^3 x \, dx$

Resolução do Exercício 5.1

$$\begin{aligned} & \int \sec^3 x \, dx = \\ &= \int \underbrace{\sec^2 x}_{\text{PPP}} \sec x \, dx = \\ & \quad f' = \sec^2 x \quad f = \operatorname{tg} x \\ & \quad g = \sec x \quad g' = \sec x \operatorname{tg} x \\ &= \sec x \operatorname{tg} x - \int \sec x \operatorname{tg} x \operatorname{tg} x \, dx = \\ &= \sec x \operatorname{tg} x - \int \sec x \operatorname{tg}^2 x \, dx = \\ &= \sec x \operatorname{tg} x - \int \sec x (\sec^2 x - 1) \, dx = \end{aligned}$$

Continuação da resolução do Exercício 5.1

$$\begin{aligned} &= \sec x \operatorname{tg} x - \int (\sec^3 x - \sec x) dx = \\ &= \sec x \operatorname{tg} x - \int \sec^3 x dx + \int \sec x dx = \\ &= \sec x \operatorname{tg} x - \int \sec^3 x dx + \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| + c_1 \end{aligned}$$

Tem-se então:

$$\begin{aligned} \int \sec^3 x dx &= \sec x \operatorname{tg} x - \int \sec^3 x dx + \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| + c_1 \\ 2 \int \sec^3 x dx &= \sec x \operatorname{tg} x + \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| + c_1 \\ \int \sec^3 x dx &= \frac{1}{2} \sec x \operatorname{tg} x + \frac{1}{2} \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| + c \end{aligned}$$

PRIMITIVAÇÃO de FUNÇÕES RACIONAIS

Maria do Carmo Martins

Dezembro de 2013

Função racional

Definição

Chama-se função racional a toda a função do tipo

$$\frac{D(x)}{d(x)}$$

em que $D(x)$ e $d(x)$ são dois polinómios, sendo $d(x)$ não identicamente nulo.

*Uma função deste tipo diz-se **própria** se o grau do numerador for inferior ao do denominador. Caso contrário diz-se **imprópria**.*

Quando a função é imprópria

Se $\frac{D(x)}{d(x)}$ for uma função imprópria, isto é, se o grau do numerador for maior ou igual ao do denominador, efetua-se a divisão, vindo

$$D(x) = d(x)Q(x) + r(x).$$

Assim,

$$\frac{D(x)}{d(x)} = Q(x) + \frac{r(x)}{d(x)},$$

sendo $Q(x)$ um polinómio facilmente primitivável.

Quando a função é própria

Quanto a $\frac{r(x)}{d(x)}$, que é uma função própria, temos duas alternativas:

- ou podemos primitivá-la imediatamente,

Exemplo:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3}{x^2 + 1} dx &= \int \left(x - \frac{x}{x^2 + 1} \right) dx = \\ &= \int x dx - \int \frac{x}{x^2 + 1} dx = \\ &= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + c.\end{aligned}$$

- ou temos que a decompor (situação esta que abordaremos em pormenor seguidamente).

Decomposição de Funções Racionais Próprias

Sendo $\frac{r(x)}{d(x)}$ uma função racional própria, esta pode decompor-se numa soma de “frações simples” (sendo a decomposição única), cujos denominadores são divisores de $d(x)$.

Podemos considerar os seguintes casos:

- 1 $d(x)$ admite apenas raízes reais simples.
- 2 $d(x)$ admite raízes reais múltiplas.
- 3 $d(x)$ admite raízes reais e imaginárias (simples ou múltiplas).

Raízes reais simples

Consideremos $d(x)$ um polinómio de grau n com coeficientes reais e sejam x_1, x_2, \dots, x_n , n raízes reais distintas. Então,

$$d(x) = a_0 (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n).$$

Assim,

$$\frac{r(x)}{d(x)} = \frac{r(x)}{a_0(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)}.$$

A fração $\frac{r(x)}{d(x)}$ decompõe-se em n frações (tantas quantas as raízes) onde os numeradores são constantes a determinar e cujos denominadores são os fatores da decomposição.

Raízes reais simples - continuação

Tem-se portanto,

$$\begin{aligned}\frac{r(x)}{d(x)} &= \frac{1}{a_0} \frac{r(x)}{(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)} \\ &= \frac{1}{a_0} \left(\underbrace{\frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{x - x_2} + \cdots + \frac{A_n}{x - x_n}}_{n \text{ frações}} \right).\end{aligned}$$

A determinação dos coeficientes A_1, A_2, \dots, A_n poderá ser feita pelo **Método dos coeficientes indeterminados** ou pela **regra do “tapa”**.

Exercício 1

Calcule

$$\int \frac{x}{x^2 - 5x + 6} dx.$$

Raízes reais múltiplas

Consideremos $\frac{r(x)}{d(x)}$, onde $d(x) = a_0(x-a)^\alpha(x-b)^\beta$ com a e b reais. Nesta decomposição de $d(x)$ em fatores, a e b são raízes reais do polinómio, com graus de multiplicidade α e β respetivamente.

Neste caso, a fração irá decompor-se na seguinte forma:

$$\frac{r(x)}{d(x)} = \frac{1}{a_0} \left(\underbrace{\frac{A_0}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \cdots + \frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)}}_{\alpha \text{ frações}} + \underbrace{\frac{B_0}{(x-b)^\beta} + \frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}} + \cdots + \frac{B_{\beta-1}}{(x-b)}}_{\beta \text{ frações}} \right)$$

Raízes reais múltiplas - continuação

onde os coeficientes

$$A_0, A_1, \dots, A_{\alpha-1}, B_0, B_1, \dots, B_{\beta-1}$$

irão ser determinados pelo **Método dos coeficientes de Taylor** (regra do “Tapa” generalizado).

Caso de uma raiz real múltipla

Vejamos o caso $x = a$ ser raiz real com grau de multiplicidade α :

$$A_0 = \left[\frac{r(x)}{d_1(x)} \right]_{x=a}$$

$$A_1 = \frac{1}{1!} \left[\frac{r(x)}{d_1(x)} \right]'_{x=a}$$

$$A_2 = \frac{1}{2!} \left[\frac{r(x)}{d_1(x)} \right]''_{x=a}$$

\vdots

onde $d_1(x)$ é a expressão que se obtém ao suprimir a $d(x)$ a expressão (fator) $(x - a)^\alpha$.

Exercício 2

Calcule

$$\int \frac{2x^3 + 5x^2 + 6x + 2}{x(x+1)^3} dx.$$

Raízes reais ou imaginárias simples ou múltiplas

Seja $\frac{r(x)}{d(x)}$, com $d(x)$ um polinómio da forma

$$d(x) = a_0(x - a)^\alpha(x - b)^\beta(x^2 + px + q)^\gamma(x^2 + sx + t)^\delta.$$

Nesta decomposição em fatores de $d(x)$:

- a e b são as raízes reais do polinómio, com graus de multiplicidade α e β respetivamente;
- $(x^2 + px + q)$ e $(x^2 + sx + t)$ só admitem raízes complexas com graus de multiplicidade γ e δ respetivamente.
- a_0 é o coeficiente do termo de maior grau de $d(x)$

Então a fração $\frac{r(x)}{d(x)}$ irá decompôr-se em:

Raízes reais ou imaginárias simples ou múltiplas - continuação

$$\begin{aligned}\frac{r(x)}{d(x)} = & \frac{1}{a_0} \left(\frac{A_0}{(x-a)^{\alpha}} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \dots + \frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)} + \right. \\ & + \frac{B_0}{(x-b)^{\beta}} + \frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}} + \dots + \frac{B_{\beta-1}}{(x-b)} + \\ & + \frac{P_0x + Q_0}{(x^2 + px + q)^{\gamma}} + \dots + \frac{P_{\gamma-1}x + Q_{\gamma-1}}{x^2 + px + q} + \\ & \left. + \frac{S_0x + T_0}{(x^2 + sx + t)^{\delta}} + \dots + \frac{S_{\delta-1}x + T_{\delta-1}}{x^2 + sx + t} \right)\end{aligned}$$

Determinação dos coeficientes

Efetuada o segundo membro da igualdade anterior obteríamos uma fração cujo denominador seria $d(x)$. Obrigando o numerador a ser igual a $r(x)$, determinaríamos as constantes

$$A_0, A_1, \dots, A_{\alpha-1},$$

$$B_0, B_1, \dots, B_{\beta-1},$$

$$P_0, P_1, \dots, P_{\gamma-1}, Q_0, Q_1, \dots, Q_{\gamma-1},$$

$$S_0, S_1, \dots, S_{\delta-1}, T_0, T_1, \dots, T_{\delta-1}$$

pelo **Método dos coeficientes indeterminados**.

- Note-se que, quando os denominadores das frações correspondem a raízes reais, o numerador é sempre uma constante.
- Por sua vez, quando se trata de frações com denominadores correspondentes a raízes complexas, o numerador é um polinómio do primeiro grau.

Exercício 3

Calcule

$$\int \frac{1}{x^3 + x} dx$$

Exercício 4

Calcule:

$$\textcircled{1} \int \frac{3x^2}{x^4 + 5x^2 + 4} dx;$$

$$\textcircled{2} \int \frac{x^2 - x}{x^4 + 3x^2 + 2} dx;$$

$$\textcircled{3} \int \frac{x}{(x-1)(x+1)^2} dx;$$

$$\textcircled{4} \int \frac{2x^2 + 4x + 1}{x^3 + 2x^2 + x} dx;$$

$$\textcircled{5} \int \frac{x - 2x^2 - 9}{2x^3 + 3x} dx;$$

$$\textcircled{6} \int \frac{8x^2 + x + 1}{x^3 - x} dx.$$

PRIMITIVAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO

Maria do Carmo Martins

Dezembro 2013

Introdução

Quando a integração imediata não é possível pode-se, muitas vezes, submeter a função que se deseja integrar a transformações algébricas que, efectuadas permitem utilizar os integrais imediatos. São de uma grande variedade e torna-se impossível exemplificar todos os casos. Só a muita prática de cálculo fará ver qual a transformação aconselhada para cada caso.

Mudança de variável

Por vezes, para determinar $\int f(x) dx$ convém considerar x como uma função de outra variável, digamos t .

Deste modo o integrando passa a ser uma função de t que poderá ser mais simples de primitivar do que a função f inicialmente dada.

Suponhamos que pretendemos determinar $\int f(x) dx$ no domínio D onde f está definida.

Seja ainda $g : \tilde{D} \rightarrow D$ com $x = g(t)$, uma função derivável e invertível com inversa $\theta : D \rightarrow \tilde{D}$.

Então:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(g(t)) \\ dx &= dg(t) = g'(t) dt \end{aligned}$$

Mudança de variável - continuação

Deste modo,

$$\int f(x) dx = \int \underbrace{f(g(t))}_{=g(t)} g'(t) dt$$

A nova função integranda é pois $g(t) = f(g(t)) g'(t)$.

Se G for uma primitiva de g , teremos

$$\int f(x) dx = \int g(t) dt = G(t) + k, \quad k \in \mathbb{R},$$

onde $t = g^{-1}(x) = \theta(x)$. Isto é,

$$\int f(x) dx = \int g(t) dt = G(\theta(x)) + k.$$

Exercício 1

Considere o integral

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

- a) Resolva-o pela primitivação imediata.
- b) Calcule-o recorrendo ao método de substituição.
- c) Indique uma outra substituição diferente da alínea anterior.

Exercício 2

Calcule

$$\int \frac{\sqrt{x-4}}{x} dx$$

recorrendo ao método de substituição.

Exercício 3

Considere o integral

$$\int x\sqrt{x^2 + 1} \, dx.$$

- a) Resolva-o pela primitivação imediata.
- b) Calcule-o recorrendo ao método de substituição.
- c) Indique uma uma outra substituição diferente da alínea anterior.

Exercício 4

Considere o integral

$$\int \sqrt{1 - x^2} \, dx.$$

- a) Calcule-o recorrendo ao método de substituição.
- b) Indique duas outras substituições possíveis.

Exercício 5

Considere o integral

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx.$$

- a) Calcule-o recorrendo ao método de substituição.
- b) Indique duas outras substituições possíveis.

Exercício 6

Considere o integral

$$\int \sqrt{a^2 + x^2} \, dx.$$

- a) Calcule-o recorrendo ao método de substituição.
- b) Indique duas outras substituições possíveis.

Exercício 7

Considere o integral

$$\int \sqrt{x^2 - a^2} \, dx.$$

- a) Calcule-o recorrendo ao método de substituição.
- b) Indique duas outras substituições possíveis.

Exercício 8

Considere o integral

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x^3} dx.$$

- a) Calcule-o recorrendo ao método de substituição.
- b) Indique uma outra substituição possível.

Exercício 9

Calcule o integral

$$\int \sqrt{1 - \frac{1}{x}} dx$$

recorrendo ao método de substituição.

Exercício 10

Calcule o integral

$$\int \frac{1}{(x^2 + 2)^2} dx$$

recorrendo ao método de substituição.

Exercício 11

Calcule o integral

$$\int \frac{x+1}{(x-2)[(x-2)^2+1]^2} dx$$

recorrendo ao método de substituição.

Exercício 12

Calcule o integral

$$\int \frac{x^3}{x^8 + 4} dx$$

recorrendo ao método de substituição.

Exercício 13

Calcule o integral

$$\int \frac{5^x}{5^{3x} + 5^{-x}} dx$$

recorrendo ao método de substituição.

Exercício 14

Calcule o integral

$$\int \frac{1 + \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}{1 - \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}} dx$$

recorrendo ao método de substituição.

Exercício 15

Calcule o integral

$$\int \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt[3]{x+2}+1} dx$$

recorrendo ao método de substituição.

Exercício 16

Calcule o integral

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 9}} dx$$

recorrendo ao método de substituição.

Exercício 17

Calcule o integral

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x - x^2}} dx$$

recorrendo ao método de substituição.

Exercício 18

Calcule o integral

$$\int \frac{1}{1 + x^{\frac{1}{3}}} dx$$

recorrendo ao método de substituição.

Exercício 19

Considere o integral

$$\int \frac{x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{2}}} dx.$$

- a) Resolva-o pela primitivação imediata.
- b) Calcule-o recorrendo ao método de substituição.

Exercício 20

Considere o integral

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{2 - \operatorname{sen}^2 x} dx.$$

- a) Resolva-o pela primitivação imediata.
- b) Calcule-o recorrendo ao método de substituição.

Exercício 21

Calcule o integral

$$\int \frac{2 \operatorname{sen} x \cos x}{(2 + \operatorname{sen} x)^2} dx$$

recorrendo ao método de substituição.

Exercício 22

Calcule o integral

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x + \cos x - 2} dx$$

recorrendo ao método de substituição.

Exercício 23

Calcule o integral

$$\int \frac{\cos x}{5 + 4 \cos x} dx$$

recorrendo ao método de substituição.

Exercício 24

Considere o integral

$$\int \frac{\sinh x}{1 + \cosh x} dx.$$

- a) Calcule-o recorrendo ao método de substituição.
- b) Indique uma outra substituição possível.

Exercício 25

Calcule o integral

$$\int \frac{\sinh x}{1 - \sinh^2 x} dx$$

recorrendo ao método de substituição.

Exercício 26

Calcule o integral

$$\int \frac{1 + \log x}{(1 - \log x)x} dx$$

recorrendo ao método de substituição.

Tabela de Integrais

Sendo $c \in \mathbb{R}$, tem-se:

1. $\int dx = x + c$
2. $\int f^m(x) f'(x) dx = \frac{f^{m+1}(x)}{m+1} + c, \quad \text{para } m \neq -1$
3. $\int a^{f(x)} f'(x) \ln a \, dx = a^{f(x)} + c, \quad a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$
4. $\int e^{f(x)} f'(x) \, dx = e^{f(x)} + c$
5. $\int \frac{f'(x)}{f(x) \ln a} dx = \log_a |f(x)| + c, \quad a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \text{ e } f(x) \neq 0$
6. $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c, \quad f(x) \neq 0$

Funções Circulares Diretas

7. $\int f'(x) \cos(f(x)) \, dx = \operatorname{sen}(f(x)) + c$
8. $\int f'(x) \operatorname{sen}(f(x)) \, dx = -\cos(f(x)) + c$
9. $\int f'(x) \sec^2(f(x)) \, dx = \operatorname{tg}(f(x)) + c$
10. $\int f'(x) \operatorname{cosec}^2(f(x)) \, dx = -\operatorname{cotg}(f(x)) + c$
11. $\int f'(x) \sec(f(x)) \operatorname{tg}(f(x)) \, dx = \sec(f(x)) + c$
12. $\int f'(x) \operatorname{cosec}(f(x)) \operatorname{cotg}(f(x)) \, dx = -\operatorname{cosec}(f(x)) + c$

$$13. \int f'(x) \operatorname{tg}(f(x)) dx = \int \frac{f'(x) \operatorname{sen}(f(x))}{\cos(f(x))} dx = -\ln |\cos(f(x))| + c$$

$$14. \int f'(x) \operatorname{cotg}(f(x)) dx = \int \frac{f'(x) \cos(f(x))}{\operatorname{sen}(f(x))} dx = \ln |\operatorname{sen}(f(x))| + c$$

15.

$$\begin{aligned} \int f'(x) \sec(f(x)) dx &= \ln |\sec(f(x)) + \operatorname{tg}(f(x))| + c \\ &= \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{f(x)}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + c \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \operatorname{sen}(f(x))}{1 - \operatorname{sen}(f(x))} \right| + c \\ &= \operatorname{arccosh}(\sec(f(x))) + c \end{aligned}$$

16.

$$\begin{aligned} \int f'(x) \operatorname{cosec}(f(x)) dx &= \ln |\operatorname{cosec}(f(x)) - \operatorname{cotg}(f(x))| + c \\ &= \ln \left| \operatorname{tg} \frac{f(x)}{2} \right| + c \\ &= -\operatorname{arccosh}(\operatorname{cosec}(f(x))) + c \end{aligned}$$

Funções Hiperbólicas Diretas

$$17. \int f'(x) \cosh(f(x)) dx = \sinh(f(x)) + c$$

$$18. \int f'(x) \sinh(f(x)) dx = \cosh(f(x)) + c$$

$$19. \int f'(x) \operatorname{sech}^2(f(x)) dx = \operatorname{tgh}(f(x)) + c$$

$$20. \int f'(x) \operatorname{cosech}^2(f(x)) dx = -\operatorname{cotgh}(f(x)) + c$$

$$21. \int f'(x) \operatorname{sech}(f(x)) \operatorname{tgh}(f(x)) dx = -\operatorname{sech}(f(x)) + c$$

$$22. \int f'(x) \operatorname{cosech}(f(x)) \operatorname{cotgh}(f(x)) dx = -\operatorname{cosech}(f(x)) + c$$

$$23. \int f'(x) \operatorname{tgh}(f(x)) dx = \int \frac{f'(x) \sinh(f(x))}{\cosh(f(x))} dx = \ln |\cosh(f(x))| + c$$

$$24. \int f'(x) \operatorname{cotgh}(f(x)) dx = \int \frac{f'(x) \cosh(f(x))}{\sinh(f(x))} dx = \ln |\sinh(f(x))| + c$$

25.

$$\begin{aligned} \int f'(x) \operatorname{sech}(f(x)) dx &= \operatorname{arctg}(\sinh(f(x))) + c \\ &= 2 \operatorname{arctg}(e^{f(x)}) + c \\ &= \operatorname{arcsen}(\operatorname{tgh}(f(x))) + c \\ &= -2 \operatorname{arctg}(e^{-f(x)}) + c \end{aligned}$$

26.

$$\begin{aligned} \int f'(x) \operatorname{cosech}(f(x)) dx &= \ln |\operatorname{cosech}(f(x)) - \operatorname{cotgh}(f(x))| + c \\ &= \ln \left| \frac{e^{f(x)} - 1}{e^{f(x)} + 1} \right| + c \\ &= \ln \left| \operatorname{tgh} \frac{f(x)}{2} \right| + c \\ &= -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cosh(f(x)) + 1}{\cosh(f(x)) - 1} \right| + c \\ &= -2 \operatorname{arccotgh}(e^{f(x)}) + c \end{aligned}$$

Funções Circulares Inversas

27.

$$\begin{aligned}\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}} dx &= \arcsen(f(x)) + c \\ &= -\arccos(f(x)) + c\end{aligned}$$

28.

$$\begin{aligned}\int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)} dx &= \arctg(f(x)) + c \\ &= -\operatorname{arccotg}(f(x)) + c\end{aligned}$$

Funções Hiperbólicas Inversas

29. $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}} dx = \operatorname{arcsenh}(f(x)) + c$

30. $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f^2(x)-1}} dx = \operatorname{arccosh}(f(x)) + c$

31.

$$\begin{aligned}\int \frac{f'(x)}{1-f^2(x)} dx &= \operatorname{arctgh}(f(x)) + c \\ &= \operatorname{arccotgh}(f(x)) + c\end{aligned}$$

Outras

32. (Função racional)

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2 - a^2} &= \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c \\ &= -\frac{1}{a} \operatorname{arctgh} \left(\frac{x}{a} \right) + c \\ &= -\frac{1}{a} \operatorname{arccotgh} \left(\frac{x}{a} \right) + c\end{aligned}$$

33. (Função racional)

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{a^2 - x^2} &= \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right| + c \\ &= -\frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c\end{aligned}$$

34.

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} &= \operatorname{arcsenh} \left(\frac{x}{a} \right) + c \\ &= \ln \left(x + \sqrt{x^2 + a^2} \right) + c\end{aligned}$$

35.

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} &= \operatorname{arccosh} \left(\frac{x}{a} \right) + c \\ &= \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + c \\ &= -\ln \left| x - \sqrt{x^2 - a^2} \right| + c\end{aligned}$$

36.

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} &= \operatorname{arcsen} \left(\frac{x}{a} \right) + c \\ &= -\operatorname{arccos} \left(\frac{x}{a} \right) + c\end{aligned}$$

Tabela de Primitivação por Substituição

A notação $R(\dots)$ indica que se trata de uma função racional (envolvendo apenas somas, diferenças, produtos e quocientes) do que se encontra entre parêntesis.

Tipo de função	Substituição	Restrições
(1) $\frac{1}{(x^2 + a^2)^k}$	$x = a \operatorname{tg} t$	$k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$
(2) $\frac{P(x)}{(ax^2 + bx + c)^k}$	$ax + \frac{b}{2} = t$	$k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ $b^2 - 4ac < 0$ grau de $P \leq 2k$
(3) $\frac{P(x)}{((x-p)^2 + q^2)^k}$	$x = p + qt$	$k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ grau de $P \leq 2k$
(4) $\frac{x^{k-1}}{x^{2k} \pm a^2}$	$x^k = at$ ou $x^k = \operatorname{tg} t$	$k \in \mathbb{Q} \setminus \{1\}$
(5) $R(a^{rx}, a^{sx}, \dots)$	$a^{mx} = t$	$m = \operatorname{mdc}(r, s, \dots)$
(6) $R(\log_a x)$	$t = \log_a x$	
(7) $R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p}{q}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}, \dots\right)$	$\frac{ax+b}{cx+d} = t^m$	$m = \operatorname{mmc}(q, s, \dots)$
(8) $R\left(x, (ax+b)^{\frac{p}{q}}, (ax+b)^{\frac{r}{s}}, \dots\right)$	$ax+b = t^m$	$m = \operatorname{mmc}(q, s, \dots)$
(9) $R\left(x, x^{\frac{p}{q}}, x^{\frac{r}{s}}, \dots\right)$	$x = t^m$	$m = \operatorname{mmc}(q, s, \dots)$
(10) $R\left(a^{\frac{p}{q}x}, a^{\frac{r}{s}x}, \dots\right)$	$a^x = t^m$	$m = \operatorname{mmc}(q, s, \dots)$

	Tipo de função	Substituição	Restrições
(11)	$R\left(x, \sqrt{a^2 - b^2 x^2}\right)$	$x = \frac{a}{b} \operatorname{sen} t$ ou $x = \frac{a}{b} \cos t$ ou $x = \frac{a}{b} \operatorname{tgh} t$	
(12)	$R\left(x, \sqrt{a^2 + b^2 x^2}\right)$	$x = \frac{a}{b} \operatorname{tg} t$ ou $x = \frac{a}{b} \sinh t$	
(13)	$R\left(x, \sqrt{b^2 x^2 - a^2}\right)$	$x = \frac{a}{b} \sec t$ ou $x = \frac{a}{b} \cosh t$	
(14)	$R\left(x, \sqrt{x}, \sqrt{a - bx}\right)$	$x = \frac{a}{b} \operatorname{sen}^2 t$ ou $x = \frac{a}{b} \cos^2 t$	
(15)	$R\left(x, \sqrt{x}, \sqrt{a + bx}\right)$	$x = \frac{a}{b} \operatorname{tg}^2 t$	
(16)	$R\left(x, \sqrt{x}, \sqrt{bx - a}\right)$	$x = \frac{a}{b} \sec^2 t$	
(17)	$R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right)$	$\sqrt{ax^2 + bx + c} = x\sqrt{a} + t$	$a > 0$
(18)	$R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right)$	$\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt + \sqrt{c}$	$c > 0$
(19)	$x^m (a + bx^n)^{\frac{p}{q}}$	$a + bx^n = t^q$	$\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$
(20)	$x^m (a + bx^n)^{\frac{p}{q}}$	$a + bx^n = x^n t$	$\frac{m+1}{n} + \frac{p}{q} \in \mathbb{Z}$
(21)	$R(\operatorname{sen} x, \cos x)$	$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ então $\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}$ e $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$	

Tipo de função	Substituição	Restrições
(22) $R(\sin x, \cos x)$ com $R(u, w)$ uma função ímpar na variável u , isto é, $R(-u, w) = -R(u, w)$	$\cos x = t$	
(23) $R(\sin x, \cos x)$ com $R(u, w)$ uma função ímpar na variável w , isto é, $R(u, -w) = -R(u, w)$	$\sin x = t$	
(24) $R(\sin x, \cos x)$ com $R(u, w)$ uma função par nas variáveis u e w simultaneamente, isto é, $R(-u, -w) = R(u, w)$	$\operatorname{tg} x = t$	
(25) $R(\sin mx, \cos mx)$	$mx = t$	
(26) $R(e^x, \sinh x, \cosh x)$	$x = \log t$	
(27) $R(\sinh x, \cosh x)$	$\operatorname{tgh} \frac{x}{2} = t$ então $\sinh x = \frac{2t}{1-t^2}$ e $\cosh x = \frac{1+t^2}{1-t^2}$	
(28) $R(\sinh x, \cosh x)$ com $R(u, w)$ uma função ímpar na variável u , isto é, $R(-u, w) = -R(u, w)$	$\cosh x = t$	
(29) $R(\sinh x, \cosh x)$ com $R(u, w)$ uma função ímpar na variável w , isto é, $R(u, -w) = -R(u, w)$	$\sinh x = t$	
(30) $R(\sinh x, \cosh x)$ com $R(u, w)$ uma função par nas variáveis u e w simultaneamente, isto é, $R(-u, -w) = R(u, w)$	$\operatorname{tgh} x = t$	
(31) $R(\sinh mx, \cosh mx)$	$mx = t$	

INTEGRAL DEFINIDO

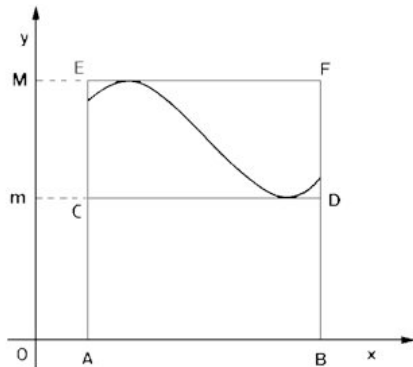
Maria do Carmo Martins

dezembro 2013

Somas de Darboux

Sejam f uma função limitada (não negativa) no intervalo $[a, b]$ e K o conjunto

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b \wedge 0 \leq y \leq f(x)\}.$$



Valor aproximado da área do conjunto K

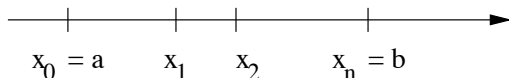
Sejam

- $M = \sup_{x \in [a,b]} f(x)$
- $m = \inf_{x \in [a,b]} f(x)$
- $\alpha(K)$ a área do conjunto K

Nestas condições tem-se

$$m(b-a) \leq \alpha(K) \leq M(b-a).$$

Uma melhor aproximação de $\alpha(K)$, obtém-se decompondo o intervalo $[a, b]$ num número finito (n) de subintervalos utilizando os pontos x_1, x_2, \dots, x_{n-1} , tais que: $x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1}$.



Decomposição do intervalo $[a, b]$

O conjunto discreto $D = \{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\}$ denomina-se por **decomposição de $[a, b]$** . O intervalo $[a, b]$ fica “decomposto” nos subintervalos

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n],$$

de diâmetros

$$\Delta x_0 = x_1 - x_0,$$

$$\Delta x_1 = x_2 - x_1,$$

$$\vdots$$

$$\Delta x_{n-1} = x_n - x_{n-1}.$$

O maior desses diâmetros—o **diâmetro da decomposição**—designa-se por $|D|$.

Valores aproximados da área do conjunto K

Sejam

$$\begin{aligned} \bullet \quad M_1 &= \sup_{x \in [x_0, x_1]} f, & m_1 &= \inf_{x \in [x_0, x_1]} f, \\ \bullet \quad M_2 &= \sup_{x \in [x_1, x_2]} f, & m_2 &= \inf_{x \in [x_1, x_2]} f, \\ & \vdots & & \vdots \\ \bullet \quad M_n &= \sup_{x \in [x_{n-1}, x_n]} f, & m_n &= \inf_{x \in [x_{n-1}, x_n]} f \end{aligned}$$

Os novos valores aproximados são:

$$m_1(x_1 - x_0) + \cdots + m_n(x_n - x_{n-1}) = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1})$$

$$M_1(x_1 - x_0) + \cdots + M_n(x_n - x_{n-1}) = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1})$$

Somas de Darboux

Definição

Sejam

- $I = [a, b]$ um intervalo fechado e limitado de \mathbb{R} ;
- f uma função definida e limitada em I ;
- D o conjunto formado por todas as decomposições do intervalo considerado;
- d uma decomposição do intervalo $[a, b]$;
- $n - 1$ o número de pontos da decomposição d ;
- M_i e m_i o supremo e o ínfimo da função f no intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

A cada decomposição $d \in D$ associamos dois números reais $S_d(f)$ e $s_d(f)$ que designamos por **somas de Darboux** da função f relativas à decomposição d definidos por

Relação entre as somas de Darboux e a área do conjunto k

$$s_d(f) = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) \quad (\text{soma inferior})$$

$$S_d(f) = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}) \quad (\text{soma superior})$$

A relação entre as somas de Darboux e $\alpha(K)$ é a seguinte:

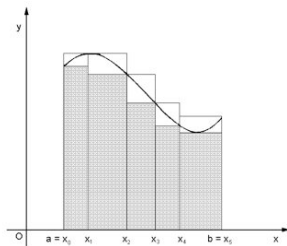
$$s_d < \alpha(K) < S_d.$$

Definição

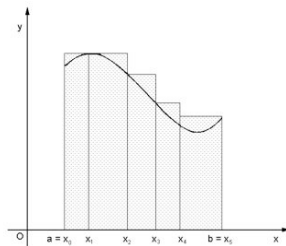
Sejam $d, d' \in D$ diremos que d' é **mais fina** do que d , se e só se, $d \subset d'$ (isto é, se pertencerem à decomposição d' todos os pontos da decomposição d).

Representação das somas de Darboux

Soma inferior de Darboux



Soma superior de Darboux



Relação entre as somas de Darboux para uma decomposição mais fina

Lema

Sejam

- S_d e s_d as somas superior e inferior da função f relativas a uma decomposição d do intervalo $[a, b]$;
- $S_{d'}$ e $s_{d'}$ as somas correspondentes da mesma função relativas a outra decomposição, d' , mais fina do que d .

Então, tem-se, necessariamente:

$$s_d \leq s_{d'} \leq S_{d'} \leq S_d.$$

Soma Integral

Sejam

- f uma função definida no intervalo $[a, b]$;
- $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, uma decomposição arbitrária (n intervalos);
- $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ tais que

$$x_1^* \in [x_0, x_1], \dots, x_n^* \in [x_{n-1}, x_n].$$

As áreas dos rectângulos construídos sobre estes intervalos são

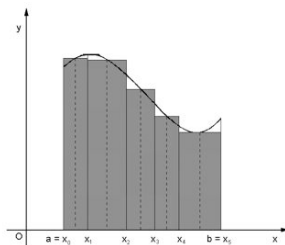
$$f(x_1^*)\Delta x_1, f(x_2^*)\Delta x_2, \dots, f(x_n^*)\Delta x_n$$

e a soma,

$$\sigma_d = \sum_{i=1}^n f(x_i^*)\Delta x_i$$

é conhecida por **soma integral**.

Representação da soma integral



Se a função é contínua e não negativa no intervalo $[a, b]$, então a **área** sob a curva $y = f(x)$ neste intervalo é definida por

$$A = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i.$$

Somas de Darboux vs. soma integral

Que relação existe entre as somas de Darboux e a soma integral?

$$m_i \leq f(x_i^*) \leq M_i$$

$$m_i \Delta x_i \leq f(x_i^*) \Delta x_i \leq M_i \Delta x_i$$

$$\sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$$

$$s_d \leq \sigma_d \leq S_d$$

Integral definido de uma função contínua

Definição

Se para cada decomposição d tal que $\max \Delta x_i \rightarrow 0$ o limite da soma σ_d , quando o número de divisões n tende para infinito, for o mesmo valor Σ , diz-se que f é **integrável no sentido de Riemann^a** em $[a, b]$.

O valor do limite comum a todas as decomposições, Σ , designa-se por **integral definido de f no intervalo $[a, b]$** e representa-se por

$$\Sigma = \int_a^b f(x) dx.$$

^aGeorg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866)

Da definição de integral definido, tem-se que:

$$\Sigma = \int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i,$$

onde

- f é a **função integranda**;
- x é a **variável de integração**;
- os números a e b são designados por **limites de integração inferior e superior** respectivamente.

Condição necessária de integrabilidade

Teorema

Se f é integrável em $[a, b]$, então f é limitada em $[a, b]$.

Condição necessária e suficiente de integrabilidade

Teorema

A função f é integrável no sentido de Riemann, se e só se, as somas de Darboux têm o mesmo limite.

Verifique se existem os integrais

① $\int_a^b r \, dx$;

② $\int_a^b f(x) \, dx$ sendo f a função definida por
$$\begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ -1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Classes de funções integráveis

Teorema

Toda a função contínua no intervalo $[a, b]$ é integrável, nesse intervalo, à Riemann.

Teorema

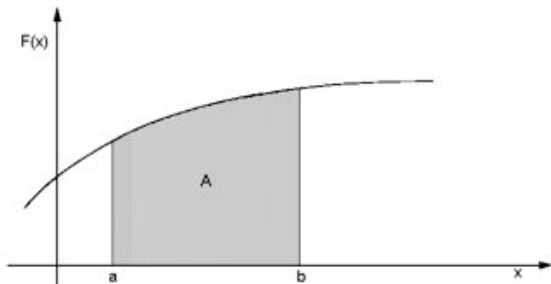
Toda a função monótona e limitada é integrável no sentido de Riemann.

Interpretação geométrica do conceito de integral

Se f é uma função contínua e não negativa no intervalo $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x) dx,$$

representa a área da região plana limitada por f , $x = a$, $x = b$ e pelo eixo Ox .



Exercício

- 1 Calcule $\int_a^b x \, dx$, com $0 < a < b$.
- 2 Sabendo que $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, calcule

$$\int_0^4 x^2 \, dx.$$

- ① Se $a = b$, então

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^a f(x) \, dx = 0$$

(este resultado está de acordo com a ideia intuitiva de que a área entre um ponto sobre o eixo Ox e a curva $y = f(x)$ é zero).

- ② O integral definido não depende da variável de integração, mas sim dos limites de integração e da função a integrar. Isto é,

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b f(u) \, du = \int_a^b f(z) \, dz$$

(a variável de integração é pois, uma variável *muda* ou *aparente*).

Propriedades do integral definido

- ① Se f é integrável em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x) \, dx = - \int_b^a f(x) \, dx;$$

- ② $\int_{-a}^{-b} f(x) \, dx = - \int_a^b f(x) \, dx$, desde que f seja uma função par;

- ③ $\int_{-a}^{-b} f(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx$, desde que f seja uma função ímpar;

Propriedades do integral definido

$$\textcircled{4} \int_a^b 1 \, dx = b - a;$$

$$\textcircled{5} \int_a^b c \, dx = c(b - a), c \in \mathbb{R};$$

$\textcircled{6}$ Se f é integrável em $[a, b]$, então

$$\int_a^b cf(x) \, dx = c \int_a^b f(x) \, dx;$$

Propriedades do integral definido

- 7 Sejam M e m o máximo e o mínimo, respectivamente, de f em $[a, b]$. Se f é integrável em $[a, b]$, então

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq M(b - a);$$

- 8 Se f uma função integrável em $[a, b]$ e $f(x) \geq 0$, então

$$\int_a^b f(x) \, dx \geq 0;$$

Propriedades do integral definido

- 9 Se f e g são duas funções integráveis em $[a, b]$ e $f(x) \geq g(x)$ para todo o x em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x) \, dx \geq \int_a^b g(x) \, dx;$$

- 10 Se f é integrável em $[a, b]$, então

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \, dx;$$

- 11 Se f é limitada e integrável em $[a, b]$ com $|f(x)| \leq M$, então

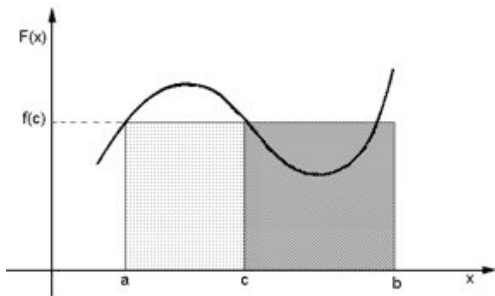
$$\left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq M(b - a);$$

Propriedades do integral definido

- 12 Se f é uma função contínua em $[a, b]$, então existe pelo menos um ponto $c \in [a, b]$ tal que:

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a).$$

Este resultado é vulgarmente conhecido pelo **teorema da média do cálculo integral**.



Propriedades do integral definido

13 Se f e g são integráveis em $[a, b]$, então

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx;$$

14 Se f e g são integráveis em $[a, b]$, então

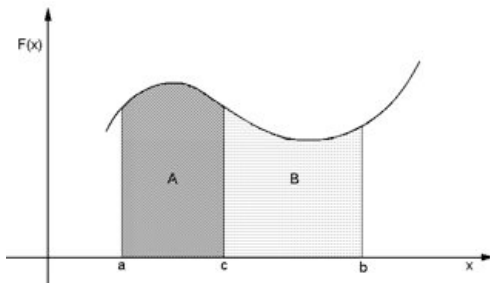
$$\int_a^b [f(x) - g(x)] \, dx = \int_a^b f(x) \, dx - \int_a^b g(x) \, dx;$$

Propriedades do integral definido

- 15 Se f é uma função integrável num intervalo fechado contendo os três pontos a , b e c , então independentemente da ordem

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Este resultado é conhecido pela *Propriedade da aditividade do integral relativamente ao intervalo de integração* ou *Teorema da decomposição do intervalo*.



Propriedades do integral definido

16 Se f e g são integráveis em $[a, b]$, então

$$\left(\int_a^b f(x)g(x) \, dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x) \, dx \int_a^b g^2(x) \, dx.$$

Esta desigualdade denomina-se por *Desigualdade de Schwartz*.

Teorema fundamental do cálculo

Teorema

Se f é uma função contínua em $[a, b]$ e se $G(x) = \int_a^x f(z) \, dz$, então G é uma primitiva de f , isto é,

$$G'(x) = f(x), \forall x \in [a, b].$$

Exercícios

- ① Estude, quanto à monotonia e aos extremos, a função

$$\phi(x) = \int_2^x (t^2 - 6t + 8) \, dt$$

definida em \mathbb{R} .

- ② Calcule, justificando convenientemente

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \int_0^x e^{-t^2} \, dt}{3 - 3e^{-x^2}}.$$

Regra de Barrow

Teorema

Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e F uma primitiva de f .
Então

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Esta é a **fórmula de Barrow**,¹ que permite calcular o integral de uma função f num intervalo onde esta seja contínua, desde que consigamos determinar uma primitiva de F . Outro modo de representar esta fórmula, também conhecida por *fórmula de Newton-Leibniz*, é

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b,$$

¹Isaac Barrow (1630-1677) matemático e teólogo inglês. Foi mestre de Newton e um dos precursores do Cálculo Diferencial.

Exercícios

Calcule os seguintes integrais:

$$\textcircled{1} \int_0^4 x^2 \, dx$$

$$\textcircled{4} \int_5^2 -4t \, dt$$

$$\textcircled{2} \int_0^2 (x^3 + x^2) \, dx$$

$$\textcircled{5} \int_a^b e^x \, dx$$

$$\textcircled{3} \int_0^1 4 \, dx$$

$$\textcircled{6} \int_0^1 2u^{\frac{1}{2}} \, du$$

Exercícios

Calcule os seguintes integrais:

$$\textcircled{1} \int_{\pi}^{\frac{\pi}{3}} \cos x \, dx$$

$$\textcircled{2} \int_0^3 \left(\frac{x}{2} - 4 \right) dx$$

$$\textcircled{3} \int_2^3 \frac{x}{x^2 - 25} dx$$

$$\textcircled{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x \, dx$$

$$\textcircled{5} \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2 + 1} dx$$

Integração por partes

Teorema

Sejam f e g funções de classe C^1 em $[a, b]$.^a Então,

$$\int_a^b f'(x) g(x) dx = [f(x) g(x)]_a^b - \int_a^b f(x) g'(x) dx.$$

^aDizemos que h é uma **função de classe C^1** em $[a, b]$, se e só se, h é diferenciável em $[a, b]$ e a sua derivada, h' , é contínua neste intervalo.

Exercício:

Calcule

$$\int_1^2 \log^2 x \, dx$$

Integração por substituição

Teorema

Sejam

- I e J dois intervalos de \mathbb{R} ;
- f uma função contínua em I ;
- g uma função continuamente derivável em J , tal que $g(J) \subset I$;
- α e β dois pontos de J tais que $a = g(\alpha)$ e $b = g(\beta)$.

Então

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(t)) g'(t) dt.$$

Exercícios

Calcule, recorrendo ao método de integração por substituição:

1 $\int_0^2 \sqrt{4 - x^2} \, dx$

2 $\int_0^1 \frac{\log(1 + x)}{1 + x^2} \, dx.$

- Manuel Ferreira e Isabel Amaral, *Matemática Primitivas e Integrais*, Edições Sílabo, Lda. 5ª edição, 1996.
- Carlos Martins, *Cálculo Integral Teoria e Aplicações*, Edições Sílabo, Lda. 1ª edição, 2004.
- Paula Rocha, *Cálculo I*, Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro, 4ª edição, 1997.

APLICAÇÕES do INTEGRAL DEFINIDO

Maria do Carmo Martins

dezembro 2013

Introdução

De um modo geral podemos recorrer ao integral definido para calcular:

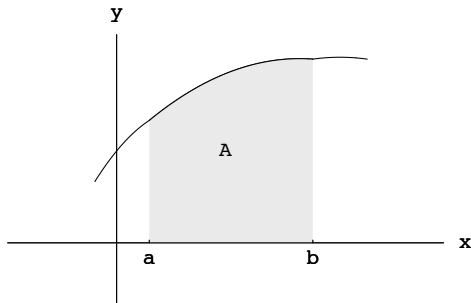
- áreas planas (*nestes slides*);
- volumes de sólidos de revolução;
- volumes de sólidos que não sejam de revolução;
- comprimento de linhas (arcos de curvas) (*nestes slides*);
- áreas laterais de sólidos de revolução.

Cálculo de áreas em coordenadas cartesianas

- Quando $f(x) \geq 0$ para $x \in [a, b]$.

A área da região plana representada na figura é dada por

$$A = \int_a^b f(x) dx.$$

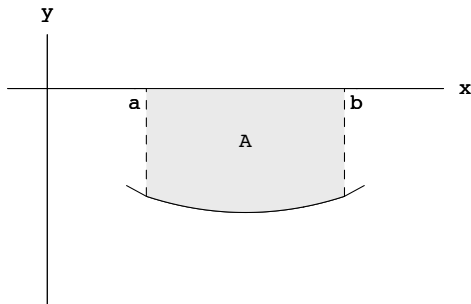


Cálculo de áreas em coordenadas cartesianas

- Quando $f(x) \leq 0$ para $x \in [a, b]$.

A área da região plana representada na figura é dada por

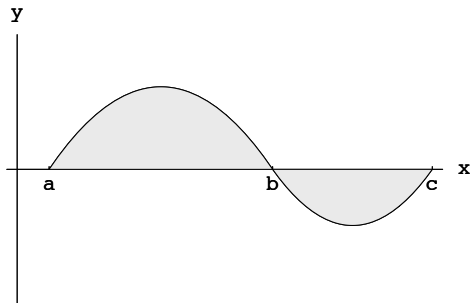
$A = - \int_a^b f(x) dx$, uma vez que $\int_a^b f(x) dx$ é negativo e o valor da área é sempre positivo.



Cálculo de áreas em coordenadas cartesianas

- Quando $f(x)$ muda de sinal para $x \in [a, b]$.
Atendendo aos dois casos anteriores, a área da região plana representada na figura é dada por

$$A = \int_a^b f(x) dx - \int_b^c f(x) dx$$



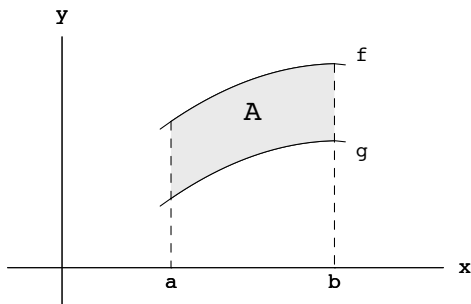
Exercício

Calcule a área da região limitada pela função $f(x) = \sin x$ e o eixo das abcissas quando $x \in [0, 2\pi]$.

Área de uma região limitada por duas funções

A área limitada pelas funções f e g representada na figura é dada por

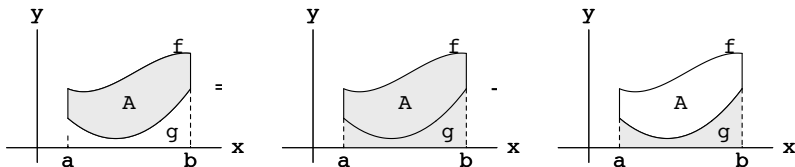
$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] \, dx$$



Área de uma região limitada por duas funções

A área A pode ser obtida pela diferença entre a área limitada por f e por g no intervalo $[a, b]$. Em particular,

- $\int_a^b f(x) dx$ é a área limitada pelo gráfico de f e o eixo das abscissas (entre as retas verticais $x = a$ e $x = b$);
- $\int_a^b g(x) dx$ é a área limitada pelo gráfico de g e o eixo das abscissas (também entre as retas verticais $x = a$ e $x = b$);



Exercício

Calcule a área da região limitada pelas funções $f(x) = \sin x$ e $g(x) = \cos x$ quando $x \in [0, 2\pi]$.

Quando apenas conhecermos as funções f e g , e os extremos do intervalo de integração, a e b , não são dados, temos que determiná-los calculando os pontos de interseção das duas funções.

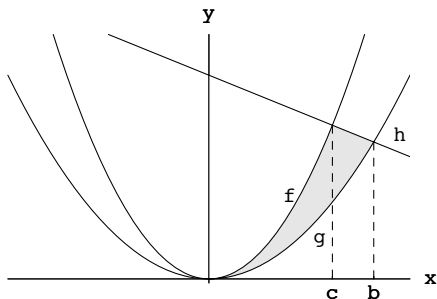
Exercício

Calcule a área da região limitada pelas funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = \sqrt{x}$.

Área de uma região limitada por três funções

A área da região plana limitada pelas funções f , g e h (considerando apenas o primeiro quadrante) é dada por

$$A = \int_0^c [f(x) - g(x)] dx + \int_c^b [h(x) - g(x)] dx$$



Exercício

Calcule a área da região limitada pelas funções $f(x) = x^2$, $g(x) = \frac{x^2}{2}$ e $h(x) = -x + 12$ no primeiro quadrante.

Área da região limitada por uma curva fechada - Exercícios

Utilizando integrais calcule

- 1 A área limitada pela circunferência de centro $(0, 0)$ e raio r .
- 2 A área limitada por uma elipse de semieixos a e b centrada em $(0, 0)$.

Cálculo de comprimento de linhas

Consideremos uma linha plana definida por $y = f(x)$ com f uma função contínua em $[a, b]$. O comprimento da linha de $x = a$ até $x = b$ é dado por

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

Exercícios

- 1 Determine o perímetro da circunferência de equação $x^2 + y^2 = r^2$.
- 2 Considere a função $f(x) = \log x - \frac{x^2}{8}$ no intervalo $[1, 2]$. Determine o comprimento do arco de curva definido por f .
- 3 Calcule o comprimento da curva $f(x) = \arcsen e^{-x}$ entre $x = 0$ e $x = \log \sqrt{3}$.
- 4 Determine o comprimento do arco de curva $f(x) = e^x$, compreendido entre os pontos $(0, 1)$ e $(1, e)$.
- 5 Determine o comprimento do astróide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

- Manuel Ferreira e Isabel Amaral, *Matemática Primitivas e Integrais*, Edições Sílabo, Lda. 5ª edição, 1996.
- B. Demidovitch, *Problemas e exercícios de Análise Matemática*, Editora Mir. 5ª edição, 1986.