

# Transformações Gráficas Bidimensionais

Maria do Carmo Martins

Janeiro de 2011

- Introdução.
- Translação.
- Coordenadas homogéneas.
- Rotação.
- Concatenação de matrizes.
- Variação de Escala.
- Deformação ou cisalhamento.
- Reflexão em recta
- Reflexão deslizante ou translação reflectida.
- Exercícios propostos.

# Introdução

A capacidade para simular o movimento e a manipulação de objectos num plano é fundamental em todos os sistemas de computação gráfica. Estes processos são descritos em termos de

- translações;
- variações de escala ( “Scaling” );
- rotações;
- reflexão em recta (ou espelhamento);
- deformação ou cisalhamento ( “shearing” );
- Reflexão deslizante ou translação reflectida.

# Objectivo

O nosso objectivo consiste em descrever estas operações numa forma matemática, mostrar como elas podem ser utilizadas na obtenção do movimento e da manipulação de objectos.

# Transformações Geométricas e Transformações de Coordenadas

Há dois pontos de vista complementares para descrever o movimento dos objectos.

- O primeiro, é aquele em que o próprio objecto é movido relativamente a um sistema coordenado fixo.

Matematicamente, este ponto de vista é descrito por **transformações geométricas** aplicadas a cada ponto do objecto.

- O segundo ponto de vista, sustenta que o objecto é mantido fixo, enquanto o sistema coordenado é movido relativamente ao objecto.

# Exemplo 1

Consideremos o movimento de um automóvel sobre um cenário. Podemos simular esta situação dos seguintes modos:

- movendo o carro enquanto o cenário é mantido fixo (transformação geométrica)
- mantendo o automóvel fixo, enquanto movemos o cenário (transformação de coordenadas)



em algumas situações são utilizados os dois métodos.



# Transformações Geométricas - continuação

Se o objecto é movido para uma nova posição, ele pode ser considerado como um novo objecto  $Obj'$ , no qual todos os pontos coordenados  $P'$  podem ser obtidos a partir dos pontos originais  $P$ , através da aplicação de uma transformação geométrica.



# Translação

Na **translação**, um objecto é deslocado uma dada distância, segundo uma dada direcção, em relação à sua posição original. Se o deslocamento for dado pelo vector

$$\mathbf{v} = t_x \mathbf{i} + t_y \mathbf{j},$$

o novo ponto  $P'(x', y')$  pode ser determinado pela aplicação da transformação  $\tau_{\mathbf{v}}$  a  $P(x, y)$ :

$$P' = \tau_{\mathbf{v}} (P),$$

onde

$$\begin{cases} x' = x + t_x \\ y' = y + t_y \end{cases}$$

# Translação - Caso geral

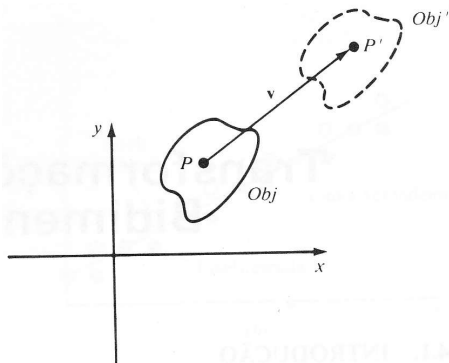
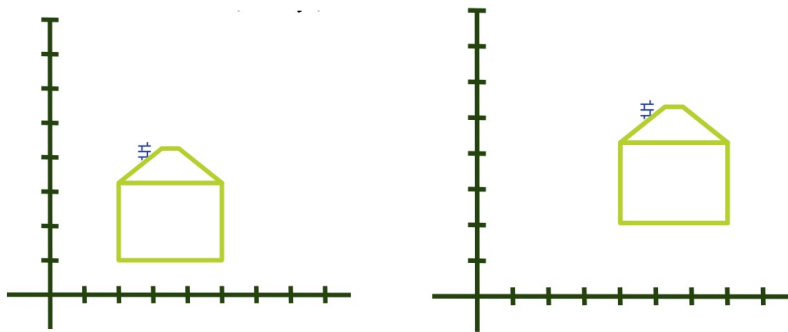


fig. 2

# Exercício 1

Qual a translação considerada na figura?



Ao efectuar uma translação a geometria do objecto permanece ou é alterada?

## Translação 2D: forma matricial

Sendo  $P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ,  $P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$  e  $T = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix}$ , tem-se

$$P' = P + T$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix}$$

## Exercício 2

Considere a linha poligonal fechada  $[ABCDE]$  que une os pontos  $A(7, 11)$ ,  $B(11, 8)$ ,  $C(10, 3)$ ,  $D(4, 3)$  e  $E(3, 3)$ .

- 1 Represente a linha poligonal.
- 2 Considere a translação

$$\begin{cases} x' = x + 13 \\ y' = y - 2 \end{cases}$$

Determine e represente a linha poligonal transladada.

# Observação 1

A transformação de translação não pode ser expressa como uma matriz  $2 \times 2$ .

- Porquê?

Contudo, um artifício permite-nos efectuar uma transformação de translação à custa de uma matriz  $3 \times 3$ .



**Coordenadas homogéneas**

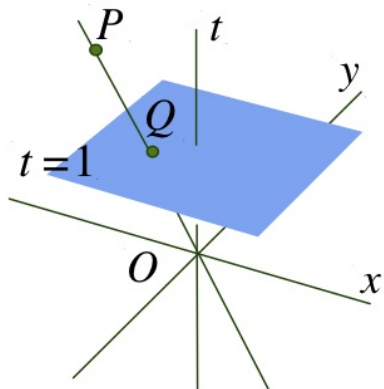
# Coordenadas homogéneas

Um terno  $(x, y, t)$  de números reais com  $t \neq 0$ , é um conjunto de coordenadas homogéneas para o ponto  $P$  com coordenadas cartesianas  $(\frac{x}{t}, \frac{y}{t})$ .

Notemos que o mesmo ponto tem muitos conjuntos de coordenadas homogéneas. Assim,  $(x, y, t)$  e  $(x', y', t')$  representam o mesmo ponto se existe algum escalar  $\alpha$  tal que  $x' = \alpha x$ ,  $y' = \alpha y$  e  $t' = \alpha t$ .

Se  $P$  tem as coordenadas cartesianas  $(x, y)$ , um dos seus conjuntos de coordenadas homogéneas é  $(x, y, 1)$ .

# Coordenadas homogêneas - figura de ilustração





## Translação: representação numa matriz $3 \times 3$

Ao representar-se o par de coordenadas cartesianas  $(x, y)$  de um ponto  $P$  pela sua **representação homogénea**  $(x : y : 1)$ , a translação na direcção  $\mathbf{v} = t_x \mathbf{i} + t_y \mathbf{j}$  pode ser expressa pela matriz

$$\mathbf{T}_{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Então

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + t_x \\ y + t_y \\ 1 \end{bmatrix}$$

A partir daqui extraímos o par de coordenadas cartesianas  $(x + t_x, y + t_y)$

# Concatenação de matrizes

- Qual a vantagem de uma forma matricial para a translação?

A introdução de uma forma matricial para a translação tem a ver com a possibilidade de construir transformações complexas, através da multiplicação das transformações básicas dadas na sua forma matricial. Este processo é conhecido por **concatenação de matrizes**.

## Observação 2

É preciso realçar que para o processo anterior recorremos ao facto de a composição de matrizes ser equivalente à multiplicação de matrizes. Contudo, temos de representar as transformações básicas por **matrizes de coordenadas homogéneas**  $3 \times 3$ , de forma a haver compatibilidade (do ponto de vista da multiplicação de matrizes) com a matriz translação. Isso é conseguido acrescentando às matrizes  $2 \times 2$  uma terceira coluna

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e uma terceira linha (0 0 1), isto é:

$$\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Rotação em torno da origem

Na **rotação**, o objecto é rodado  $\theta^\circ$  **em torno da origem**. Por convenção, o sentido da rotação é:

- contrário ao sentido de rotação dos ponteiros do relógio, se  $\theta$  é um ângulo positivo;
- e igual ao sentido de rotação dos ponteiros do relógio, se  $\theta$  é um ângulo negativo.

A transformação de rotação  $\Delta_{(O,\theta)}$  é:

$$P' = \Delta_{(O,\theta)} (P)$$

onde

$$\begin{cases} x' = x \cos \theta - y \sin \theta \\ y' = x \sin \theta + y \cos \theta \end{cases}$$

# Rotação em torno da origem

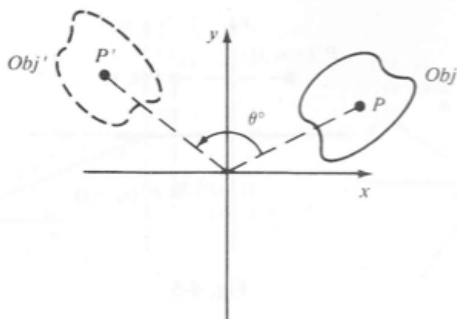


fig. 3

## Rotação (em relação à origem) 2D: forma matricial

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

**Em coordenadas homogêneas:**

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta & 0 \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

## Exercício 3

Considere a linha poligonal fechada  $[ABCDE]$  que une os pontos  $A(7, 8)$ ,  $B(9, 6)$ ,  $C(9, 2)$ ,  $D(5, 2)$  e  $E(5, 6)$ .

- 1 Represente a linha poligonal.
- 2 Determine a rotação de  $90^\circ$  da linha poligonal.
- 3 Determine a rotação de  $45^\circ$  da linha poligonal.

# Transformações Compostas

Transformações geométricas e de coordenadas mais complexas podem ser construídas a partir das transformações básicas descritas anteriormente, usando o processo de composição de funções. Por exemplo, operações tais como a

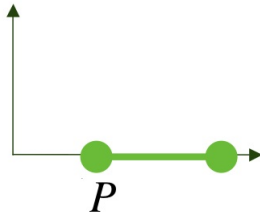
- rotação em torno de um ponto que não a origem ou
- a reflexão em relação a linhas que não são os eixos coordenados

podem ser construídas a partir das transformações básicas.

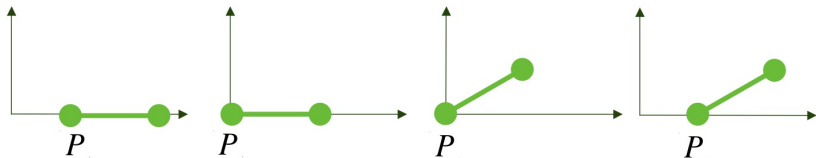


## Exemplo 2: rotação de $30^\circ$ de um segmento em torno de um ponto que não é a origem

Faça uma rotação de  $\theta = 30^\circ$  do segmento  $[PQ]$  em torno do ponto  $P(2, 0)$ .



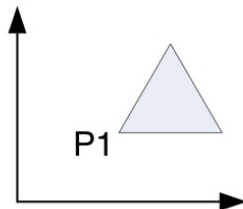
## Exemplo 2: rotação de $30^\circ$ de um segmento em torno de um ponto que não é a origem



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

## Exemplo 3: rotação de um objecto de um ângulo $\theta$ sobre um ponto arbitrário

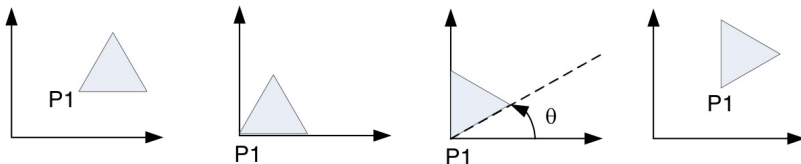
Faça a rotação de  $\theta^\circ$  da figura em torno de  $P_1$ .



Quais os passos necessários para a resolução do problema?  
Qual a matriz resultante?

## Exemplo 3: rotação de um objecto de um ângulo $\theta$ sobre um ponto arbitrário

Os passos necessários para a resolução do problema:



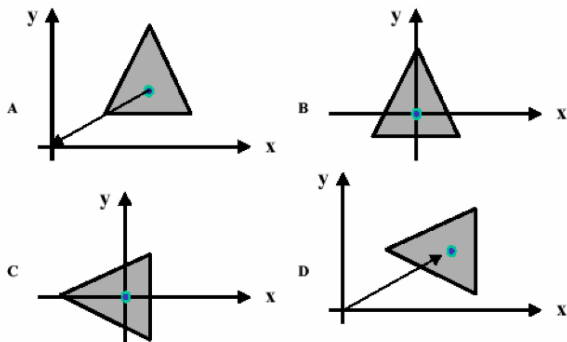
# Vantagem/desvantagem da composição de transformações

- Em vez de se aplicar uma transformação de cada vez nos pontos de um objecto, é mais rápido calcular uma matriz resultante da composição de transformações, e depois multiplicar essa matriz para cada ponto do objecto.



**Atenção na ordem, pois a multiplicação de matrizes é associativa, mas não é comutativa!**

# Rotação em 2D num ponto arbitrário



# Variação de escala em relação à origem

A **variação de escala** é o processo que permite a expansão e compressão das dimensões de um objecto. São utilizadas constantes positivas de variação de escala  $e_x$  e  $e_y$  para descrever variações de comprimento em relação à direcção  $x$  e à direcção  $y$ , respectivamente.

- Uma constante de variação de escala maior do que 1 indica uma expansão (ou ampliação)
- uma constante de variação de escala menor do que 1 indica uma compressão (ou redução) do comprimento.

A transformação de variação de escala  $\varepsilon_{e_x, e_y}$  é dada por

$$P' = \varepsilon_{e_x, e_y} (P),$$

onde

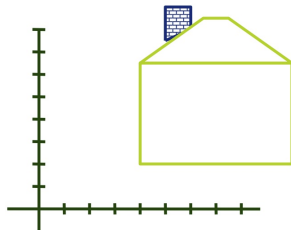
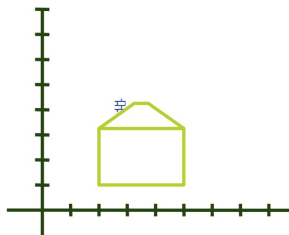
$$\begin{cases} x' = e_x \cdot x \\ y' = e_y \cdot y \end{cases}$$

## Variação de escala: representação matricial

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_x & 0 & 0 \\ 0 & e_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

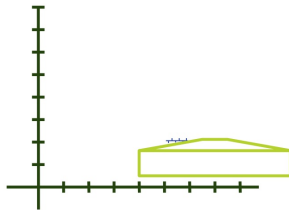
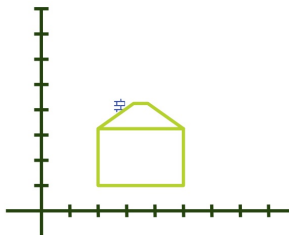


## Variação de escala: Exemplo 4 - Caso uniforme



Que relação existe entre  $e_x$  e  $e_y$ ?

## Variação de escala: Exemplo 5 - Caso não uniforme



Que relação existe entre  $e_x$  e  $e_y$ ?

## Observação 3

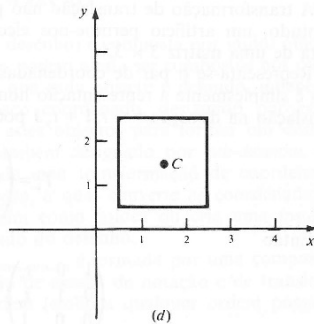
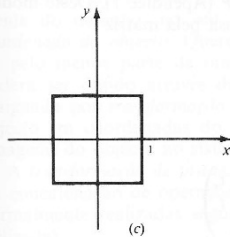
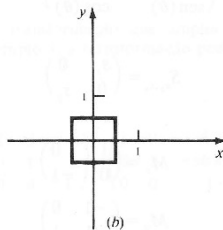
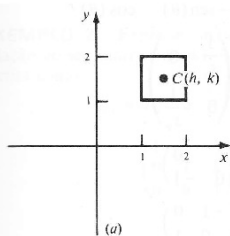
É importante notar que para garantir que um objecto esteja na mesma posição, em relação ao seu centro, após a variação de escala, deve-se fazer:

- uma translação do seu centro até à origem;
- aplicar a variação de escala;
- e depois aplicar a translação inversa à primeira.

## Exemplo 6 - (variação de escala)

Considere o quadrado cujo centro é  $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$  e com 1 cm de lado. Amplie a medida do lado para 2cm mantendo o centro do quadrado e expresse, matricialmente, a transformação resultante.

## Figura do Exemplo 6



## Exercício 4

Considere as figuras:

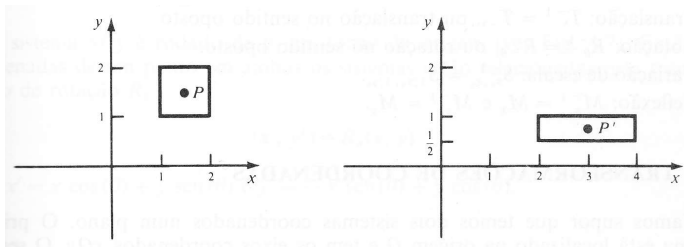


fig.4

Indique, relativamente à transformação de variação de escala considerada, quais os factores de escala  $e_x$  e  $e_y$ .

## Exercício 5

Considere a linha poligonal fechada  $[ABCDE]$  que une os pontos  $A\left(\frac{11}{2}, 11\right)$ ,  $B(7, 9)$ ,  $C(7, 5)$ ,  $D(4, 5)$  e  $E(4, 9)$ .

- 1 Represente a linha poligonal.
- 2 Determine e esboce a linha resultante da mudança de escala, sendo  $e_x = 3$  e  $e_y = \frac{1}{2}$ .

# Homotetia

Se as duas constantes de variação de escala têm o mesmo valor  $e$ , a transformação de variação de escala é chamada **homotetia**. Por outro lado, a transformação de variação é:

- uma ampliação se  $e > 1$
- e uma redução se  $e < 1$ .



# Deformação ou Cisalhamento

Cisalhar um objecto é deformá-lo linearmente ao longo do eixo  $x$  ou do eixo  $y$  ou de ambos.

$$\begin{cases} x' = x + k_x y \\ y' = y + k_y x \end{cases}$$

# Cisalhamento ou deformação: representação matricial

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k_x & 0 \\ k_y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

cisalhamento no caso geral

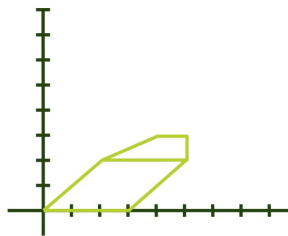
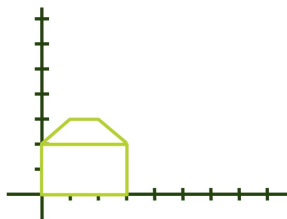
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k_x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

cisalhamento na direcção de x

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k_y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

cisalhamento na direcção de y

## Deformação ou Cisalhamento - Exemplo 7



Neste caso,  $k_x = 1$  e  $k_y = 0$ .

## Reflexão em relação a um eixo

Se quer o eixo  $Ox$  quer o eixo  $Oy$  forem tratados como uma recta de reflexão (espelho), o objecto tem uma imagem reflectida. Uma vez que a reflexão  $P'$  do ponto  $P$  de um objecto fica localizada à mesma distância da recta de reflexão (ou espelho) que o ponto  $P$ , a transformação de **reflexão**  $\Sigma_x$  **em relação ao eixo**  $Ox$  é dada por

$$P' = \Sigma_x (P)$$

onde

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$

## Reflexão em relação ao eixo $Oy$

Do mesmo modo, a **reflexão em relação ao eixo  $Oy$**  é dada por

$$P' = \Sigma_y (P)$$

onde

$$\begin{cases} x' = & -x \\ y' = & y \end{cases}$$

# Figura de Reflexão de um ponto em relação ao eixo $Ox$ e ao eixo $Oy$

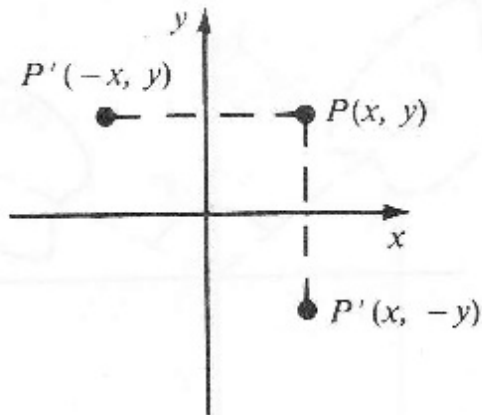


fig. 5

## Reflexão: representação matricial

$$\mathbf{M}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{reflexão em relação a } Ox$$

$$\mathbf{M}_y = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{reflexão em relação a } Oy$$

## Exercício 6

- 1 Considere o triângulo cujos vértices são os pontos  $V_1(6, 7)$ ,  $V_2(9, 2)$  e  $V_3(3, 2)$ . No mesmo referencial represente o triângulo, a sua reflexão em relação ao eixo  $Ox$  e a sua reflexão em relação ao eixo  $Oy$ .
- 2 Considere o pentágono cujos vértices são os pontos  $V_1(3, 6)$ ,  $V_2(3, 2)$ ,  $V_3(7, 3)$ ,  $V_4(6, 4)$  e  $V_5(7, 5)$ . No mesmo referencial represente o pentágono, a sua reflexão em relação ao eixo  $Ox$  e a sua reflexão em relação ao eixo  $Oy$ .



# Reflexão em ponto ou rotação de $180^\circ$ ou meia volta

Podemos também espelhar o objecto em relação à **origem**, invertendo ambas as coordenadas cartesianas. Neste caso, tem-se

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$$

## Exercício 7

Considere o triângulo cujos vértices são os pontos  $V_1(4, 4)$ ,  $V_2(4, 0)$  e  $V_3(0, 4)$ . No mesmo referencial represente o triângulo e a sua reflexão em relação à origem.

## Exercício 8

Determine as equações para uma meia volta em torno do ponto  $P(3, 4)$  através de:

- a) do cálculo vectorial;
- b) recorrendo à definição de ponto médio de um segmento;
- c) rotações;
- d) reflexão em ponto;

# Reflexão em relação a um eixo arbitrário

Para além da origem, do eixo  $Ox$  e do eixo  $Oy$  pode-se também adoptar um eixo arbitrário. A matriz de reflexão pode ser obtida através da composição de uma sequência de matrizes de translações, rotações e reflexões.

## Exemplo 8 - Reflexão em relação à recta $y = x$

Por exemplo, se a reflexão for em torno da linha diagonal definida por  $y = x$ , a matriz de reflexão pode ser derivada da combinação das seguintes transformações:

- 1 rotação de  $45^\circ$  na direcção horária para fazer a recta  $y = x$  coincidir com o eixo  $Ox$ .
- 2 reflexão em torno do eixo  $Ox$ .
- 3 rotação de  $45^\circ$  na direcção anti-horária para retomar a orientação original da recta  $y = x$ .

## Exercício 9

Determine a imagem do ponto  $P(2, 3)$  relativamente à reflexão em relação à recta  $y = x$ .

# Composição de translações sucessivas

Calcule a composição de duas translações sucessivas  $\tau_1$  e  $\tau_2$  associadas a  $\mathbf{v}_1 = t_{x_1}\mathbf{i} + t_{y_1}\mathbf{j}$  e  $\mathbf{v}_2 = t_{x_2}\mathbf{i} + t_{y_2}\mathbf{j}$ .

O que conclui?

# Composição de rotações sucessivas

Calcule a composição de duas rotações sucessivas  $\Delta_1(O, \theta_1)$  e  $\Delta_2(O, \theta_2)$ .

O que conclui?



# Composição de variações de escala sucessivas

Calcule a composição de duas variações de escala sucessivas

$$\varepsilon_1(e_{x_1}, e_{y_1}) \circ \varepsilon_2(e_{x_2}, e_{y_2}).$$

O que conclui?

## Exercício 10

Determine a inversa da transformação definida por

$$\begin{cases} x' = x \cos 30^\circ - y \sin 30^\circ \\ y' = x \sin 30^\circ + y \cos 30^\circ \end{cases}$$

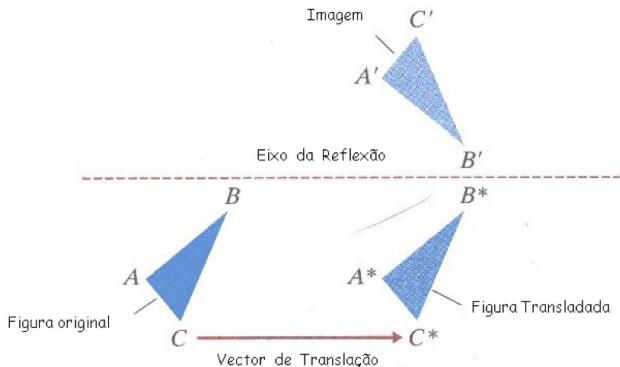
# Transformações geométricas inversas

Cada transformação geométrica tem uma transformação inversa correspondente, a qual é descrita pela operação oposta à executada pela transformação:

- Translação:  $\tau_{\mathbf{v}}^{-1} = \tau_{-\mathbf{v}}$ , ou translação no sentido oposto.
- Rotação:  $\Delta_{(O,\theta)}^{-1} = \Delta_{(O,-\theta)}$ , ou rotação (em relação à origem) no sentido oposto.
- Variação de escala:  $\varepsilon_{e_x, e_y}^{-1} = \varepsilon_{1/e_x, 1/e_y}$ .
- Reflexão:  $\Sigma_x^{-1} = \Sigma_x$  e  $\Sigma_y^{-1} = \Sigma_y$

# Reflexão deslizante ou translação reflectida

Uma **reflexão deslizante** de eixo  $r$  e vector  $\mathbf{v}$  é uma transformação composta por uma translação seguida de uma reflexão ou vice-versa. O eixo de reflexão deve ser paralelo à direcção da translação. Representa-se por  $\rho(\mathbf{v}, r) = \tau_{\mathbf{v}} \Sigma_g$ .



# Reflexão deslizante



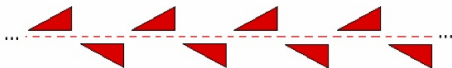
Translação

Figura 1



Reflexão

Figura 2



Reflexão  
deslizante

Figura 3

## Exercício 11

Considere o quadrilátero  $[ABCD]$ , onde  $A(-14, 12)$ ,  $B(-4, 9)$ ,  $C(-3, 2)$  e  $D(-11, 4)$ .

- 1 Represente o quadrilátero.
- 2 Determine e represente a reflexão reflectida, sendo  $\mathbf{v} = 0\mathbf{i} + 11\mathbf{j}$  e a recta  $x = 1$ , efectuando:
  - a) primeiro a translação e depois a reflexão;
  - b) primeiro a reflexão e depois a translação.

## Exercício 12

Determine o conjunto de equações que representa o produto de duas translações, sendo que a primeira está associada ao vector  $(7, 3)$  e a segunda ao vector  $(2, 4)$ .

## Exercício 13

Determine a imagem da recta  $y = 2x$  pela translação associada ao vector  $(-2, -3)$ .



## Exercício 14

Determine a imagem sob a translação associada ao vector  $(4, -3)$  de:

a)  $2x - 5y + 7 = 0;$

b)  $3x + 4y + 2 = 0.$

## Exercício 15

Determine a imagem do ponto  $(3, 7)$  sob uma reflexão em relação à recta  $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ .

## Exercício 16

Esboce a figura original, aplique a transformação e esboce a imagem da figura no mesmo referencial nos seguintes casos:

- a) O triângulo com vértices  $(6, 5)$ ,  $(7, 3)$  e  $(8, 2)$  sob uma deformação com matriz  $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ .
- b) O triângulo com vértices anteriores sob uma mudança de escala com matriz  $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ .

## Exercício 16 - continuação

- c) Um quadrilátero com vértices  $(3, 3)$ ,  $(9, 3)$ ,  $(9, 5)$  e  $(3, 5)$  sob uma rotação de  $90^\circ$ .
- d) O mesmo quadrilátero da alínea anterior sob uma reflexão em relação à recta  $y = x$ .
- e) Um hexágono com vértices  $(3, 2)$ ,  $(7, 3)$ ,  $(8, 7)$ ,  $(6, 10)$ ,  $(2, 6)$  e  $(-2, 4)$  sob uma rotação de  $270^\circ$ .

## Exercício 17

Considere o pentágono  $[ABCDP_1]$ , onde  $A(4, 6)$ ,  $B(\frac{11}{2}, 7)$ ,  $C(7, 6)$ ,  $D(7, 3)$  e  $P_1(4, 3)$ .

- 1 Descreva os passos necessários para efectuar a rotação de  $\theta^\circ$  do pentágono em torno do ponto  $P_1$ .
- 2 Sendo  $0^\circ < \theta < 45^\circ$ , esboce a sequência das transformações referidas na alínea anterior.
- 3 Escreva a matriz resultante da composição das transformações consideradas.

## Exercício 18

Determine a transformação que roda de  $\theta^\circ$  um ponto de um objecto em torno da origem. Escreva a representação matricial para esta rotação.

## Exercício 19

- 1 Determine a matriz que representa a rotação de  $30^\circ$  de um objecto em torno da origem.
- 2 Quais são as novas coordenadas do ponto  $P(2, -4)$  após a rotação?

## Exercício 20

- 1 Descreva a transformação que roda um ponto de um objecto,  $Q(x, y)$ , de  $\theta$  graus em torno de um centro de rotação fixo  $P(h, k)$ .
- 2 Escreva a forma geral da matriz de rotação em torno do ponto  $P(h, k)$ .



## Exercício 21

Aplique uma rotação de  $45^\circ$  ao triângulo de vértices  $A(0,0)$ ,  $B(1,1)$  e  $C(5,2)$ :

- 1 Em torno da origem.
- 2 Em torno do ponto  $P(-1, -1)$ .

## Exercício 22

Determine a transformação que efectua a variação de escala (em relação à origem) de:

- 1  $a$  unidades na direcção  $Ox$ .
- 2  $b$  unidades na direcção  $Oy$ .
- 3 Simultaneamente  $a$  unidades na direcção  $Ox$  e  $b$  unidades na direcção  $Oy$ .

## Exercício 23

Descreva a forma geral da matriz de variação de escala em relação a um ponto fixo  $P(h, k)$ .

## Exercício 24

Amplie o tamanho do triângulo com os vértices  $A(0, 0)$ ,  $B(1, 1)$  e  $C(5, 2)$  para o dobro, mantendo o ponto  $C(5, 2)$  fixo.

# Alguns resultados envolvendo transformações

## Teorema

*O produto de duas ou mais translações é uma translação.*

# Alguns resultados envolvendo transformações - continuação

## Teorema

*O produto de duas reflexões em pontos,  $\Sigma_F$  e  $\Sigma_G$ , é a translação de vector  $2 \overrightarrow{GF}$ , isto é,*

$$\Sigma_F \Sigma_G = \tau_{2 \overrightarrow{GF}}$$

## Alguns resultados envolvendo transformações - continuação

### Teorema

*O produto de três reflexões em pontos é uma reflexão num ponto. Em particular, se os pontos  $P$ ,  $Q$  e  $R$  não são colineares, então*

$$\Sigma_P \Sigma_Q \Sigma_R = \Sigma_S,$$

*onde  $[PQRS]$  é um paralelogramo.*

# Alguns resultados envolvendo transformações - continuação

## Teorema

*O produto de duas reflexões em rectas,  $r$  e  $s$ , que se intersectam no ponto  $F$ , sob o ângulo orientado  $\alpha$  é uma rotação  $\Delta_{(F,\theta)}$ , onde  $\theta = 2\alpha$ , isto é,*

$$\Sigma_r \Sigma_s = \Delta_{(F, 2\alpha)}$$



# Alguns resultados envolvendo transformações - continuação

## Teorema

O produto de duas rotações  $\Delta_{1(F_1, \theta_1)}$  e  $\Delta_{2(F_2, \theta_2)}$  é:

- uma rotação  $\Delta_{(F, \theta_1 + \theta_2)}$  se  $\theta_1 + \theta_2 \neq 0^\circ$
- uma translação se  $\theta_1 + \theta_2 = 0^\circ$

# Alguns resultados envolvendo transformações - continuação

## Teorema

*O produto de uma rotação  $\Delta_{(F,\theta)}$  por uma translação  $\tau_v$  (ou vice-versa) é uma rotação de ângulo  $\theta$ .*

# Transformações Gráficas Tridimensionais

Maria do Carmo Martins

Janeiro de 2011

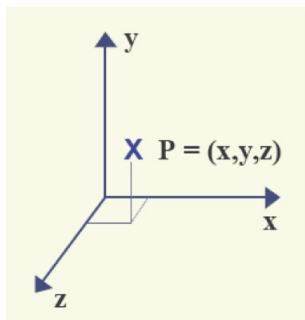
# Introdução

A capacidade para representar e visualizar um objecto em 3D é fundamental para a percepção da sua forma. No entanto, em muitas situações é necessário “manusear” o objecto, movimentando-o através de rotações, translações e mesmo variação de escala.

Assim, generalizando o que vimos para as transformações geométricas em 2D, as transformações geométricas em 3D serão representadas por matrizes  $4 \times 4$  também em coordenadas homogéneas.

# Sistemas de Coordenadas Cartesianas (revisão)

Representam uma forma de indexar e localizar elementos no espaço (que é 3D). Os eixos com orientação formam o Sistema de Coordenadas Cartesianas. Dado um ponto  $P$ , ele é definido por um terno de coordenadas  $(x, y, z)$  e é representado no eixo de coordenadas cartesianas do seguinte modo:



# Sistemas de Coordenadas - continuação

O sistema de coordenadas utilizado para 3D será o da **Regra da Mão Direita**, com o eixo  $Oz$  perpendicular ao papel e saindo na direcção do observador.

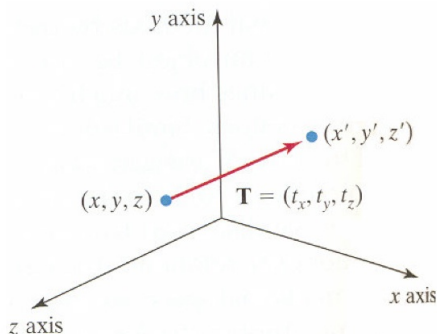
O sentido positivo de uma rotação é dado quando observando-se sobre um eixo positivo em direcção à origem, uma rotação de  $90^\circ$  irá levar um eixo positivo noutro positivo. A tabela seguinte resume para cada eixo a direcção de rotação positiva.

Eixo de Rotação	Direcção da Rotação Positiva
x	y para z
y	z para x
z	x para y

# Translação

Um objecto é deslocado uma dada distância e segundo uma dada direcção a partir da sua posição original. A direcção e o deslocamento da translação é determinada pelo vector

$$\mathbf{v} = t_x \mathbf{i} + t_y \mathbf{j} + t_z \mathbf{k}.$$



# Translação - continuação

As coordenadas de um ponto transladado podem ser calculadas usando a transformação

$$\begin{cases} x' = x + t_x \\ y' = y + t_y \\ z' = z + t_z \end{cases}$$

- Como representar esta transformação na forma matricial?



# Translação - representação matricial

Para representar esta transformação através de uma matriz, precisamos de usar coordenadas homogêneas. A respectiva transformação, na forma matricial homogênea, pode então ser expressa da seguinte forma:

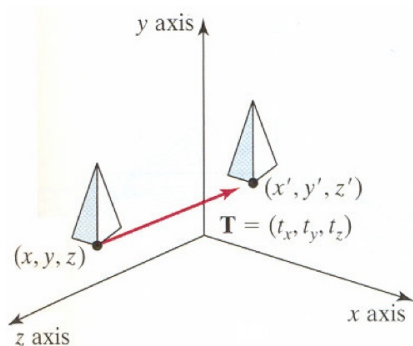
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

onde,  $t_x$ ,  $t_y$  e  $t_z$  representam o vector de translação;  $x$ ,  $y$ , e  $z$  as coordenadas iniciais e  $x'$ ,  $y'$  e  $z'$  as coordenadas finais.

# Translação - conclusão

Esta transformação pode também ser representada por:

$$P' = T \cdot P$$



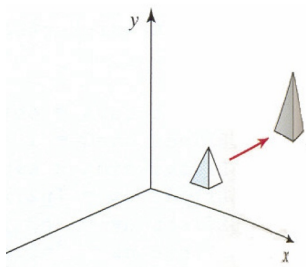
# Variação ou Mudança de Escala

O processo da variação de escala altera as dimensões de um objecto.

A variação de escala em relação à origem é efectuada pela transformação

$$\begin{cases} x' = e_x \cdot x \\ y' = e_y \cdot y \\ z' = e_z \cdot z \end{cases}$$

## Variação ou Mudança de Escala - figura



Uma mudança de escala tridimensional altera também a posição do objecto em relação à origem.

# Variação ou Mudança de Escala - representação matricial

A representação da variação de escala na forma matricial em coordenadas homogêneas é então:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

onde  $e_x$ ,  $e_y$  e  $e_z$  representam o vector de escala.

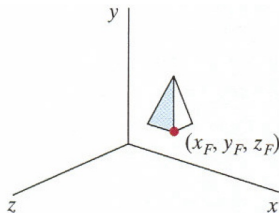
Esta transformação pode também ser representada por:

$$P' = E_{(e_x, e_y, e_z)} \cdot P$$

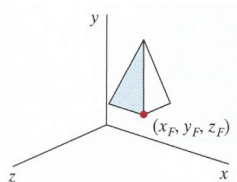
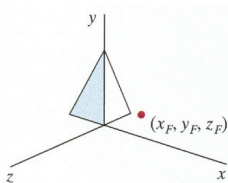
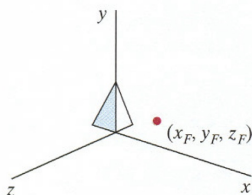
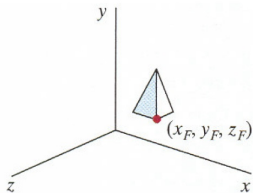
# Mudança de escala em relação a um ponto fixo

Uma mudança de escala tridimensional em relação a um ponto fixo é uma transformação composta pela seguinte sequência de transformações:

- 1 Translação do ponto fixo para a origem.
- 2 Mudança de escala.
- 3 Translação do ponto fixo para a sua posição original.



# Mudança de escala em relação a um ponto fixo - figuras



- Qual a matriz resultante da transformação?

Podemos rodar um objecto em torno de um eixo qualquer no espaço, mas as rotações em torno de um dos eixos coordenados são mais simples.

As rotações em 3D requerem:

- um ângulo de rotação;
- e de um eixo de rotação.

Uma rotação diz-se canónica quando algum dos eixos de coordenadas,  $Ox$ ,  $Oy$  e  $Oz$ , é escolhido como eixo de rotação. Então, a construção da transformação de rotação processa-se como no caso da rotação 2D em torno da origem.

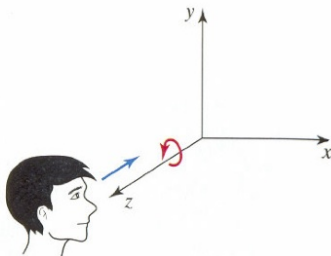


# Rotação em torno do eixo $Oz$

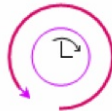
Por convenção:

ângulos de rotação positivos  $\rightarrow$  rotações anti-horárias

Atendendo ao que foi dito do sistema de coordenadas, os sentidos de rotação positiva em torno dos eixos seguem a regra da mão direita: o eixo de rotação é  $Oz$  e a direcção da rotação positiva é de  $x$  para  $y$



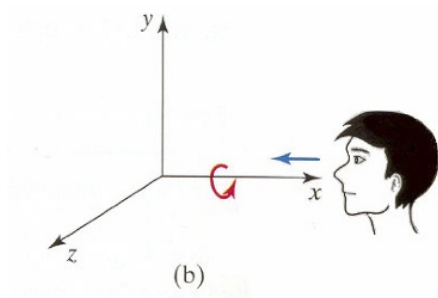
(a)



Sentido Anti-horário

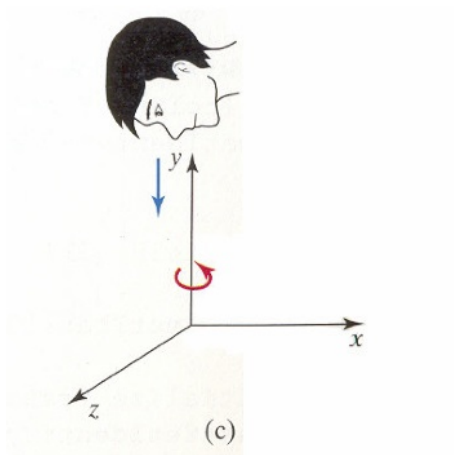
# Rotação em torno do eixo $Ox$

- O eixo de rotação é  $Ox$  e a direcção da rotação positiva é de  $y$  para  $z$



# Rotação em torno do eixo $Oy$

- O eixo de rotação é  $Oy$  e a direcção da rotação positiva é de  $z$  para  $x$



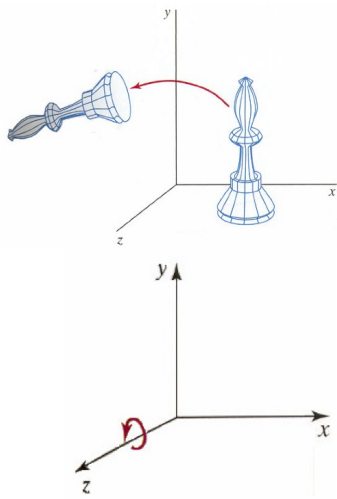
# Rotações em torno dos eixos coordenados

A transformação correspondente à rotação 2D no plano  $XOY$ , em torno da origem, é facilmente generalizável a 3D

$$\begin{cases} x' = x \cos \theta - y \sin \theta \\ y' = x \sin \theta + y \cos \theta \\ z' = z \end{cases}$$

- O parâmetro  $\theta$  especifica o ângulo de rotação em torno do eixo  $Oz$ ;
- Para qualquer ponto, a coordenada  $z$  permanece inalterada com esta transformação.

## Rotação em torno do eixo $Oz$ - figura



# Rotação em torno do eixo $Oz$

A equação de rotação em torno do eixo  $Oz$  é dada por:

$$\begin{cases} x' = x \cos \theta - y \sin \theta \\ y' = x \sin \theta + y \cos \theta \\ z' = z \end{cases}$$

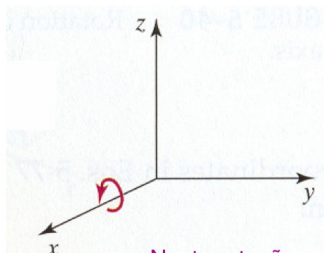
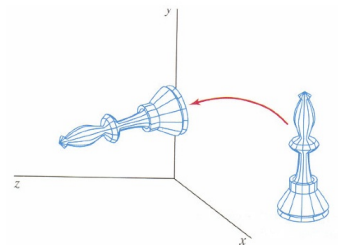
Em coordenadas homogêneas, tem-se

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

ou ainda

$$P' = R_z(\theta) \cdot P$$

## Rotação em torno do eixo $Ox$ - figura



# Rotação em torno do eixo $Ox$

A equação da rotação em torno do eixo  $Ox$  é dada por:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \cos \theta - z \sin \theta \\ z' = y \sin \theta + z \cos \theta \end{cases}$$

Em coordenadas homogêneas, tem-se

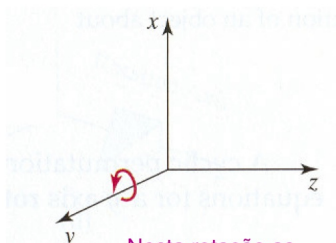
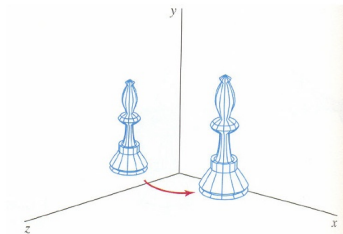
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

ou ainda

$$P' = R_x(\theta) \cdot P$$



## Rotação em torno do eixo $Oy$ - figura



## Rotação em torno do eixo $Oy$

A equação de rotação em torno do eixo  $Oy$  é dada por:

$$\begin{cases} z' = z \cos \theta - x \sin \theta \\ x' = z \sin \theta + x \cos \theta \\ y' = y \end{cases}$$

Em coordenadas homogêneas, tem-se

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

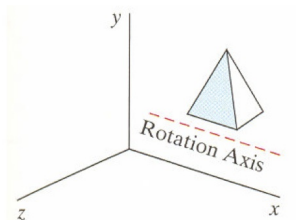
ou ainda

$$P' = R_y(\theta) \cdot P$$

# Transformações Compostas e Concatenação de Matrizes

Transformações geométricas mais complexas são criadas pelo processo de **composição de funções**. Para as funções matriciais, contudo, o processo de composição é equivalente à multiplicação ou concatenação de matrizes.

# Rotação em torno de um eixo paralelo a um eixo coordenado

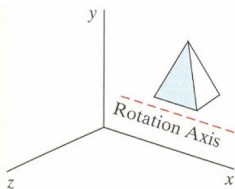


A matriz correspondente a uma rotação em torno de um eixo paralelo a um eixo coordenado pode ser determinada como uma transformação resultante de:

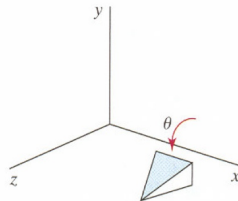
- 1 Translação que leve o eixo de rotação a coincidir com o eixo coordenado;
- 2 Rotação em torno do eixo;
- 3 Translação inversa por forma a que o eixo de rotação volte à posição original

$$P' = T^{-1} \cdot R_x(\theta) \cdot T \cdot P$$

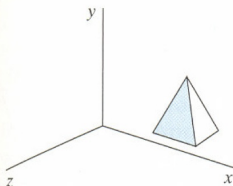
# Rotação em torno de um eixo paralelo a um eixo coordenado - figura



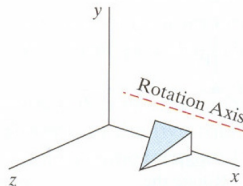
1- Posição inicial



3- Rotação do objecto em torno do eixo coordenado

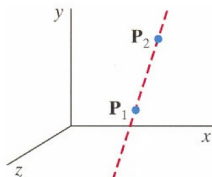


2- Translação do eixo de rotação para o eixo coordenado

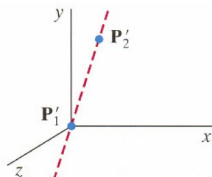


4- Translação do eixo de rotação para a posição original

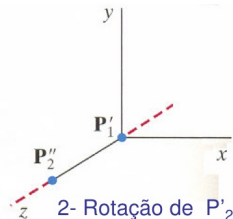
## Rotação em torno de um eixo arbitrário - figura



posição  
inicial

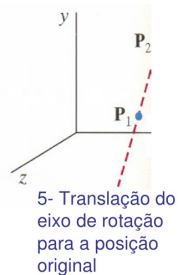
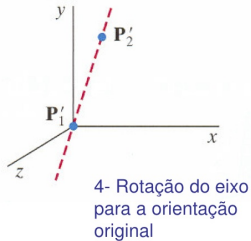
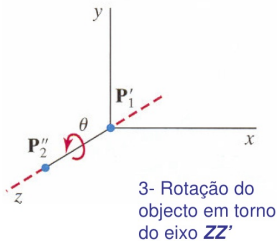


1- Translação  
de  $P_1$  para a  
origem



2- Rotação de  $P'_2$   
por forma a ficar  
sobre o eixo **ZZ'**

# Rotação em torno de um eixo arbitrário - figura - (continuação)



# Exercício 1

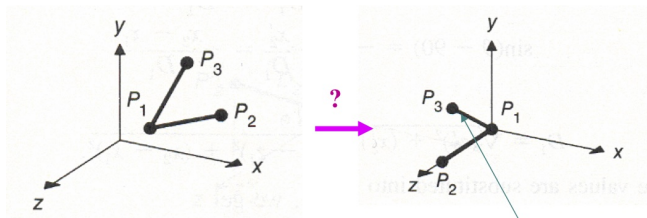
Definindo *tilting* como uma rotação em torno do eixo  $Ox$ , seguida por uma rotação em torno do eixo  $O_y$ :

- 1 Determine a matriz de *tilting*.
- 2 A ordem das rotações é, ou não, importante?



## Exercício 2

Considere-se a transformação que permite levar os segmentos de recta da posição a) para a posição b):

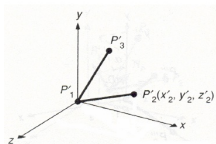


Segmento  $P_1P_3$  posicionado no plano  $YOZ$

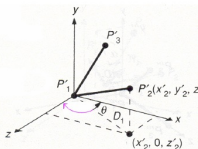
Determine a matriz da transformação.

## Esquema de figuras do exercício 2

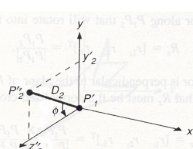
- 1 translação de  $P_1$  para a origem;
- 2 rotação em torno do eixo  $Oy$  por forma a levar  $P_1P_2$  ao plano  $YOZ$ ;
- 3 rotação em torno do eixo  $Ox$  por forma a levar  $P_1P_2$  ao eixo  $Oz$ ;
- 4 rotação em torno do eixo  $Oz$  por forma a levar  $P_1P_3$  ao plano  $YOZ$ ;



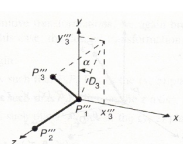
1



2



3



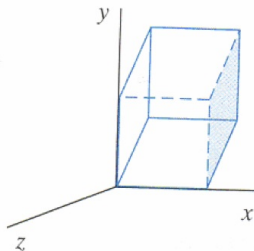
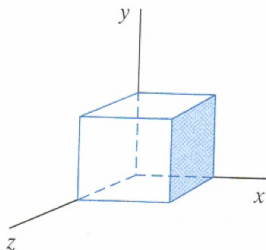
4

10

# Outras transformações 3D

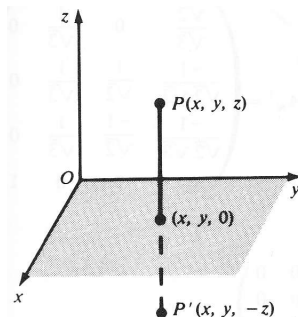
Há outras transformações tridimensionais que são úteis:

- Deformação;



# Reflexão em relação ao plano $XOY$

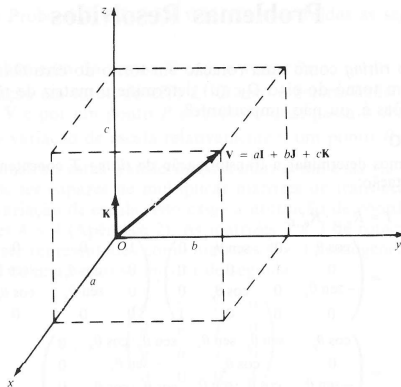
Considere a figura:



Determine a transformação correspondente à reflexão em relação ao plano  $XOY$ .

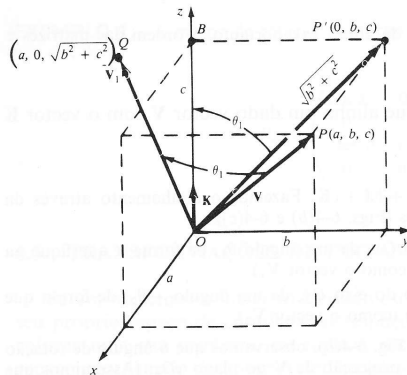
## Exercício 3

Determine a transformação  $A_v$  que alinha um dado vector  $\mathbf{v}$  com o vector  $\mathbf{k}$  ao longo do eixo positivo  $Oz$ .

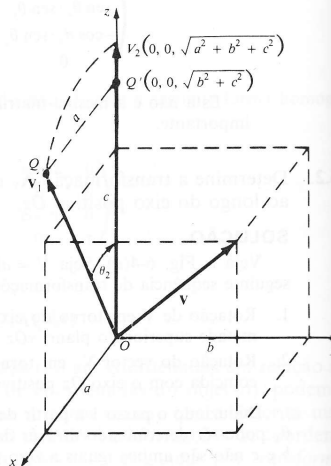


(a)

# Esquema - Exercício 3



(b)

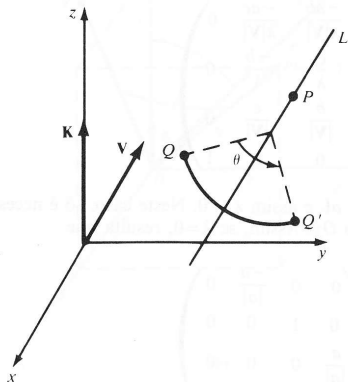


(c)

## Exercício 4

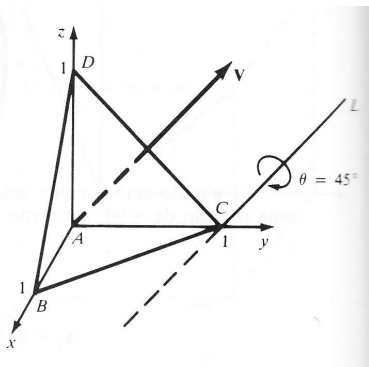
Seja  $L$  um eixo de rotação especificado pelo vector  $\mathbf{v}$  dirigido e pela localização do ponto  $P$ .

- 1 Descreva os passos necessários à transformação pedida.
- 2 Escreva a concatenação referida a  $R_L(\theta)$



## Exercício 5

A pirâmide definida pelas coordenadas  $A(0, 0, 0)$ ,  $B(1, 0, 0)$ ,  $C(0, 1, 0)$  e  $D(0, 0, 1)$  é rodada de  $45^\circ$  em torno de uma linha  $L$ , que tem a direcção  $\mathbf{v} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$  e que passa pelo ponto  $C(0, 1, 0)$ . Determine as coordenadas do objecto rodado.





## Exercício 6

Determine a transformação correspondente à reflexão a um dado plano.

