

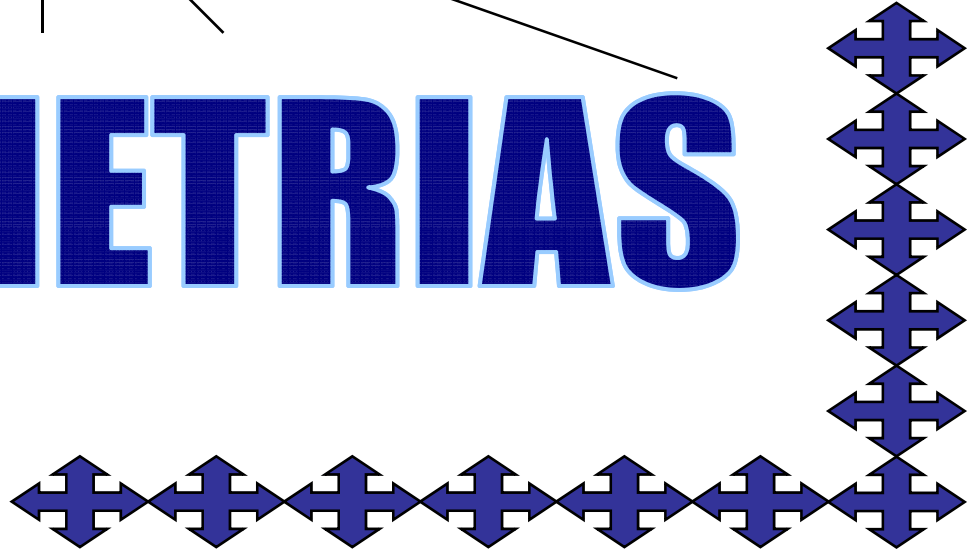


# ISOMETRIAS



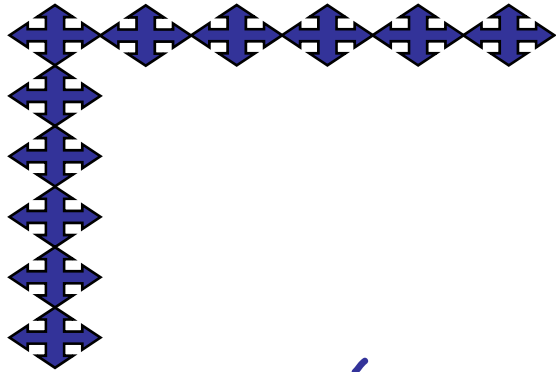
&

# SIMETRIAS



Helena Melo

Departamento de Matemática  
Universidade dos Açores



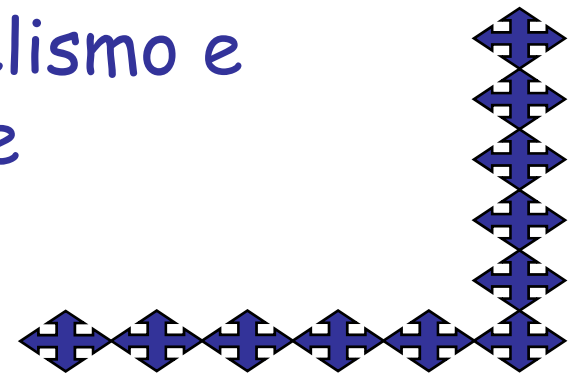
# ISOMETRIA

É uma transformação que preserva a distância entre pontos.

Preserva: Colinearidade e ordem dos pontos

Amplitude da ângulos

Relações de paralelismo e perpendicularidade





## Algumas propriedades da isometria:

- ❖ Se fixa dois pontos distintos, então fixa ponto a ponto a recta que os dois pontos determinam.
- ❖ Se fixa três pontos não colineares, então fixa todos os pontos do plano, ou seja, a isometria é a identidade,  $Id$ .
- ❖ Uma isometria fica univocamente definida pelo conhecimento dos transformados de três pontos não colineares.

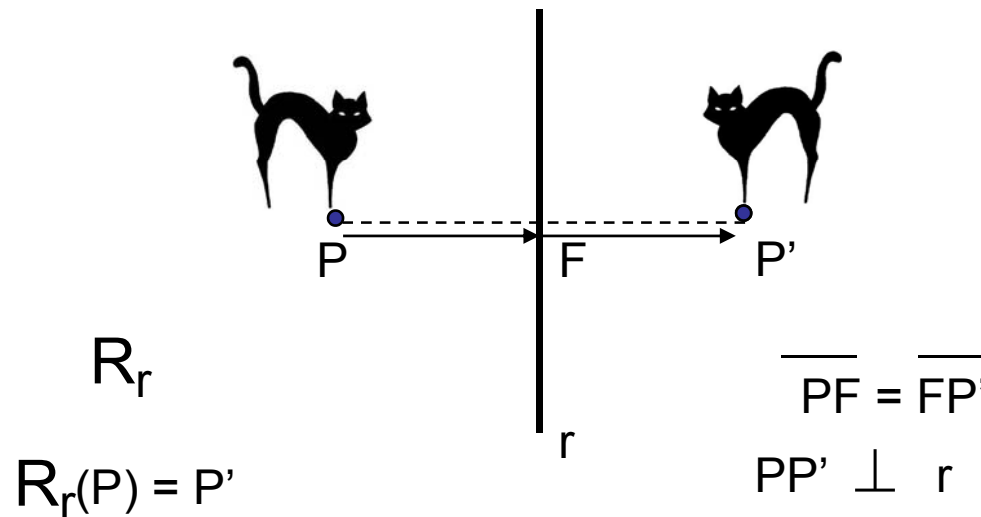


# REFLEXÃO

Uma reflexão de eixo  $r$  no plano é uma isometria (um movimento rígido) que transforma um ponto  $P$  numa sua imagem  $P'$ , tal que a distância do ponto ao eixo de reflexão é igual a distância da imagem deste ponto a este mesmo eixo.


O ponto e o seu transformado definem uma recta perpendicular ao eixo de reflexão.

O eixo de reflexão é a mediatriz do segmento de recta  $[PP']$ .





# Propriedades da REFLEXÃO

- ✦ Fixa pontualmente o eixo de reflexão.
  - ✦ Fixa qualquer recta perpendicular ao eixo de reflexão, mas não pontualmente.
  - ✦ É uma isometria oposta (imprópria), pois inverte a orientação no plano.
  - ✦ A composição de duas reflexões não é uma reflexão.
  - ✦ A composição de duas reflexões de mesmo eixo é a identidade.
- 



## Propriedades da REFLEXÃO

- ✦ A composição de duas reflexões, em geral, não é comutativa, a não ser que os eixos sejam coincidentes ou perpendiculares.

$$R_r \circ R_s = R_s \circ R_r \Leftrightarrow r = s \vee r \perp s$$

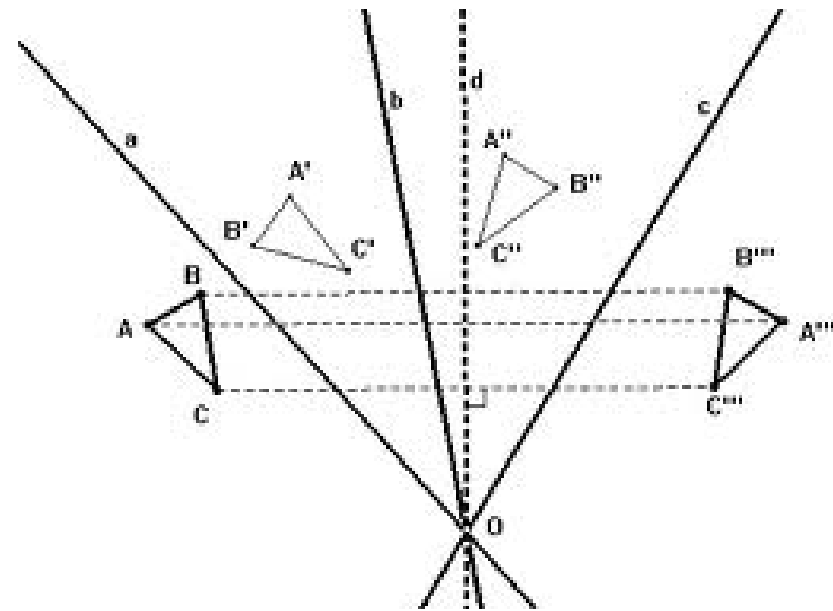
- ✦ Uma isometria que preserva a orientação no plano é no máximo a composição de duas reflexões.
- ✦ Uma isometria é no máximo a composição de três reflexões.



# Propriedades da REFLEXÃO

- ✦ A composição de três reflexões de eixos pertencentes a um mesmo feixe é uma reflexão cujo eixo pertence a este feixe.

**Exemplo:**  $[ABC]$  é transformado em  $[A'B'C']$  pela reflexão de eixo  $a$ , por sua vez  $[A'B'C']$  é transformado em  $[A''B''C'']$  pela reflexão de eixo  $b$ , e  $[A''B''C'']$  é transformado em  $[A'''B'''C''']$  pela reflexão de eixo  $c$ , onde  $a, b, c$  pertencente ao feixe por  $O$ .  
Obtemos o transformado  $[A'''B'''C''']$  pela reflexão de eixo  $d$ , que pertence ao feixe por  $O$ .

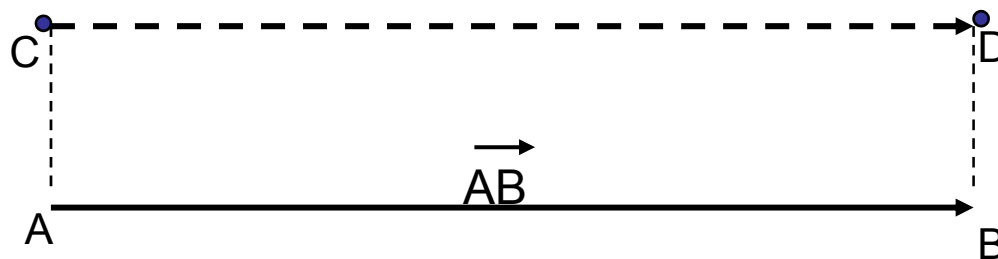




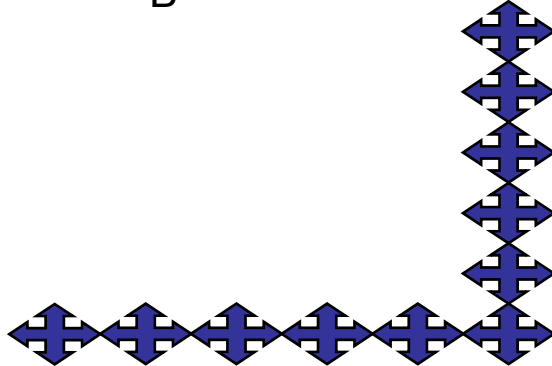
# TRANSLAÇÃO

A translação definida por um vector  $\overrightarrow{AB}$  é a transformação que a cada ponto  $C$  do plano faz corresponder um ponto  $D$  tal que:

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$$



$$T_{\overrightarrow{v}} = T_{\overrightarrow{AB}}$$

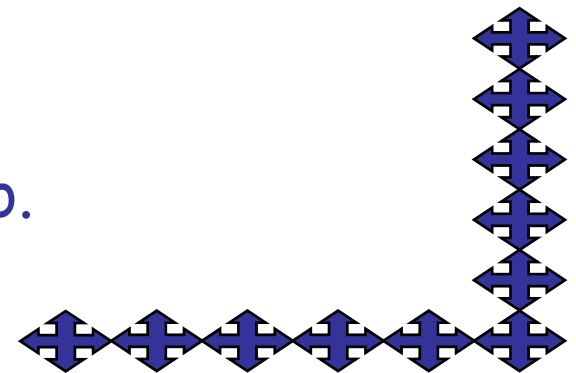
$$T_{\overrightarrow{AB}}(C) = D$$






## Propriedades da TRANSLAÇÃO

- ✦ A translação trivial (vector nulo) é a identidade.
- ✦ A translação não trivial não fixa os pontos.
- ✦  $T_{\vec{v}}$ ,  $\vec{v} \neq \vec{0}$ , fixa, não pontualmente, qualquer recta com a direcção de  $\vec{v}$ .
- ✦ Preserva direcções.
- ✦ É uma isometria directa (própria), pois conserva a orientação no plano.





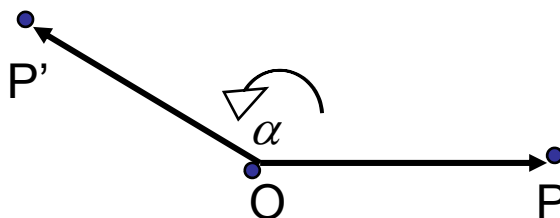
# Propriedades da TRANSLAÇÃO

- ❖ A composição de duas translações é uma translação.
- ❖ A translação é a composição de duas reflexões de eixos paralelos, cuja distância entre eles é metade do vector de translação e estes eixos são ortogonais ao vector de translação.
- ❖ O conjunto das translações munido da operação composição é um grupo comutativo.



# ROTAÇÃO

A rotação de centro  $O$  e amplitude  $\alpha$  é uma isometria que fixa o ponto  $O$  e transforma um ponto  $P$  distinto de  $O$  (o centro) num ponto  $P'$  tal que  $|\overrightarrow{OP}| = |\overrightarrow{OP'}|$  e cujo ângulo orientado  $\angle(OP, OP')$  tem amplitude  $\alpha$ .

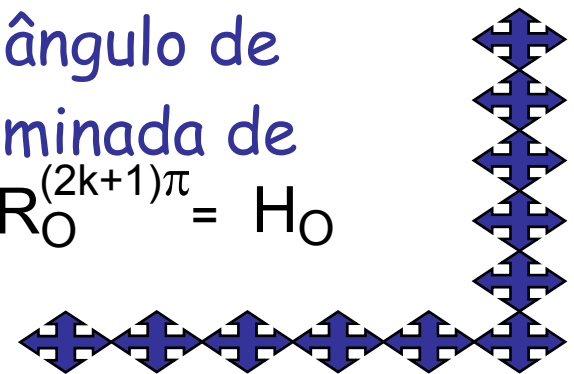


$$R_O^\alpha$$
$$R_O^\alpha(P) = P'$$



## Propriedades da ROTAÇÃO

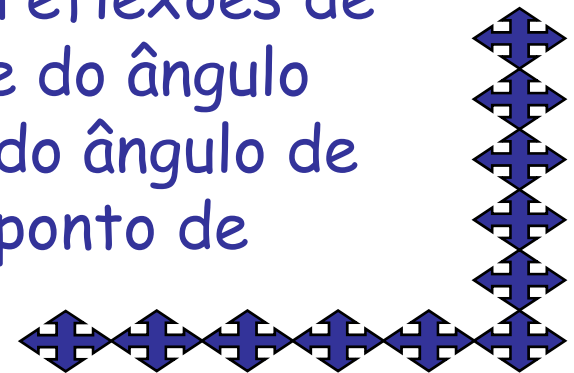
- ✦ A rotação trivial (amplitude nula) é a identidade.
- ✦ A rotação não trivial fixa um só ponto que é o centro da rotação.
- ✦ A rotação não trivial fixa, não pontualmente, qualquer recta que passe pelo seu centro desde que a amplitude do ângulo de rotação seja de  $180^\circ$ .
- ✦ A rotação cuja a amplitude do seu ângulo de rotação é de  $(2k+1)\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  e denominada de meia-volta, ou reflexão em ponto.  $R_O^{(2k+1)\pi} = H_O$





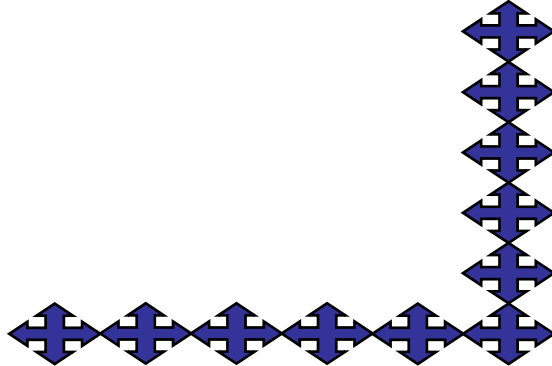
## Propriedades da ROTAÇÃO

- ✦ É uma isometria directa (própria), pois conserva a orientação no plano.
- ✦ A composição de duas rotações (com mesmo centro) é uma rotação.
- ✦ A composição de duas rotações quaisquer pode ser uma rotação, ou uma translação.
- ✦ A rotação é a composição de duas reflexões de eixos concorrentes, cuja amplitude do ângulo entre eles é metade da amplitude do ângulo de rotação e o centro de rotação é o ponto de intersecção dos eixos.





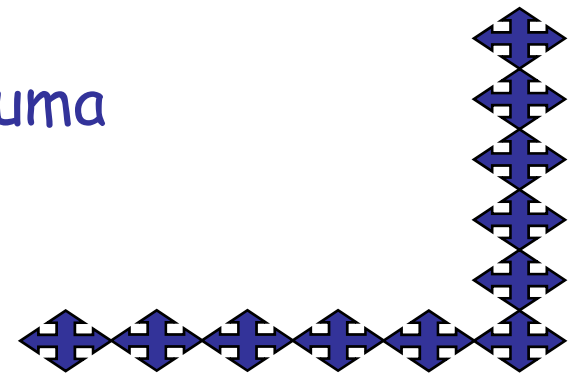
## Propriedades da ROTAÇÃO

- ❖ A meia-volta é a composição de duas reflexões de eixos perpendiculares.
  - ❖ A composição de duas meias-voltas é uma traslação cujo vector de traslação é o dobro do vector definido pelos pontos relativos a cada uma das meias-voltas.  $H_O \circ H_P = T_{2\overrightarrow{PO}}$
  - ❖ A composição de três meias-voltas é uma meia-volta.
- 



## Propriedades da ROTAÇÃO

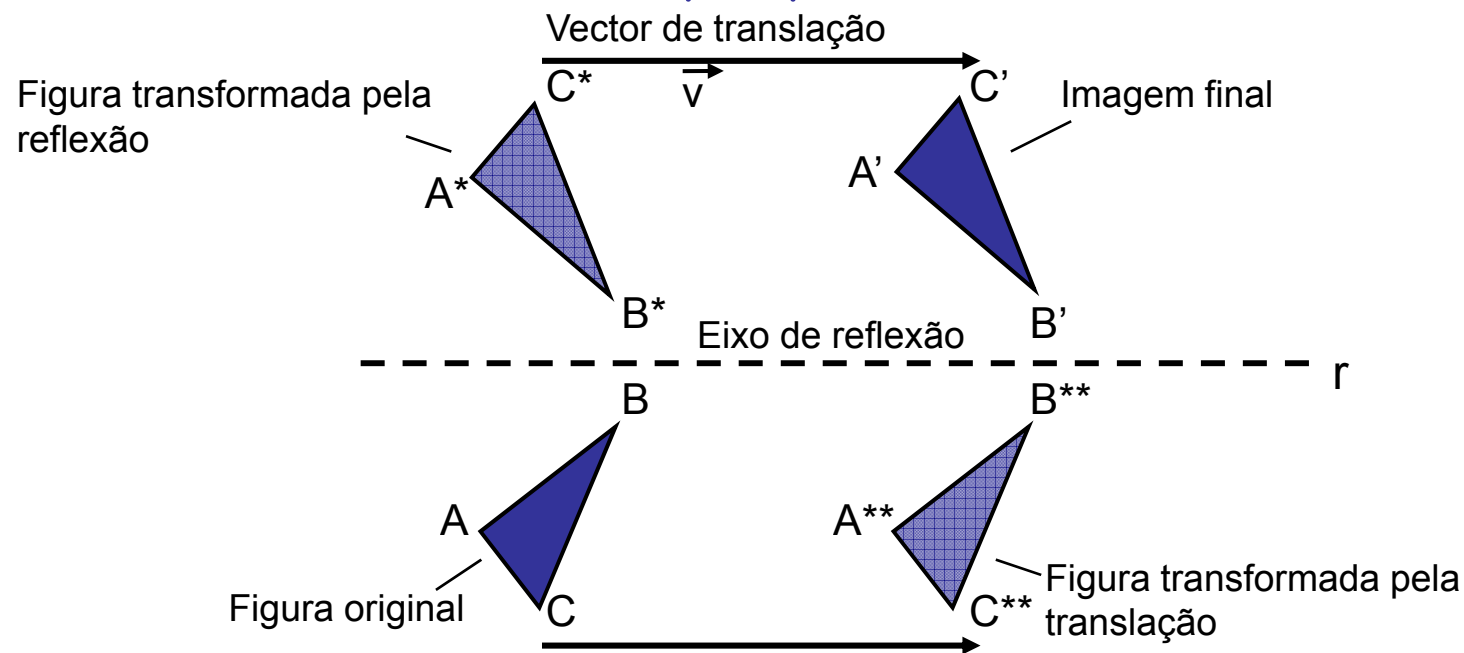
- ✦ A composição de quatro meias-voltas é a identidade se os pontos relativos a cada uma das meias-voltas formarem um paralelogramo, na mesma ordem.  $H_O \circ H_P \circ H_Q \circ H_R = Id \iff [OPQR]$   
paralelogramo
- ✦ O conjunto das rotações com um mesmo centro munido da operação composição é um grupo comutativo.
- ✦ A composição de uma rotação com uma translação não é comutativa.



# REFLEXÃO DESLIZANTE

Uma reflexão deslizante (ou translação reflectida), tal como o nome sugere, é uma isometria que consiste numa reflexão seguida de uma translação ou vice-versa.

O eixo da reflexão é sempre paralelo à direcção de translação.



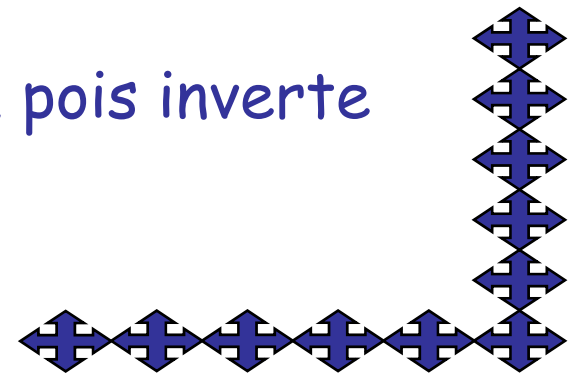
$$D_{(r, \vec{v})} = R_r \circ T_{\vec{v}} = T_{\vec{v}} \circ R_r$$





## Propriedades da REFLEXÃO DESLIZANTE

- ✦ Não tem pontos fixos.
- ✦ Fixa apenas o eixo de reflexão, mas não pontualmente.
- ✦ Se  $P$  é um ponto do plano e  $P'$  o seu transformado, então o ponto médio do segmento de recta  $[PP']$  pertence ao eixo da reflexão deslizante.
- ✦ É uma isometria oposta (imprópria), pois inverte a orientação no plano.





## Propriedades da REFLEXÃO DESLIZANTE

- ❖ A reflexão deslizante cujo vector de translação é o vector nulo é uma reflexão.
- ❖ A reflexão deslizante, de vector de translação não nulo, é a composição de três reflexões, cujos eixos não pertencem ao mesmo feixe.
- ❖ A composição de duas reflexões deslizantes não é uma reflexão deslizante.



## Quadro resumo das Isometrias

	Número de reflexões	Pontos fixos	Rectas fixas	Orientação
<b>Identidade</b> $\text{Id}$	2	todos	todas	preserva
<b>Reflexão</b> $R_r$	1	pontos de $r$	$r$ (pont.) $\perp r$ (não pont.)	inverte
<b>Translação</b> $T_{\vec{v}}$ $\vec{v} \neq \vec{0}$	2	nenhum	rectas na direcção de $\vec{v}$ (não pont.)	preserva
<b>Rotação</b> $R_O^\alpha$ $\alpha \neq k.\pi$	2	ponto $O$	nenhuma	preserva
<b>Meia-volta</b> $R_O^\alpha$ $\alpha = (2k+1).\pi$	2	ponto $O$	rectas passando por $O$ (não pont.)	preserva
<b>Reflexão deslizante</b> $D_{(r, \vec{v})}$	3	nenhum	$r$ (não pont.)	inverte

# Identificação da Isometria

$$\triangle[ABC] \equiv \triangle[A'B'C']$$

Preserva orientação?

Sim

$$\vec{AA'} = \vec{BB'} = \vec{CC'}$$

**Translação** segundo  
o vector  $\vec{AA'}$

$$\overline{AA'} \neq \overline{BB'} \text{ ou } \overline{AA'} \neq \overline{CC'}$$

**Rotação** de centro  
em  $m[AA'] \cap m[BB']$

Não

$$AA' \parallel BB' \parallel CC'$$

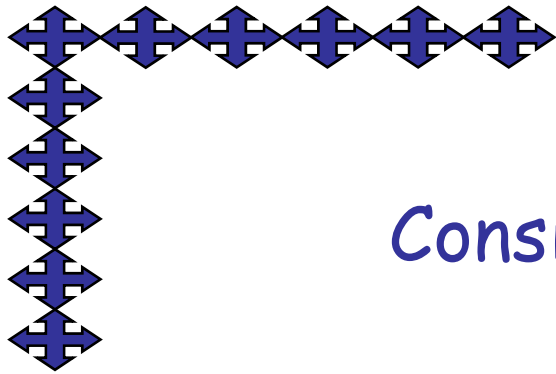
**Reflexão** de eixo  
em  $m[AA']$

$$AA' \nparallel BB' \nparallel CC'$$

**Reflexão deslizante**  
de eixo  $M_{[AA']}M_{[BB']}$

$m[AA']$  denota a mediatriz do segmento de recta  $[AA']$

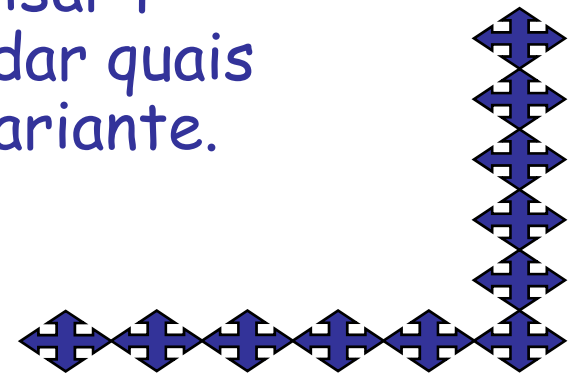
$M_{[AA']}$  denota o ponto médio do segmento de recta  $[AA']$



Consideremos uma figura  $F$  como um conjunto de pontos.

Estudar estaticamente  $F$  consiste em analisar as propriedades métricas ou euclidiana de  $F$ , tais como os seus ângulos, convexidade, etc.

Mas também podemos analisar  $F$  dinamicamente, ou seja, estudar quais isometrias que deixam  $F$  invariante.

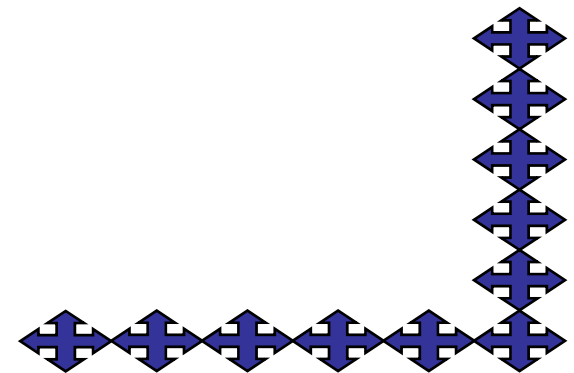




Consideremos  $S_F$  o conjunto de todas as isometrias que transformam  $F$  nela mesma, ou seja, deixa  $F$  invariante ou fixa.

Ao considerar a composição de isometrias (que são bijectivas) verificamos que:

- ◆ Se  $T$  e  $T' \in S_F$ , então  $T \circ T' \in S_F$ ;
- ◆ Se  $T \in S_F$ , então  $T^{-1} \in S_F$ ;
- ◆  $\text{Id} \in S_F$ .

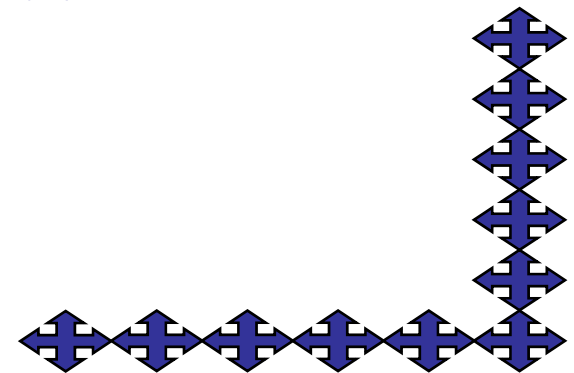


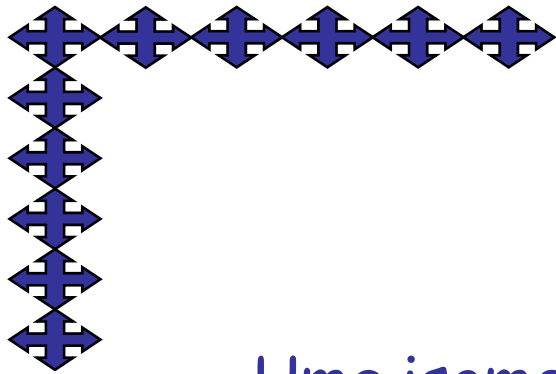


Então:

O conjunto de todas as isometrias,  $S_F$ , que transformam  $F$  nela mesma com a operação de composição é um grupo.

Assim, passamos a definir...





# SIMETRIA

Uma isometria  $f$  é uma simetria de uma figura  $F$  se  $f$  fixa  $F$ , isto é,  $f(F) = F$ .

O conjunto das simetrias de  $F$  com a operação de composição é o grupo de simetrias de  $F$ .

Nestas condições,  $F$  é denominado ornamento.

Se o grupo simétrico de uma figura contém apenas a identidade, a figura é chamada assimétrica.



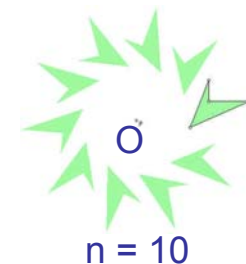


Dizemos que  $F$  possui:

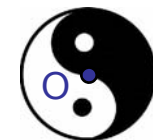
- ❖ Simetria axial - se a reflexão numa recta  $r$  faz parte das simetrias de  $F$ .  $R_r \in S_F$   
 $r$  é o eixo de simetria.



- ❖ Simetria rotacional (de ordem  $n$ ) - se a rotação de ordem  $n$  faz parte das simetrias de  $F$ .  $R_O^{360^\circ/n} \in S_F$

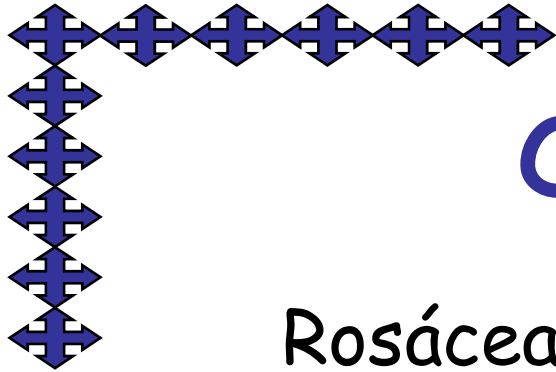


- ❖ Simetria central - se a meia-volta faz parte das simetrias de  $F$ .  $H_O \in S_F$



- ❖ Simetria translacional - se a translação faz parte das simetrias de  $F$ .  $T_{\vec{v}} \in S_F$



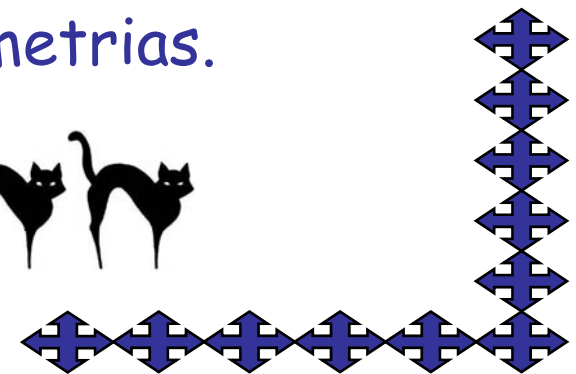


# ORNAMENTOS

Rosáceas ou Rosetas - são ornamentos que não possuem simetria translacional no seu grupo de simetrias.



Frisos ou Fitas ou Faixas - são ornamentos que possuem simetria translacional numa só direcção no seu grupo de simetrias.





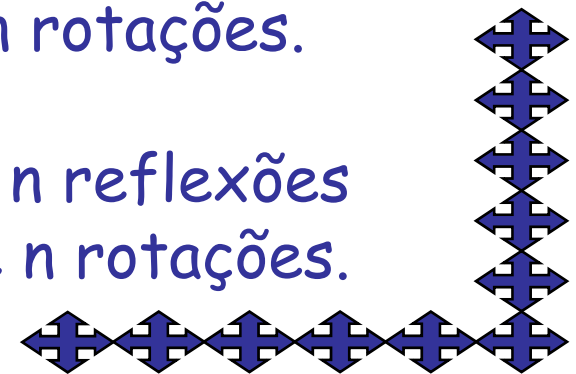
# ROSÁCEAS

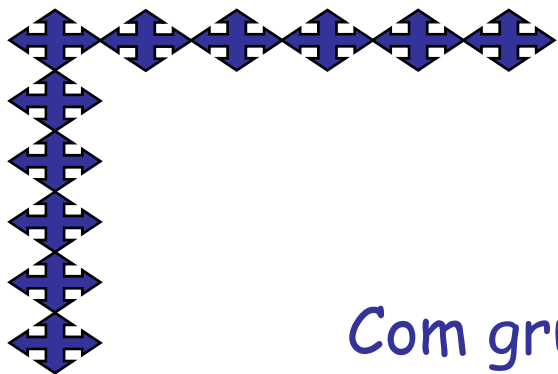
É a repetição de uma figura inicial, denominada o motivo do padrão, em torno de um centro.

Pode ter reflexões, cujos eixos passam pelo centro de rotação, ou não. São, por isso, classificadas respectivamente como diedrais ou cíclicas,

Assim, uma rosácea é um ornamento que tem por grupo de simetria:

- ❖ O grupo cíclico  $C_n$ ,  $n \geq 1$ , com  $n$  rotações.
- ❖ O grupo diedral  $D_n$ ,  $n \geq 1$ , com  $n$  reflexões e  $n$  rotações.

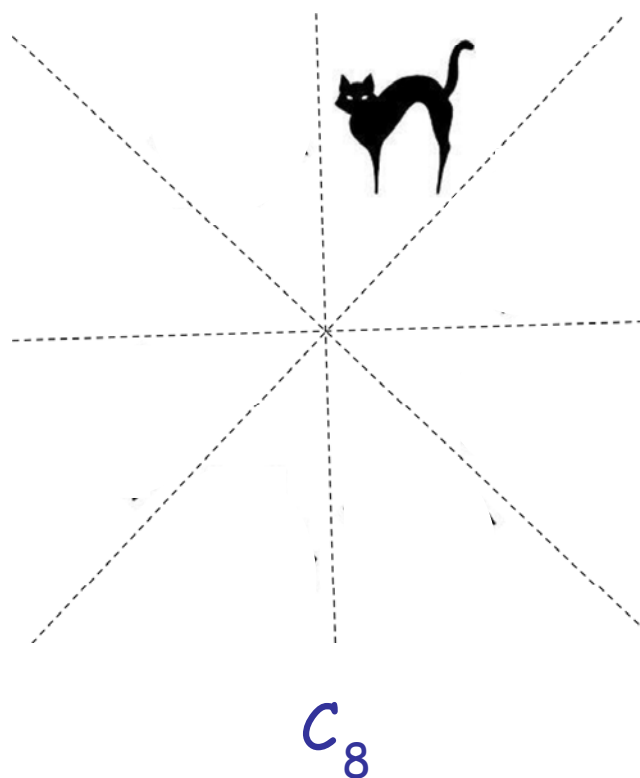




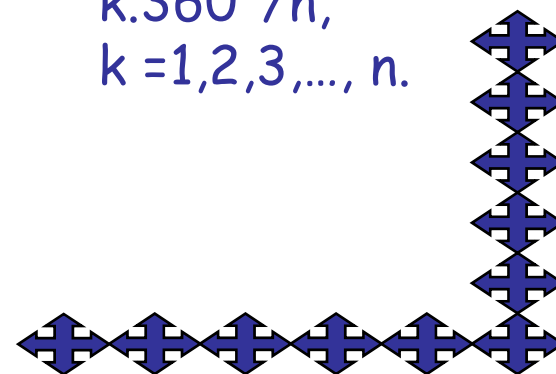
# ROSÁCEAS

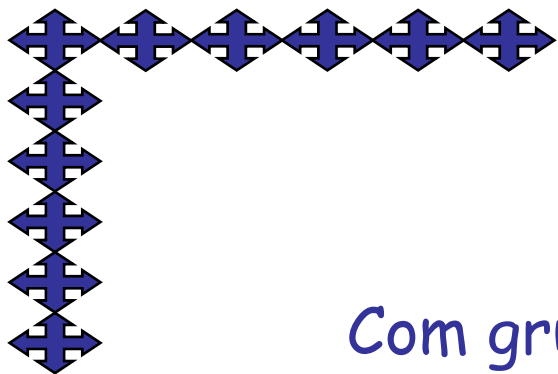
Com grupo cíclico  $C_n$ ,  $n \geq 1$ , com  $n$  rotações.

1. Divisão do círculo em  $n$  sectores iguais e colocar uma configuração num dos sectores.



2. Considerar os transformados pela rotação de centro no centro do círculo com ângulo de amplitude igual a  $k \cdot 360^\circ / n$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots, n$ .

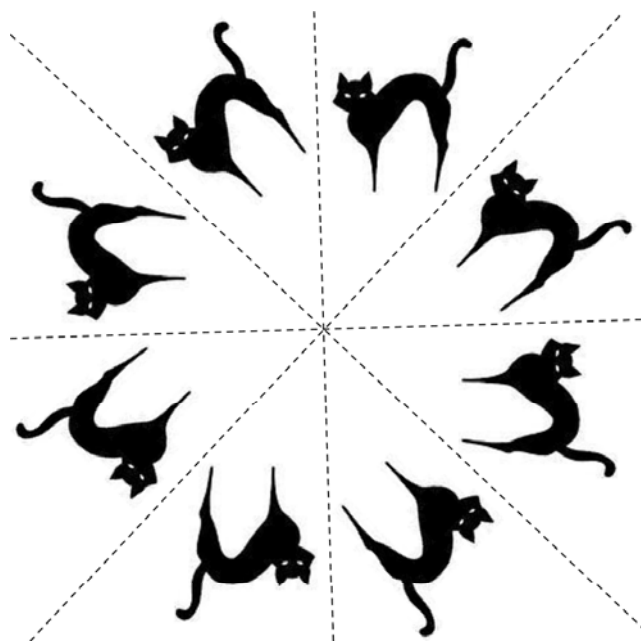




# ROSÁCEAS

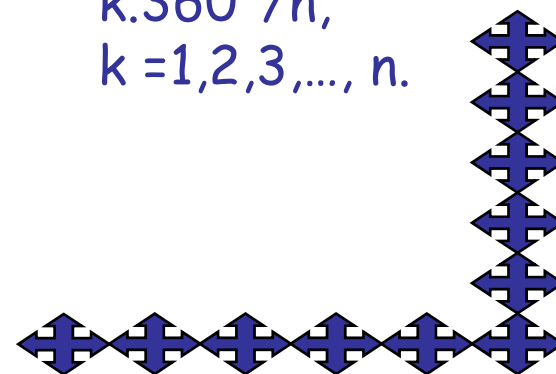
Com grupo cíclico  $C_n$ ,  $n \geq 1$ , com  $n$  rotações.

1. Divisão do círculo em  $n$  sectores iguais e colocar uma configuração num dos sectores.



$C_8$

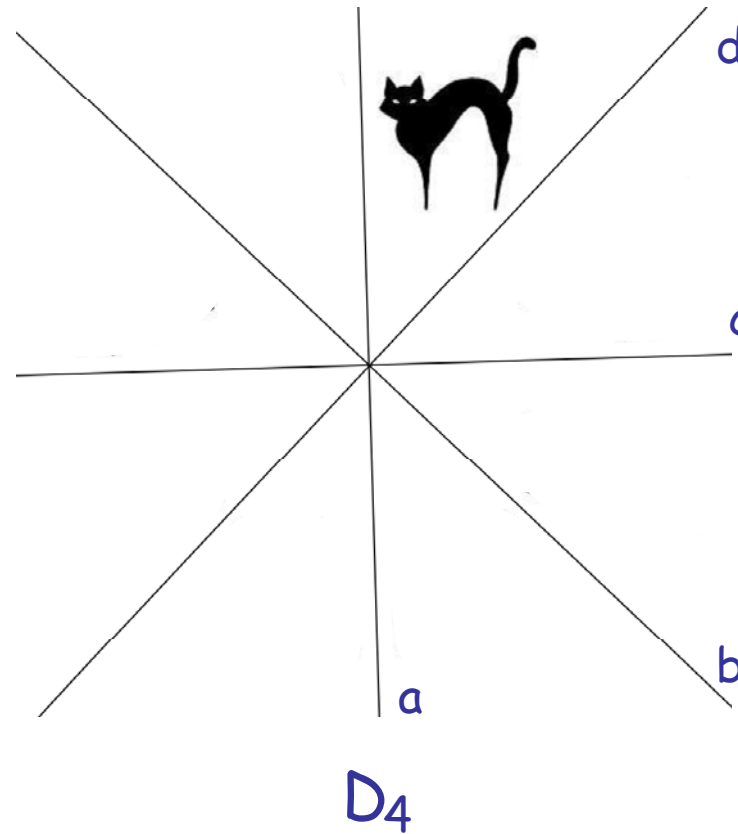
2. Considerar os transformados pela rotação de centro no centro do círculo com ângulo de amplitude igual a  $k \cdot 360^\circ / n$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots, n$ .



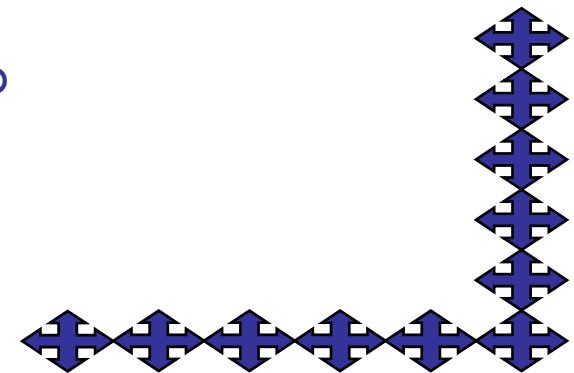
# ROSÁCEAS

Com grupo diedral  $D_n$ ,  $n \geq 1$ , com  $n$  reflexões e  $n$  rotações.

1. Divisão do círculo em  $2n$  sectores iguais e colocar uma configuração num dos sectores.



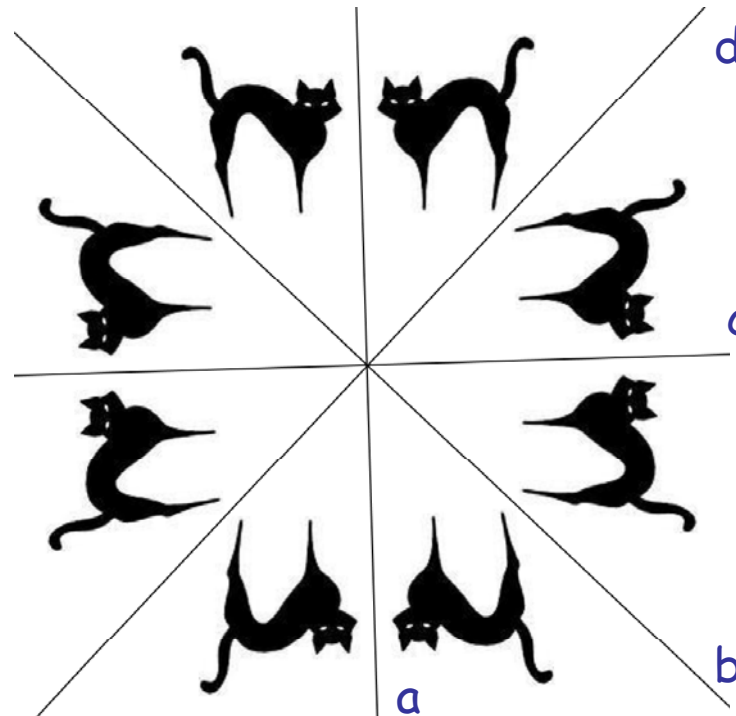
2. Reflectir sucessivamente a configuração segundo as rectas fronteiras dos sectores.



# ROSÁCEAS

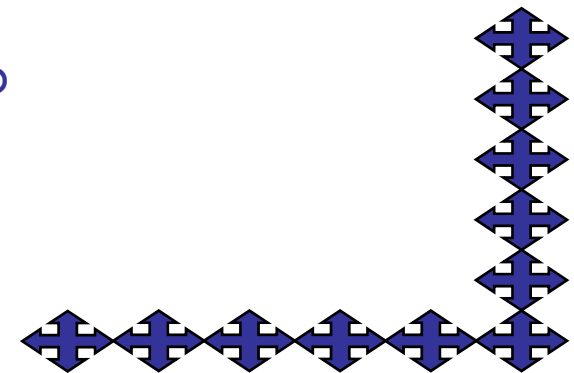
Com grupo diedral  $D_n$ ,  $n \geq 1$ , com  $n$  reflexões e  $n$  rotações.

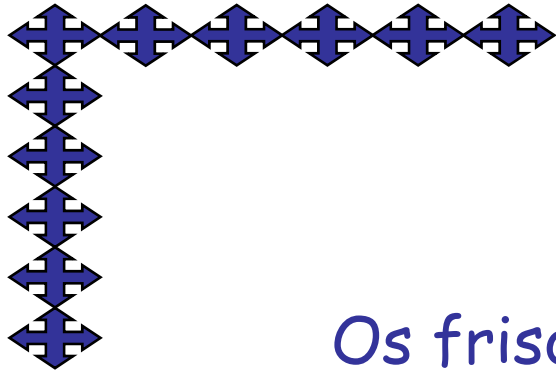
1. Divisão do círculo em  $2n$  sectores iguais e colocar uma configuração num dos sectores.



$D_4$

2. Reflectir sucessivamente a configuração segundo as rectas fronteiras dos sectores.



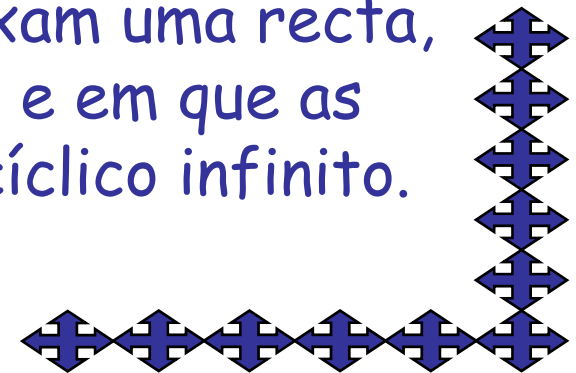


# FRISOS

Os frisos são ornamentos em que existe simetria translacional apenas numa direcção.

Podem existir reflexões, reflexões deslizantes e/ou rotações de  $180^\circ$  (meias-voltas), ou não. São, por isso, classificados de acordo com as isometrias que apresentam.

Assim, um friso tem por grupo de simetrias um conjunto de isometrias do plano que fixam uma recta, não pontualmente, o centro do friso, e em que as translações constituem um subgrupo cíclico infinito.







# FRISOS

Se considerarmos as simetrias existentes num friso, verificamos que só existem 7 grupos de simetria, de frisos, distintos.

Há diferentes notações para os frisos:

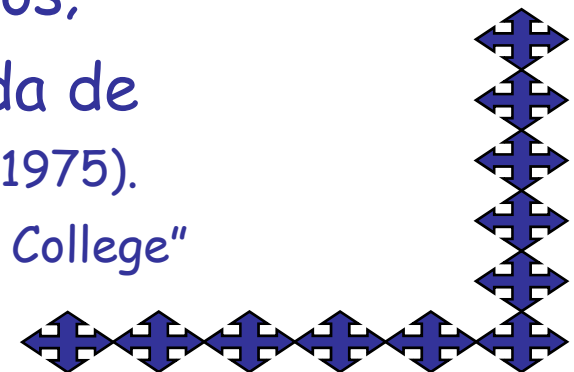
✦ Notação de László Fejes Toth;

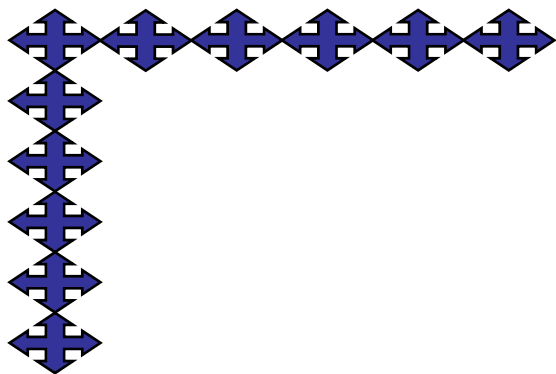
(Szeged, 12/03/1915 - Budapest, 17/03/ 2005)  
matemático húngaro - especialidade em geometria.

✦ Notação cristalográfica de 4 símbolos;

✦ Notação cristalográfica simplificada de  
Marjorie Senechal (1975).

Professora de matemática no "Smith College"  
onde estuda "tilings".





# FRISOS

Notação de Fejes Tóth

Notação  $F_x^y$

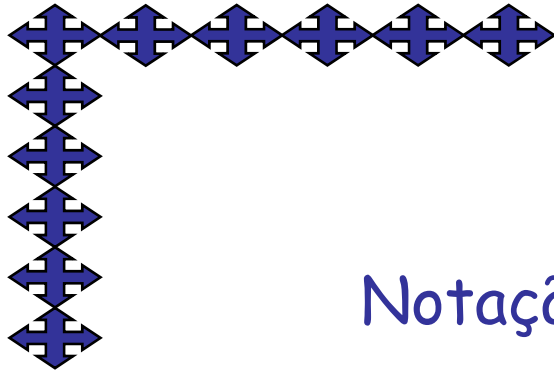
$x$   
(indica o número  
isometrias directas)

= { 1 só translação  
{ 2 translação e rotação de  $180^\circ$   
(meia-volta)

$y$   
(indica o tipo de  
isometria oposta)

= { 1 reflexão na horizontal  
{ 2 reflexão na vertical  
{ 3 reflexão deslizante





# FRISOS

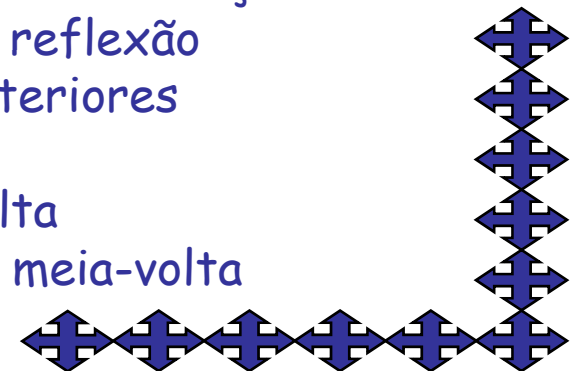
## Notação cristalográfica de 4 símbolos pxyz

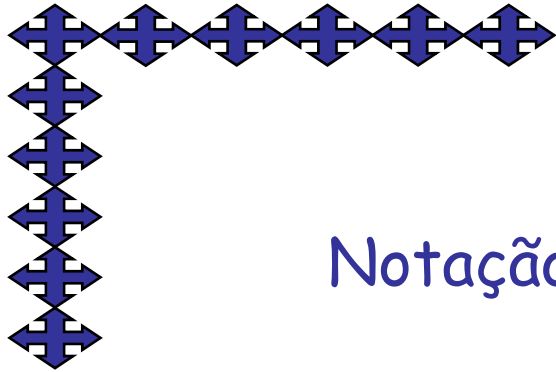
A letra p  
inicial  
significa  
célula  
primitiva

x = { m - se existe reflexão de eixo ortogonal à direcção da translação do friso  
{ 1 - se não tem nenhuma reflexão de eixo ortogonal à direcção da translação

y = { m - se existe reflexão de eixo com a mesma direcção da translação do friso  
{ a - se existe uma reflexão deslizante cujo eixo de reflexão é paralelo à direcção da translação, mas não uma reflexão  
{ 1 - nenhuma das duas anteriores

z = { 2 se existe uma meia-volta  
{ 1 no caso de não existir meia-volta





# FRISOS

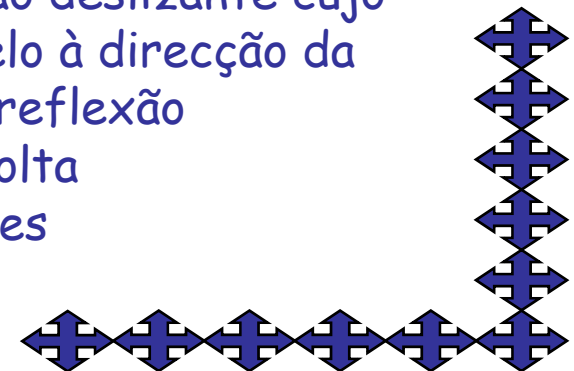
Notação cristalográfica simplificada de  
Marjorie Senechal

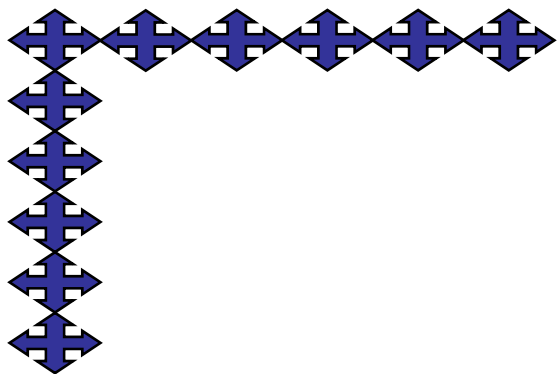
$xy$  ou  $pxy$

A letra p  
inicial  
(optativa)  
significa  
célula  
primitiva

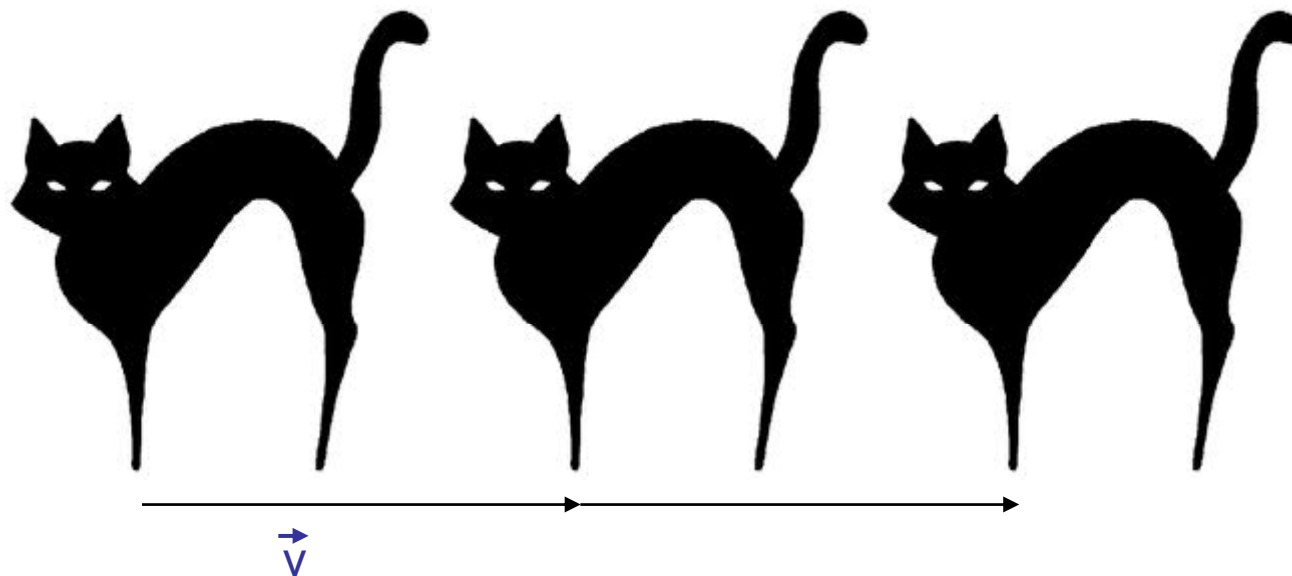
$x =$  { m - se existe reflexão de eixo ortogonal à direcção da translação do friso  
{ 1 - se não tem nenhuma reflexão de eixo ortogonal à direcção da translação

$y =$  { m - se existe reflexão de eixo com a mesma direcção da translação do friso  
{ g - se existe uma reflexão deslizante cujo eixo de reflexão é paralelo à direcção da translação, mas não uma reflexão  
{ 2 - se existe uma meia-volta  
{ 1 - nenhuma das anteriores





Apenas a translação

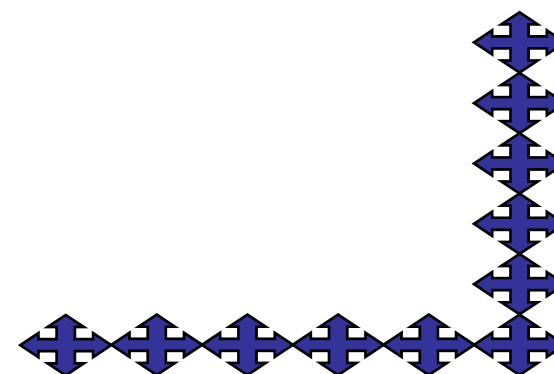


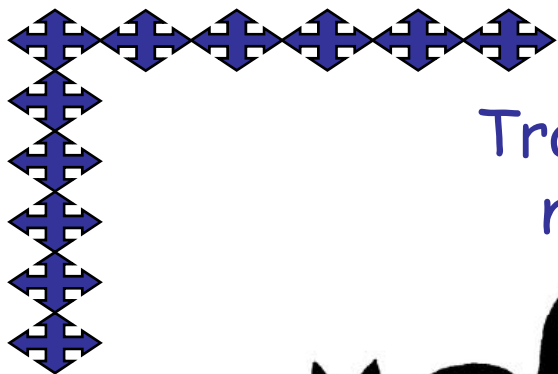
$\langle T_{\vec{v}} \rangle$

$F_1$

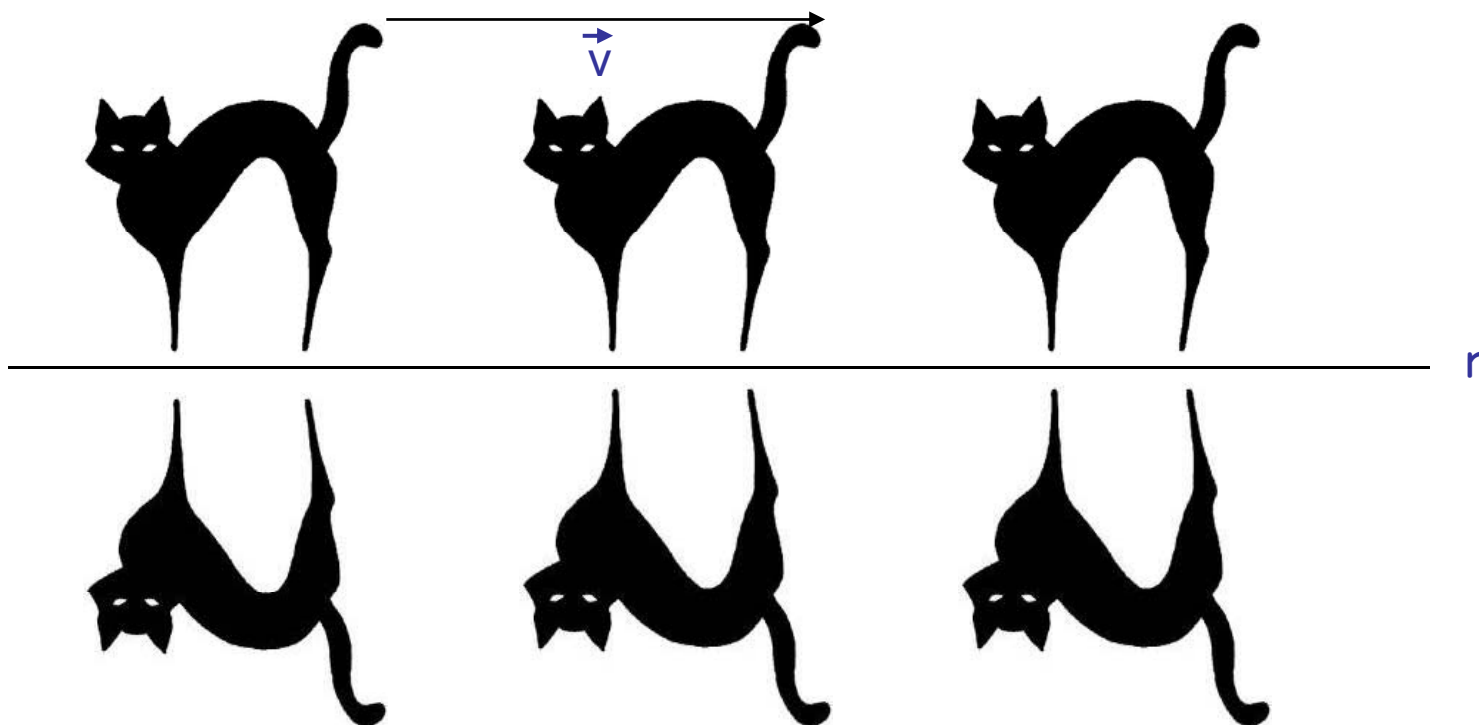
p111

11





Translação e reflexão de eixo  
na direcção da translação

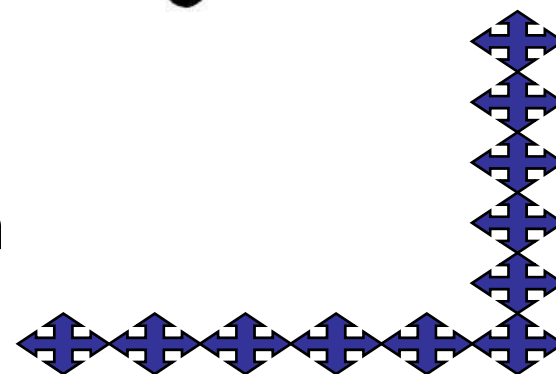


$\langle T_{\vec{v}}, R_r \rangle$

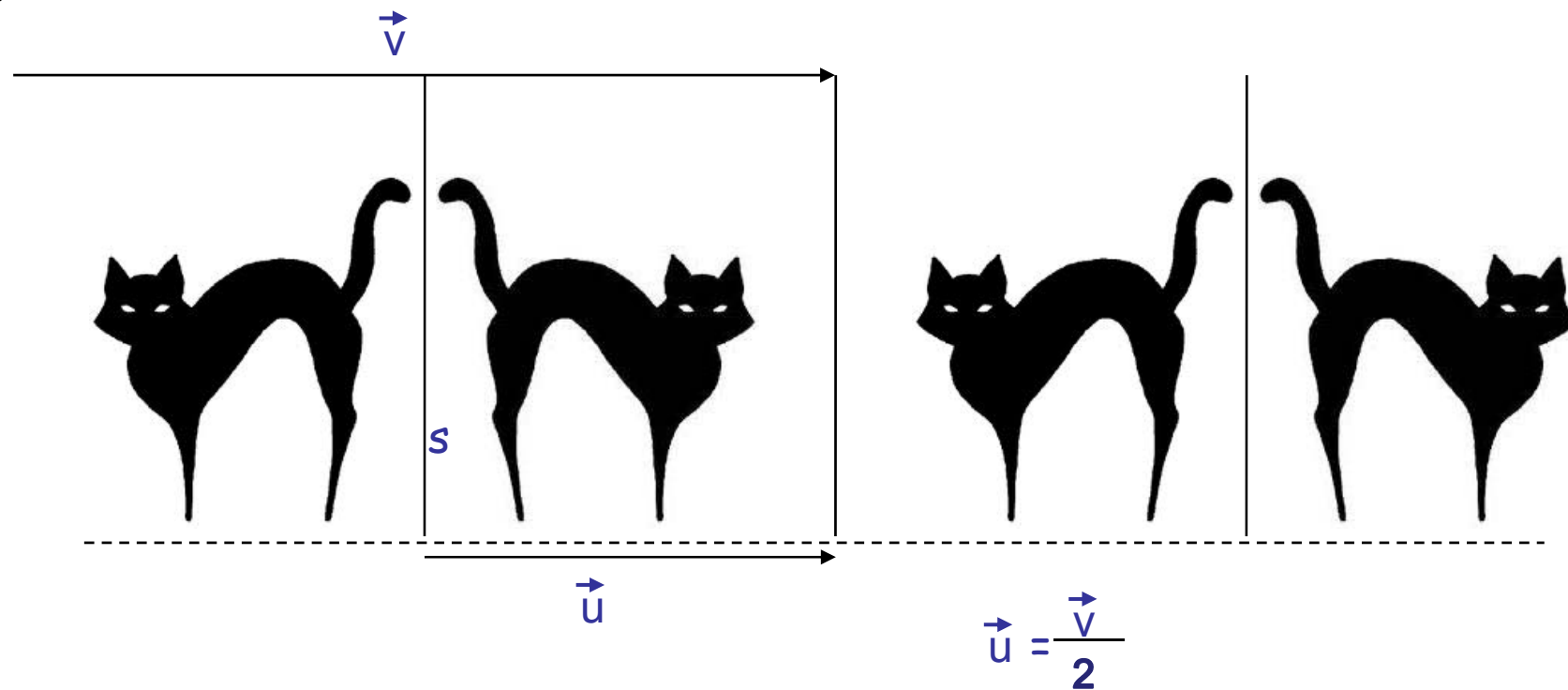
$F_1^1$

p1m1

1m



# Translação e reflexões de eixo ortogonal à direcção da translação



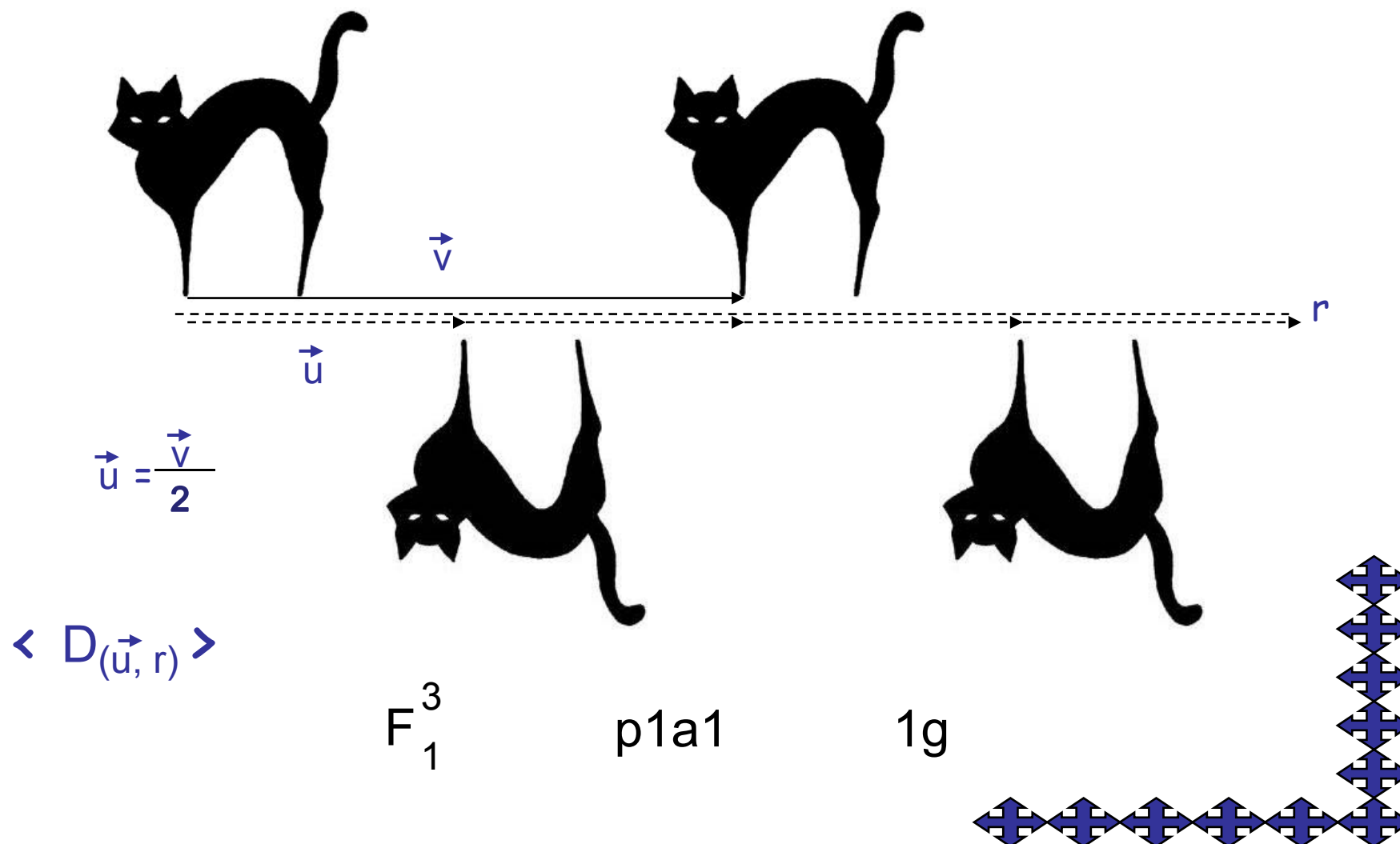
$\langle T_{\vec{v}}, R_s \rangle$

$F_1^2$

pm11

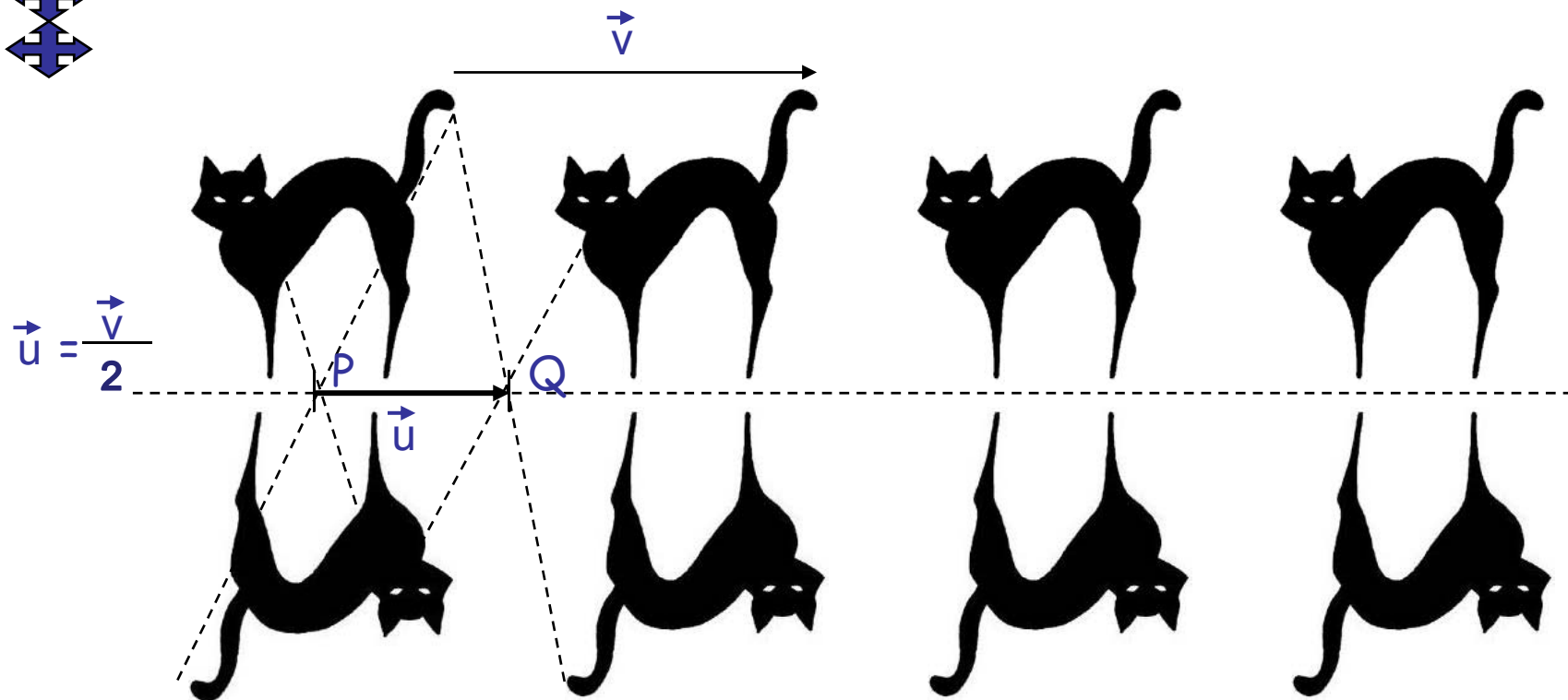
m1

Translação e reflexões deslizante de eixo paralelo à direcção da translação





# Translação e meia-volta



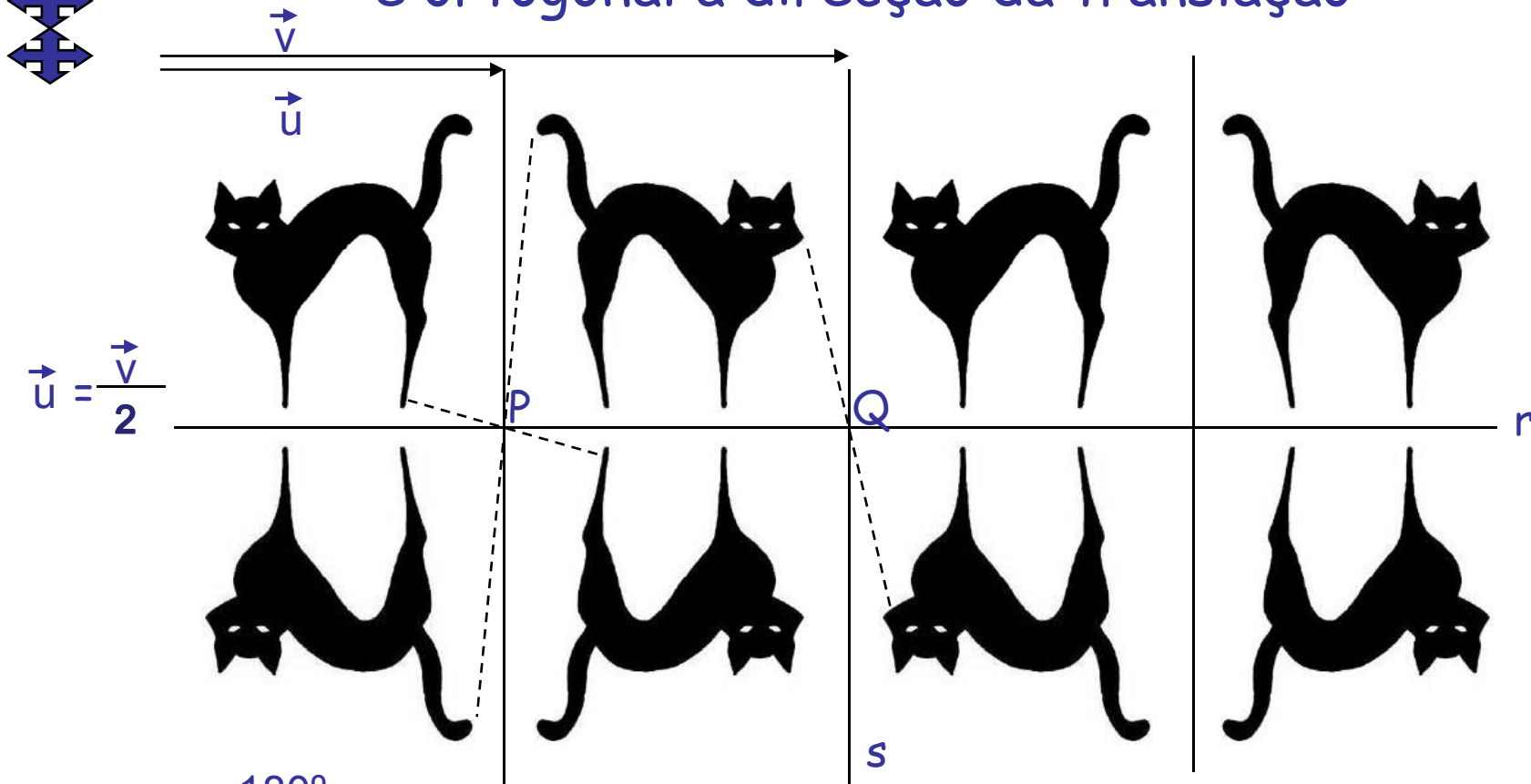
$$\langle T_{2\vec{PQ}}, R_P^{180^\circ} \rangle$$

$F_2$

p112

12

Translação, meias-voltas, reflexões na direcção  
e ortogonal à direcção da translação

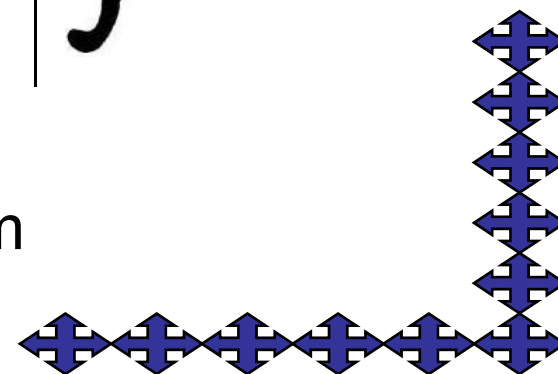


$\langle T_{2\vec{PQ}}, R_P^{180^\circ}, R_r \rangle$

$F_2^1$

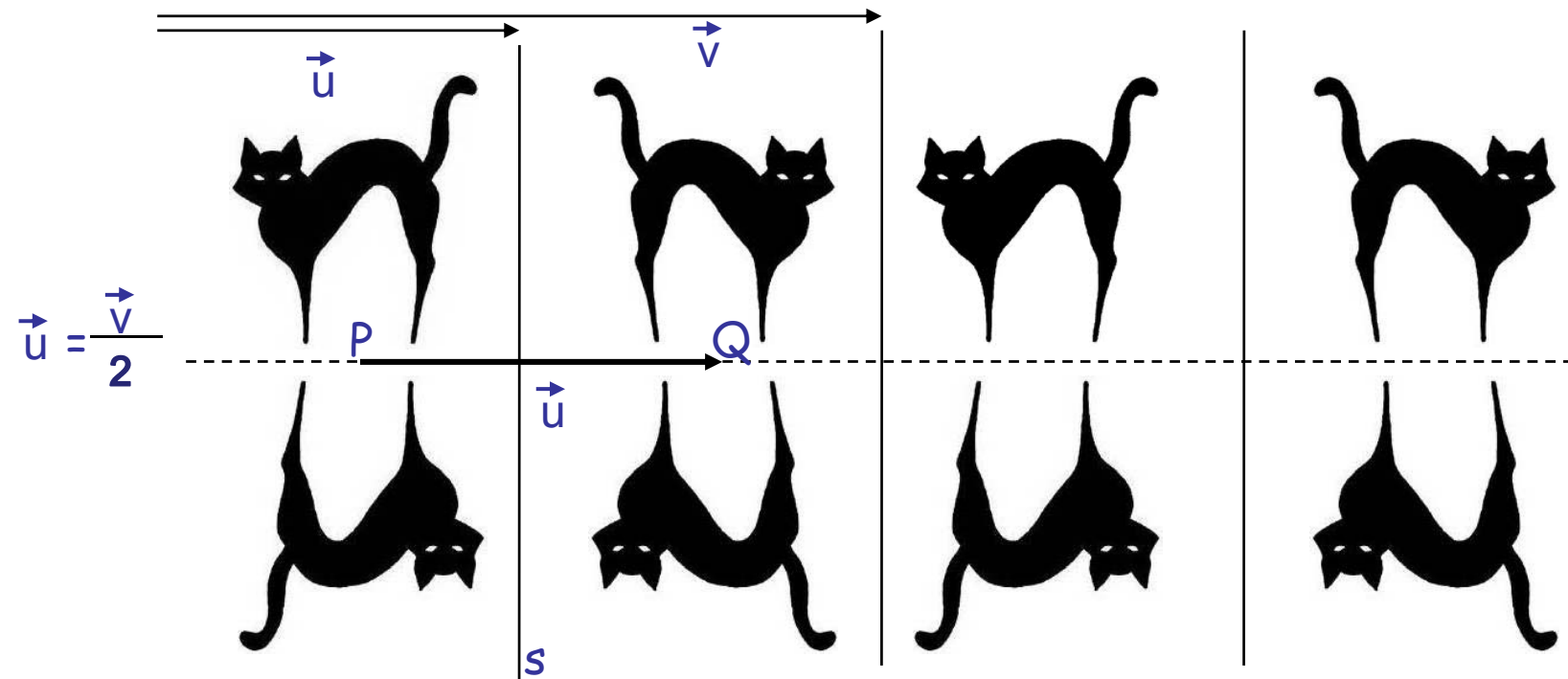
pmm2

mm





Translação, meias-voltas, reflexões de eixo ortogonal à direcção da translação e reflexões deslizantes de eixo paralelo à direcção da translação

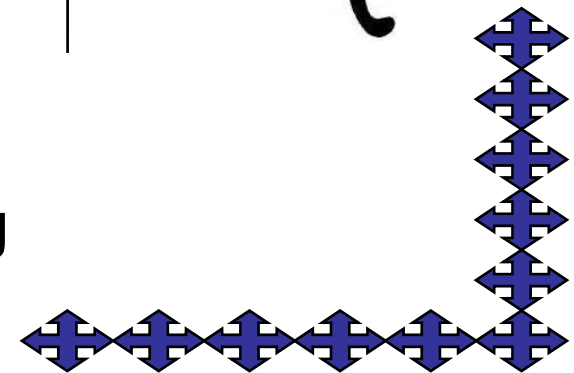


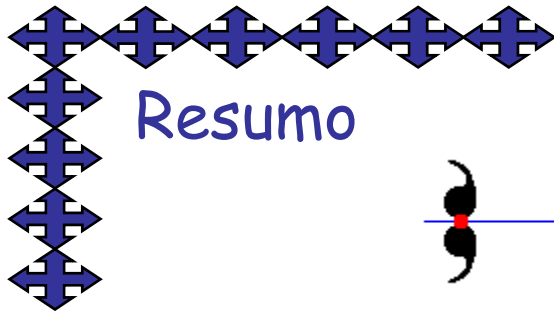
$$\langle D(\vec{u}, r), R_P^{180^\circ} \rangle$$

$F_2^2$

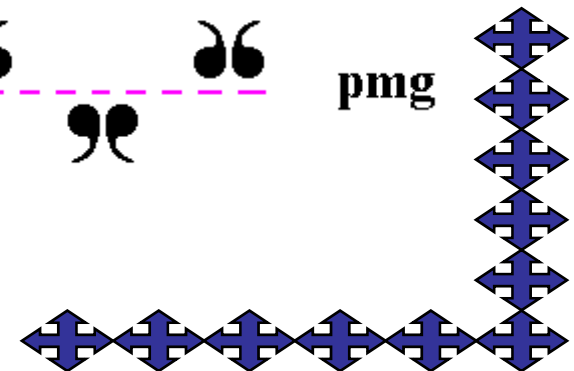
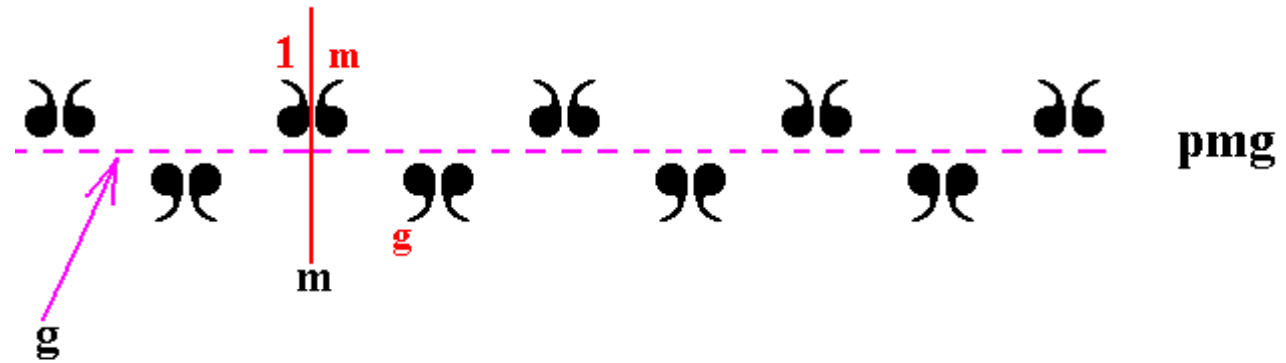
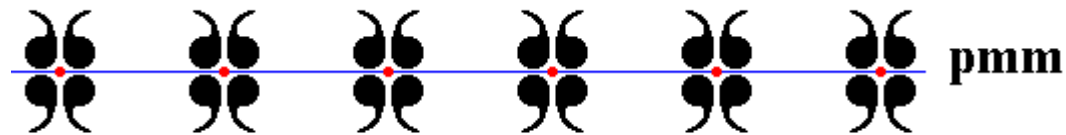
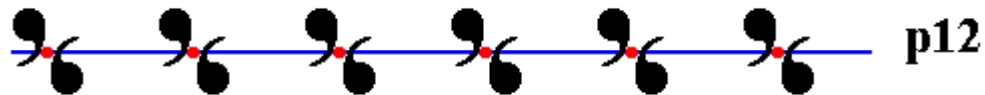
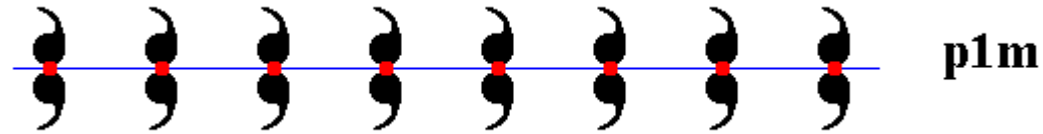
pma2

mg

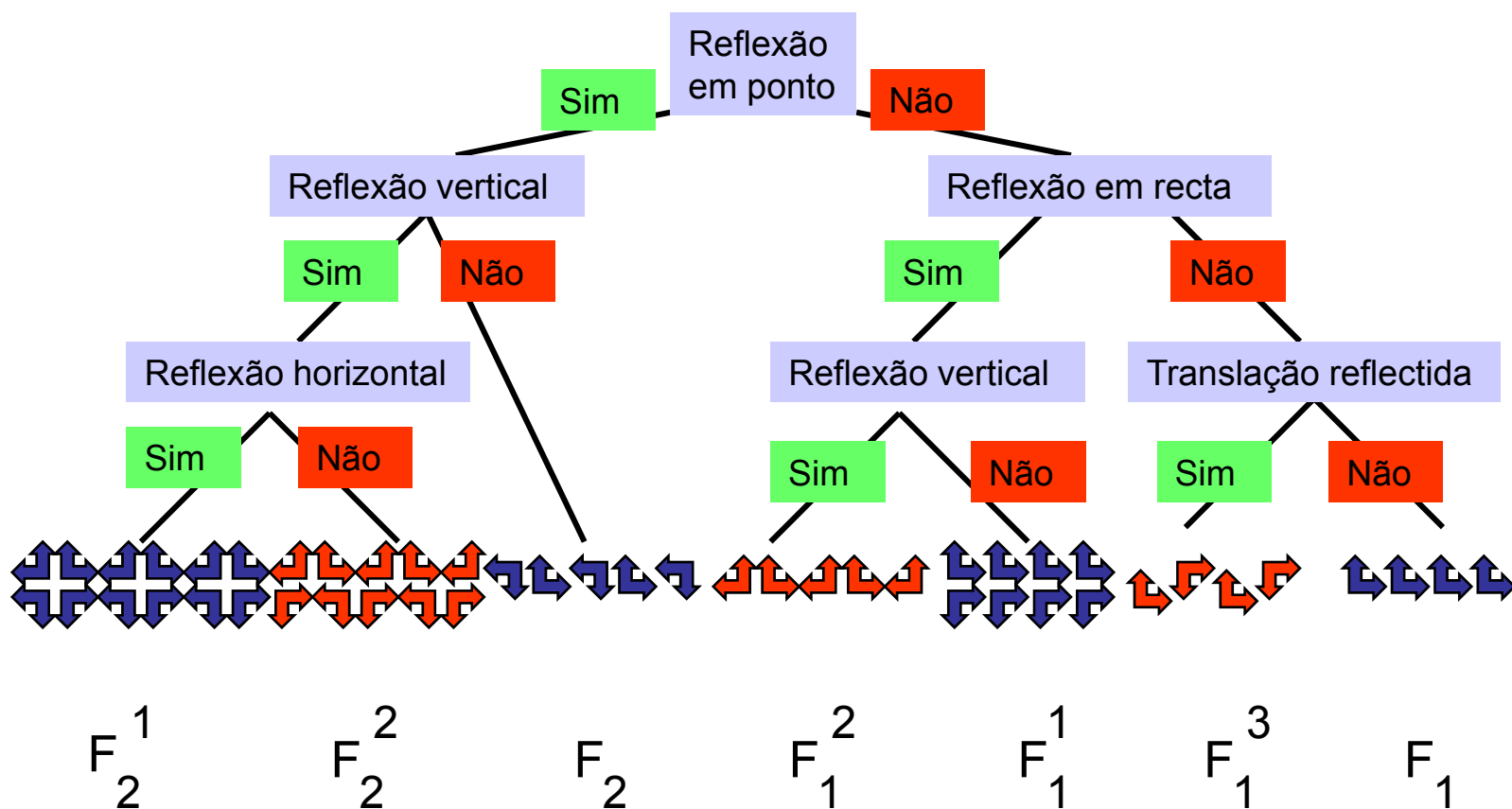




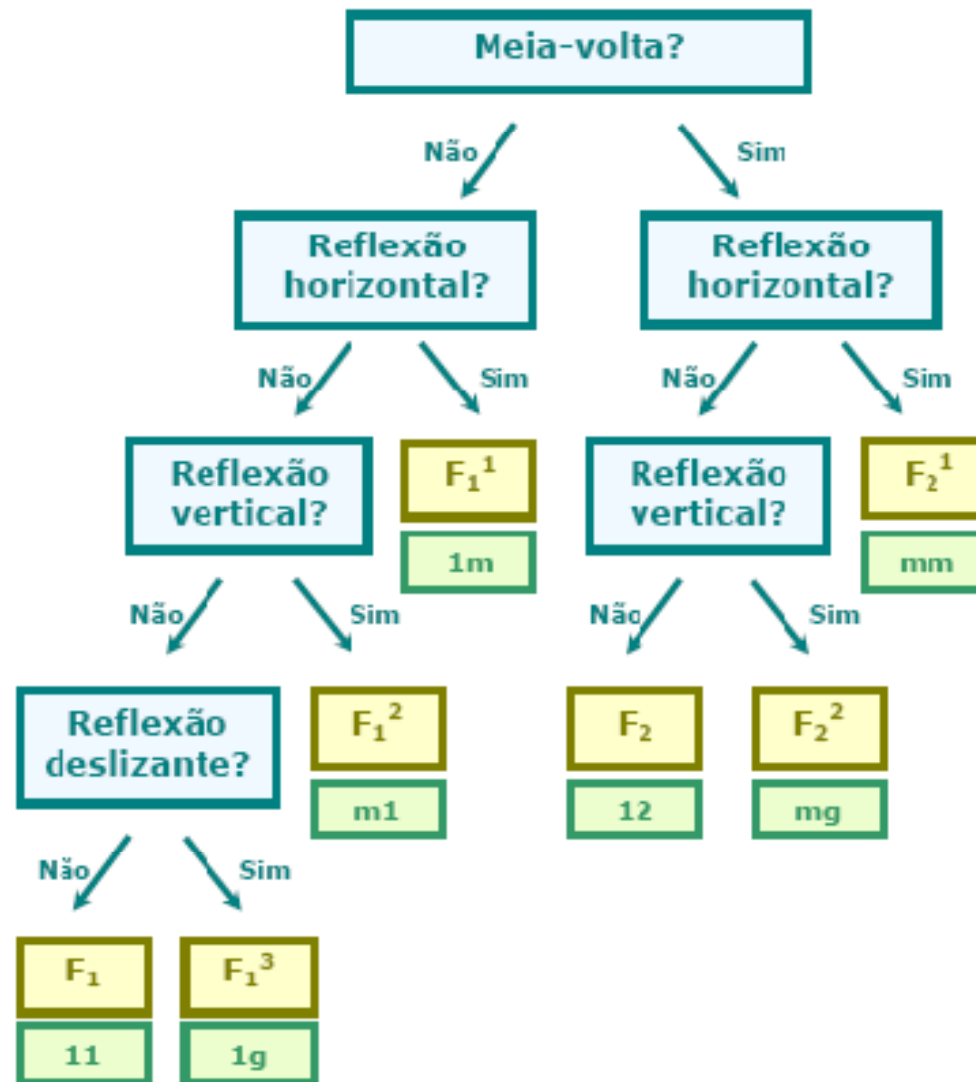
# Resumo



# Fluxograma de classificação dos frisos

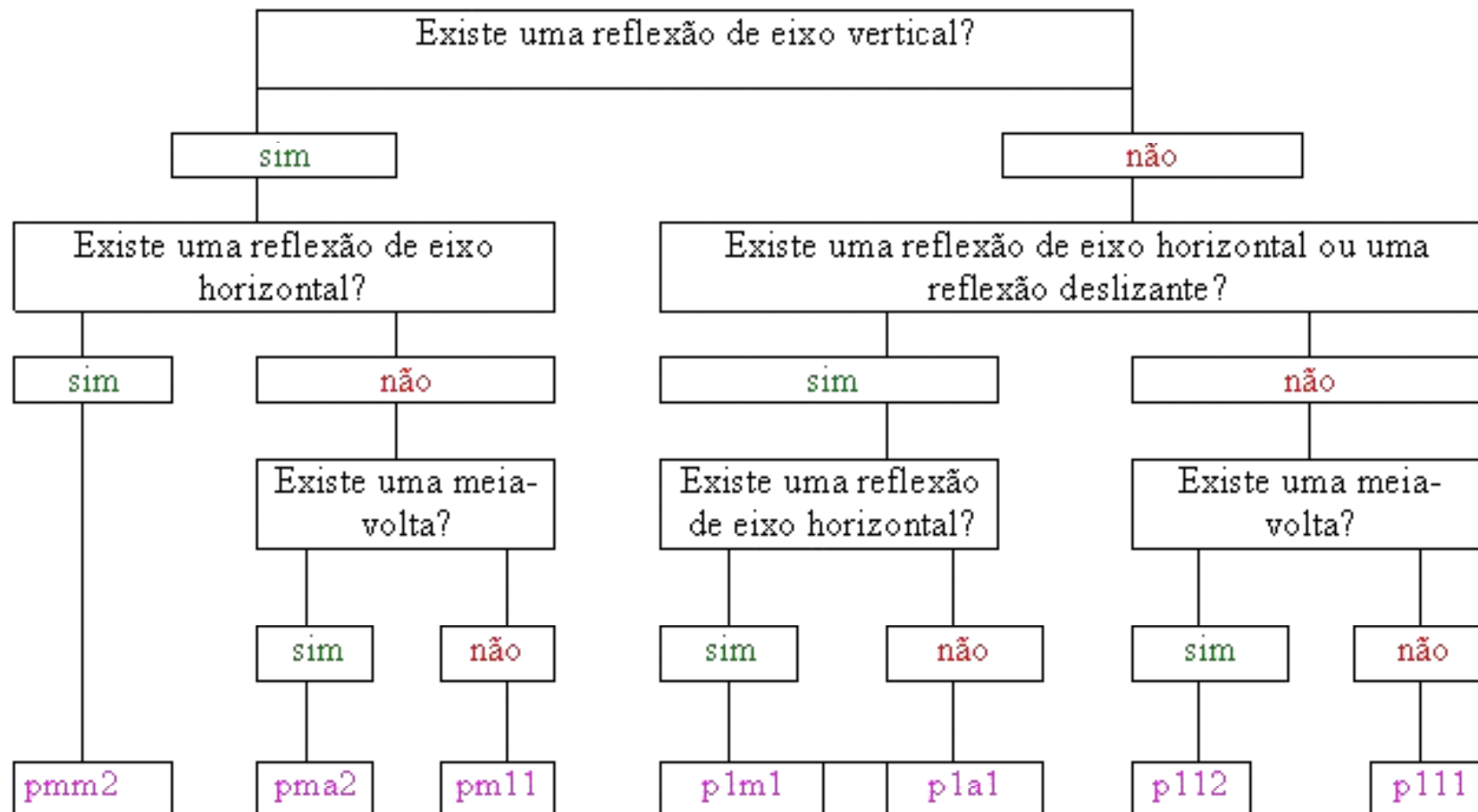


## Fluxograma de classificação dos frisos

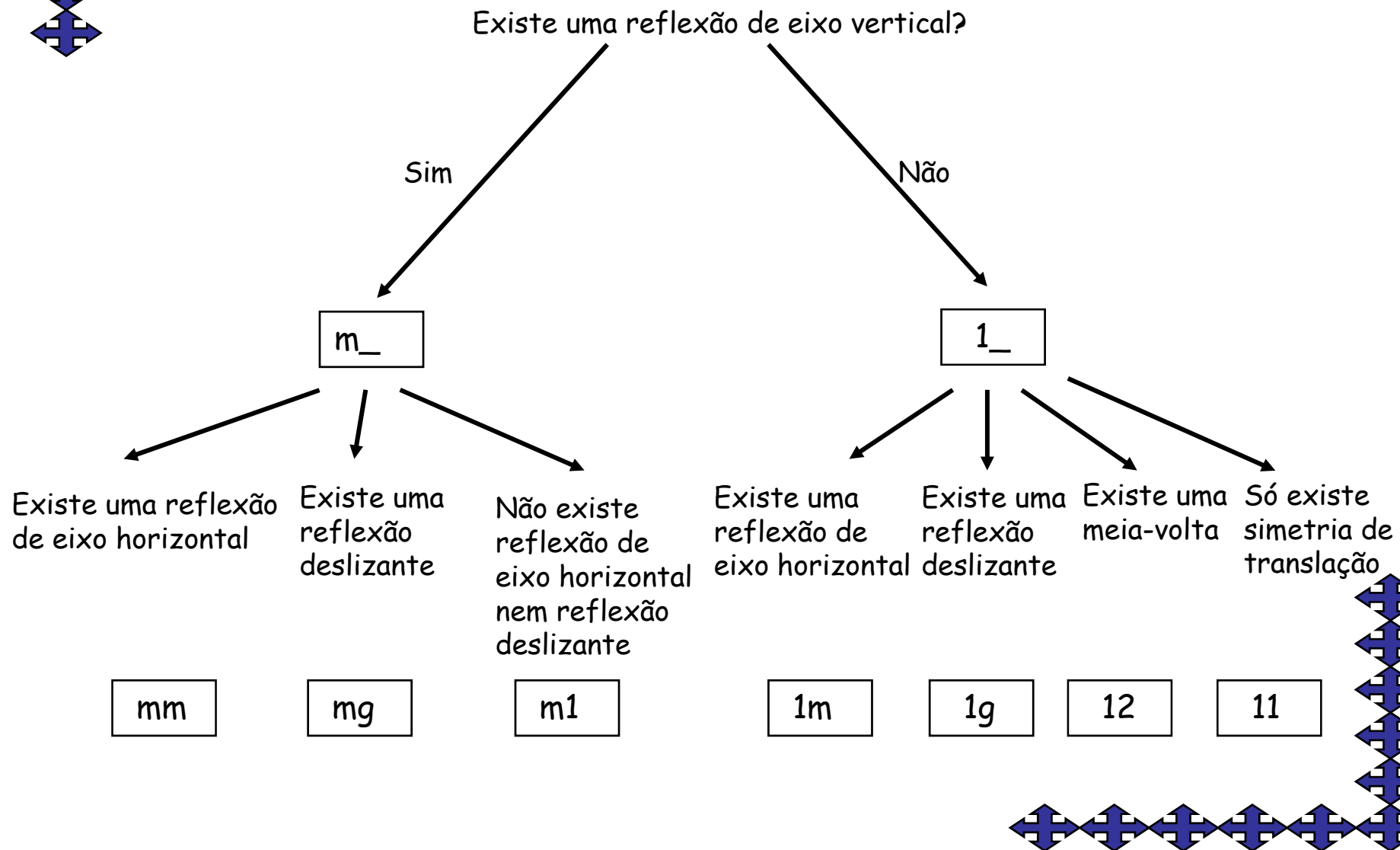




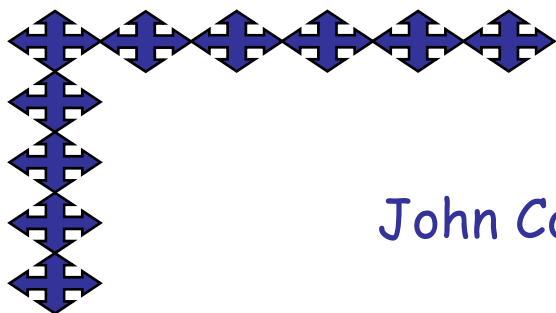
## Fluxograma para classificação de frisos de Washburn e Crowel



# Fluxograma para classificação de frisos







# Curiosidade

John Conway - Universidade de Princeton

1. Pulo - Só translação.

2. Passo - Translação e reflexão deslizante.

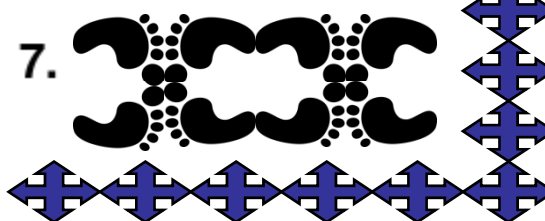
3. Salto - Translação e reflexão horizontal.

4. Deslocar - Translação e reflexão vertical.

5. Pular a roda - Translação e meia-volta.

6. Patinar a roda - Translação, meia-volta, reflexão deslizante, reflexão vertical.

7. Saltar a roda - Translação, meia-volta, reflexão vertical e reflexão horizontal.





## Exemplos de Rosáceas e Frisos



FIM

