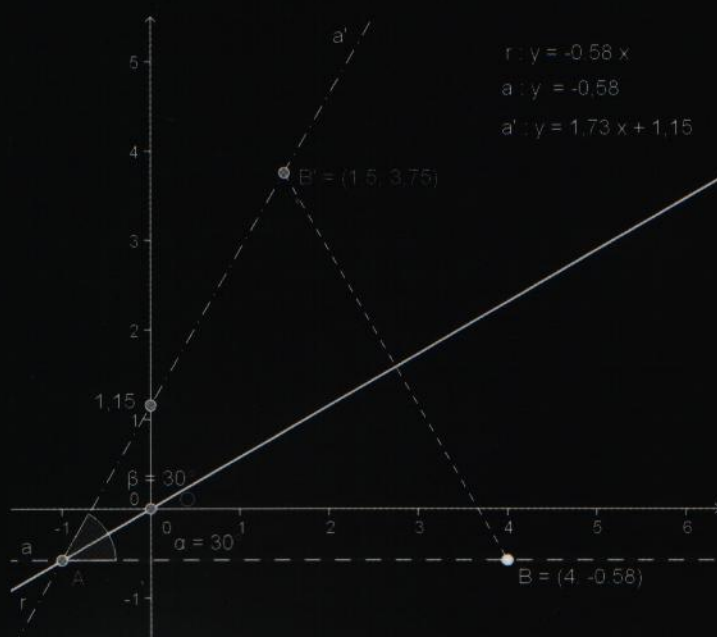


Helena de Fátima Sousa Melo

# ISOMETRIAS NO PLANO

**Uma Abordagem Segundo a Geometria Analítica**



# ISOMETRIAS NO PLANO

***Título***

Isometrias no Plano  
Uma abordagem segundo a Geometria Analítica

***Autor***

Helena de Fátima Sousa Melo

***Edição***

Influir

***Concepção Gráfica***

Influir

***Impressão e acabamento***

COINGRA

***ISBN***

978-989-97107-0-2

***Depósito Legal***

321253/10

***Apoio***



**DRCTC**

DIRECÇÃO REGIONAL DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA E COMUNICAÇÕES

Helena de Fátima Sousa Melo

# ISOMETRIAS NO PLANO

Uma abordagem segundo a Geometria Analítica



*À memória dos meus pais*

*À minha filha*

*HFSM*



# ÍNDICE

AGRADECIMENTOS .....	11
PREFÁCIO .....	13
INTRODUÇÃO .....	15
CAPÍTULO 1 – COORDENADAS HOMOGÉNEAS .....	17
CAPÍTULO 2 – MATRIZES DAS TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS .....	21
CAPÍTULO 3 – ISOMETRIAS .....	39
CAPÍTULO 4 – MATRIZES DE TRANSFORMAÇÃO HOMOGÉNEA ASSOCIADAS ÀS ISOMETRIAS .....	41
CAPÍTULO 5 – REFLEXÃO EM RECTA .....	49
CAPÍTULO 6 – TRANSLAÇÃO .....	59
CAPÍTULO 7 – ROTAÇÃO .....	69
CAPÍTULO 8 – MEIA-VOLTA .....	81
CAPÍTULO 9 – REFLEXÃO DESLIZANTE .....	93
CAPÍTULO 10 – TEOREMAS GERAIS E CONCLUSÕES .....	101
BIBLIOGRAFIA .....	111
LISTA DE SÍMBOLOS .....	113
ÍNDICE DE FIGURAS .....	117
ÍNDICE REMISSIVO .....	119





*Uma geometria não pode ser mais verdadeira do que outra; poderá ser apenas mais cómoda.*

***Poincare***

*A Geometria faz com que possamos adquirir o hábito de raciocinar, e esse hábito pode ser empregado, então, na pesquisa da verdade e ajudar-nos na vida.*

***Jacques Bernoulli***



## AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer a todos aqueles que possibilitaram a execução do presente trabalho.

À Direcção Regional da Ciência, Tecnologia e Comunicações, Secretaria Regional de Ciência, Tecnologia e Equipamentos, que possibilitou a publicação deste trabalho inserido no projecto com a ref<sup>a</sup> M3.2.3/I/009B/2009, no âmbito da Medida 3.2.3 – “Apoio à edição de publicações científicas”, no âmbito do Eixo 3.2 – “Incentivos à produção científica”, do Programa 3 (Apoio à formação avançada (FORMAC), do Plano Integrado para a Ciência e Tecnologia.

Também gostaria de agradecer aos colegas que mostraram disponibilidade para lerem o manuscrito, fazendo observações, críticas e comentários, que permitiram a correcção e alteração de alguns pontos, de modo a proporcionar uma melhor compreensão do pretendido.

Em especial gostaria de agradecer aos casais amigos, Magda e Ricardo Teixeira, filósofa e matemático, respectivamente, e Diana e João Cabral, matemáticos de alma e coração, que contribuíram com algumas sugestões, com o seu entusiasmo e incentivo.

A autora,

Junho 2010



## PREFÁCIO

Este trabalho é o resultado da leccionação de várias disciplinas ao longo de um percurso de docência em Cursos de Licenciatura em Matemática e de Licenciaturas e Bacharelatos em outros ramos que englobam, em seus planos de estudo, as disciplinas da área de Matemática.

A abordagem feita, apesar de aparentemente envolver as áreas de Geometria das Transformações e de Geometria Analítica, envolve outras, tais como a Geometria Projectiva e a Álgebra Linear.

O trabalho tem um discurso contínuo que proporciona uma ligação entre os diversos temas de modo natural e crescente, com a apresentação de várias proposições, quase todas elas com a respectiva demonstração. O final da demonstração de uma proposição ou teorema é assinalado com o símbolo (■), as proposições ou teoremas que não são demonstrados, por possuírem uma prova evidente ou análoga, são assinalados com o símbolo (□). Algumas das demonstrações se afiguram como um exemplo teórico.

Com o propósito de melhor manuseá-lo, o trabalho foi dividido em dez capítulos, cinco dos quais referentes às isometrias no plano, ou seja, a reflexão na recta, a translação, a rotação, a meia-volta, caso específico da rotação quando o ângulo é de  $180^\circ$ , e a reflexão deslizante.

Ao longo da exposição há exemplos elucidativos e algumas ilustrações.

Este trabalho pode conferir-se de um carácter didáctico, considerando-se útil a algumas unidades curriculares actuais, como é o caso da Computação Gráfica no plano. Para além disso, pode assumir um carácter exploratório, apresentando uma outra forma de abordagem do tema “isometrias no plano”, não pela vertente da Geometria Euclidiana, que por vezes necessita de um conhecimento generalizado dos seus conceitos e propriedades, mas através da Geometria Analítica, mais directa e calculista.

A finalidade principal deste trabalho é deleitar o leitor nos vários caminhos que unem a Matemática, e contribuir parcialmente para o desenvolvimento de novos meios de exposição de conteúdos, alguns por vezes conhecidos.



## INTRODUÇÃO

No mundo ao nosso redor, encontramos transformações a cada instante. A isometria – do grego *isos* (igual) e *metron* (medida) – é uma transformação relacionada com o movimento rígido dos corpos, que não mudam de tamanho, ou de forma, quer no plano, quer no espaço, podendo-se, assim, fazer uma correspondência entre os pontos dos corpos antes e após o movimento.

Os exemplos mais importantes de isometrias são as reflexões em rectas, pois, toda, e qualquer que seja, a isometria pode ser representada como resultado de uma composição finita de reflexões em rectas. No plano euclidiano, as isometrias simples podem ser rotações, translações e reflexões.

Sabemos que existe uma correspondência biunívoca entre os pontos do plano euclidiano e o conjunto de todos os pares ordenados de números reais. No entanto, necessitamos de um processo mais abrangente que permita justificar os resultados relacionados com as isometrias no plano euclidiano. Com tal intuito, recorreremos ao conceito de coordenadas homogêneas.

Com o auxílio da geometria analítica e da álgebra linear, através dos conceitos de coordenadas homogêneas e de matrizes relacionadas às isometrias, determinadas propriedades e teoremas associados às isometrias no plano, tornar-se-ão mais acessíveis à compreensão.





## CAPÍTULO 1 – COORDENADAS HOMOGÊNEAS

Definimos inicialmente o *plano euclidiano*,  $\Pi_{\mathcal{E}}$ , como o conjunto de pontos  $\mathcal{P}_{\mathcal{E}}$ , e o conjunto de rectas  $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$ , onde, entre os pontos e as rectas, existem determinadas relações como por exemplo, “incidência”, “colinearidade”, “concorrência”, “paralelismos”, dentre outras. Notamos que uma recta do conjunto  $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$  também pode ser considerada pelo conjunto dos seus pontos, ou seja, um subconjunto de  $\mathcal{P}_{\mathcal{E}}$ .

Também definimos o *espaço euclidiano*,  $\mathcal{E}_{\mathcal{E}}$ , como o conjunto de pontos  $\mathcal{P}_{\mathcal{E}}$ , o conjunto de rectas  $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$ , e o conjunto de planos,  $\alpha_{\mathcal{E}}$ , onde, entre eles existem determinadas relações à semelhança do plano euclidiano.

Existe uma correspondência biunívoca entre os pontos do plano euclidiano  $\mathcal{P}_{\mathcal{E}}$  e o conjunto de todos os pares ordenados de números reais  $(x, y)$ , denotado por  $\mathcal{R}^2$ , denominada *sistema de coordenadas no plano*. Bem como, entre os pontos do espaço euclidiano e o conjunto de todas as ternas ordenadas de números reais  $(x, y, z)$ , denotado por  $\mathcal{R}^3$ . Assim, cada ponto no espaço euclidiano está univocamente associado a uma terna ordenado, em que é considerado um referencial composto por três eixos perpendiculares entre si e concorrentes num único ponto,  $O$ , denominado a *origem do referencial*, e onde o primeiro, o segundo e o terceiro elementos denotam respectivamente a *abscissa* (ou projecção do ponto no eixo  $Ox$ ), a *ordenada* (ou projecção do ponto no eixo  $Oy$ ) e a *cota* (ou projecção do ponto no eixo  $Oz$ ).

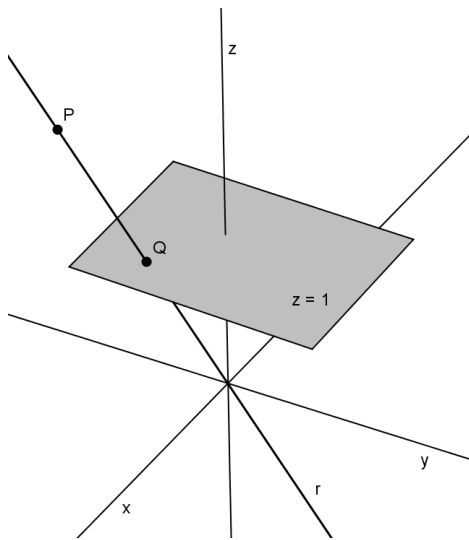
No entanto, por vezes, necessitamos de um sistema mais abrangente que permita obter resultados sobre a geometria no plano euclidiano. Começemos então por definir um novo sistema de coordenadas.

Assim, consideremos o conjunto  $\mathfrak{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ , de todas as ternas  $(x, y, z)$  com  $x, y, z \in \mathfrak{R}$ , nem todos nulos, e a relação de equivalência, que denotaremos por “ $\sim$ ”, definida da seguinte maneira:

$$(x, y, z) \sim (x', y', z') \Leftrightarrow \exists k \in \mathfrak{R} \setminus \{0\}: x = kx', y = ky' \text{ e } z = kz'.$$

Dada uma terna  $(x, y, z) \in \mathfrak{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ , denotemos por  $(x : y : z)$  a *classe de equivalência* representativa de um ponto. Os pontos  $(x : y : z)$  com coordenada  $z \neq 0$  podem também ser representados sob a forma  $\left(\frac{x}{z} : \frac{y}{z} : 1\right)$ . Deste modo, os números  $x, y$  e  $z$  são chamados *coordenadas homogêneas* do ponto  $(x : y : z)$  e indicamos  $(x : y : z) = (kx : ky : kz)$ , para todo  $k \in \mathfrak{R} \setminus \{0\}$ .

A conexão entre o ponto no espaço euclidiano de coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$  e o ponto no plano euclidiano de coordenadas homogêneas  $(x : y : z)$  torna-se aparente quando consideramos o



**Figura 1** – Coordenadas homogêneas

plano  $z = 1$  no espaço. A recta  $r$  que une o ponto  $P$ , com coordenadas cartesianas no espaço euclidiano  $(x_1, x_2, x_3)$ , à origem, intercepta o plano  $z = 1$ , paralelo ao plano euclidiano coordenatizado  $\Pi_{\mathcal{E}}$ , definido por  $xOy$  (figura 1). Assim, o ponto  $P$  é projectado no ponto  $Q$  que possui por coordenadas cartesianas  $\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}, 1\right)$ .

O plano  $xOy$ , ou seja,  $z = 0$ , é “mergulhado” numa posição do espaço tridimensional a uma altura  $z = 1$ , não contendo portanto a origem.

Assim, as coordenadas cartesianas no plano xOy do ponto próprio Q são  $\left( \frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3} \right)$ , sendo  $\left( \frac{x_1}{x_3} : \frac{x_2}{x_3} : 1 \right)$  um conjunto de coordenadas homogêneas para este ponto. Qualquer ponto próprio na recta  $r$  (à excepção da origem do referencial, O) se projecta também no ponto Q, tendo, assim, o mesmo conjunto de coordenadas homogêneas.

No entanto, há pontos no espaço euclidiano coordenatizado que não correspondem a nenhum dos pontos do plano  $z = 1$ , são os pontos do plano xOy, pois a recta que os une à origem e o plano  $z = 1$  são paralelos entre si. Assim, os pontos da forma  $(x : y : 0)$  correspondem aos pontos impróprios (ou pontos infinitos) do plano xOy.

Para uma recta própria, no plano xOy, de equação  $ax + by + c = 0$ , podemos considerar os parâmetros  $a$ ,  $b$ , e  $c$ , como as suas coordenadas homogêneas, indicando-as por  $[a : b : c]$  e, à semelhança das coordenadas homogêneas dos pontos, identificar múltiplos, não nulos, das coordenadas.

Assim, cada ponto e cada recta são representados por três coordenadas homogêneas. Indicamos os pontos por  $P = (x : y : 1)$  e as rectas por  $r = [a : b : c]$ .

Duas rectas expressas em coordenadas homogêneas  $[a_1 : a_2 : a_3]$  e  $[b_1 : b_2 : b_3]$  são *idênticas* se, e somente se,

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0,$$

e indicamos por

$$[a_1 : a_2 : a_3] = [b_1 : b_2 : b_3].$$

O ponto  $(x : y : 1)$ , em coordenadas homogéneas, pertence a recta  $[a : b : c]$  se, e somente se, o produto escalar é nulo, ou seja,  $ax + by + c = 0$  e que podemos representar matricialmente por

$$\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = 0.$$

No entanto, há coordenadas homogéneas que não correspondem a nenhuma recta própria, são as coordenadas  $[0 : 0 : 1]$ . Estas coordenadas representam a *recta imprópria* ou *recta infinita* que contém todos os pontos impróprios de coordenadas homogéneas  $(x : y : 0)$ , visto que:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = 0.$$

A *intersecção* de duas rectas, quaisquer, definidas em coordenadas homogéneas,  $[a_1 : a_2 : a_3]$  e  $[b_1 : b_2 : b_3]$ , é dada pelo ponto de coordenadas homogéneas  $(x_1 : x_2 : x_3)$ , onde

$$x_1 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \quad x_2 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad x_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Duas rectas próprias definidas em coordenadas homogéneas por  $[a_1 : a_2 : a_3]$  e  $[b_1 : b_2 : b_3]$  são *paralelas* se, e somente se,  $a_1 = b_1$  e  $a_2 = b_2$ , visto que o único ponto de intersecção tem por coordenadas homogéneas  $(a_2(b_3 - a_3) : -a_1(b_3 - a_3) : 0)$ , ou seja, é um ponto impróprio.

A noção algébrica de coordenadas homogéneas fornece uma dualidade perfeita entre as rectas e os pontos. Assim, podemos comutar os termos “recta” e “ponto”, e continuarmos a ter proposições verdadeiras. Faremos uso do conceito de coordenadas homogéneas para tratarmos, de um modo generalizado, algumas das transformações geométricas no plano euclidiano.

## CAPÍTULO 2 – MATRIZES DAS TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

**Definição.** Uma *Transformação Geométrica* é uma aplicação bijectiva (ponto por ponto) entre duas figuras geométricas (conjunto de pontos), no mesmo plano ou em planos diferentes, de forma que, a partir de uma figura geométrica original, se forma outra geometricamente igual ou semelhante, sem perda das suas propriedades topológicas<sup>1</sup>. •

Todas estas transformações podem ser consideradas como transformações lineares no espaço. Com o objectivo de simplificar o tratamento algébrico, uma vez que o estudo se fará apenas no plano euclidiano coordenatizado, definiremos uma matriz quadrada de ordem 3, designada por *matriz de transformação homogénea*, associada à transformação.

Assim, o estudo far-se-á a partir destas matrizes, onde podemos expressar qualquer composição de transformações geométricas em termos do produto das suas respectivas matrizes associadas.

**Proposição 2.1.** *Uma transformação geométrica preserva a incidência.*

**Demonstração.** Sejam  $P$  e  $r$ , um ponto e uma recta, de coordenadas homogéneas  $(x : y : 1)$  e  $[a : b : c]$ , respectivamente, e  $T$  a matriz de transformação homogénea, de ordem 3, associada a uma transformação geométrica  $\mathcal{T}$ , que como tal possui inversa  $\mathcal{T}^{-1}$ , sendo sua matriz de transformação homogénea associada  $T^{-1}$ , a matriz inversa de  $T$ . Denotemos por  $I_3$ , a matriz identidade de ordem 3. Sejam o ponto  $P'$  e a recta  $r'$ , respectivamente, os transformados de  $P$  e  $r$  por  $\mathcal{T}$  e de coordenadas homogéneas  $(x' : y' : 1)$  e  $[a' : b' : c']$ . Consideremos  $P \in r$ , então segue-se que

---

<sup>1</sup> Uma *propriedade topológica* é uma propriedade invariante (insensível) às transformações que lhe são aplicadas.

$$[a \ b \ c] \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$[a \ b \ c] \ I_3 \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$[a \ b \ c] (T^{-1} \cdot T) \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$([a \ b \ c] T^{-1}) \left( T \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \right) = 0$$

Considerando  $[a \ b \ c] T^{-1} = [a' \ b' \ c']$  e  $T \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}$ , temos que

$$[a' \ b' \ c'] \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = 0,$$

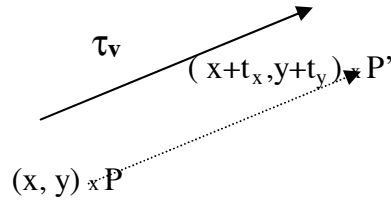
e concluímos que  $P' \in r'$ . ■

Passemos à descrição de algumas transformações geométricas no plano euclidiano coordenatizado, tais como a translação, a rotação, a meia-volta, como caso particular da rotação, a reflexão em recta e a reflexão deslizante, aplicando-as ao conjunto de pontos  $\mathcal{P}_{\mathbb{G}}$ .

Seja  $\tau_v$  uma *translação* associada ao vector  $v = (t_x, t_y)$ .

$$\tau_v : \mathcal{P}_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathcal{P}_{\mathbb{C}}$$

$$(x, y) \mapsto (x + t_x, y + t_y)$$



**Figura 2** – Translação

Dado um ponto qualquer  $P$  de coordenadas cartesianas  $(x, y)$ , pela translação  $\tau_v$ , este é transportado para o ponto  $P'$  de coordenadas cartesianas  $(x + t_x, y + t_y)$ . (figura 2)

Isto é, através da translação  $\tau_v$ ,  $P$  é transformado em  $P'$ , onde  $P' = \tau_v(P)$  e  $\overrightarrow{PP'} = v$ .

Este modo de descrever a transformação não envolve o uso de matrizes. No entanto, com a utilização do conceito de coordenadas homogéneas já é possível utilizar os conhecimentos das operações com matrizes.

Como sabemos que o ponto de coordenadas cartesianas  $(x, y)$  tem por coordenadas homogéneas  $(x : y : 1)$ . Então, pela translação  $\tau_v$ , o ponto de coordenadas homogéneas  $(x : y : 1)$  é transformado no ponto de coordenadas homogéneas  $(x + t_x : y + t_y : 1)$ .

Deste modo, podemos então considerar como matriz de transformação homogénea associada a translação a matriz, denotada por  $T_v$ ,



$$T_{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

visto que,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + t_x \\ y + t_y \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A translação, por ser uma transformação bijectiva, admite inversa. A inversa da translação  $\tau_{\mathbf{v}}$ , associada ao vector  $\mathbf{v} = (t_x, t_y)$ , é a translação  $\tau_{-\mathbf{v}}$  associada ao vector  $-\mathbf{v} = (-t_x, -t_y)$ , sendo a sua matriz de transformação homogénea associada

$$T_{-\mathbf{v}} = T_{\mathbf{v}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -t_x \\ 0 & 1 & -t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Observamos que,

$$T_{\mathbf{v}} T_{\mathbf{v}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -t_x \\ 0 & 1 & -t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3,$$

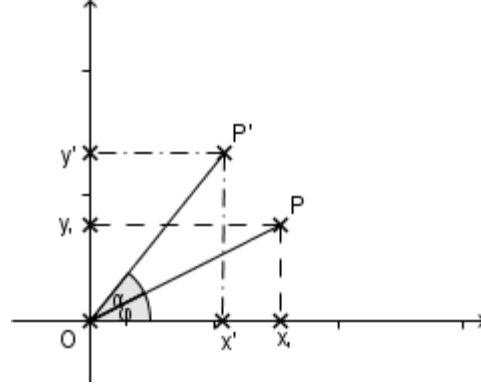
bem com,

$$T_{\mathbf{v}}^{-1} T_{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -t_x \\ 0 & 1 & -t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3.$$

Consideremos agora uma *rotação*, que denotaremos por  $\Delta_{O,\alpha}$  de ângulo com amplitude igual a  $\alpha$ , no sentido anti-horário<sup>2</sup>, em torno da origem do referencial cartesiano, o ponto O, no plano euclidiano coordenatizado.

$$\Delta_{O,\alpha}: \mathcal{P}_{\mathbb{E}} \rightarrow \mathcal{P}_{\mathbb{E}}$$

$$(x, y) \mapsto (x', y')$$



**Figura 3** – Rotação

Um ponto P, qualquer, de coordenadas cartesianas  $(x, y)$  é transformado, pela rotação, num ponto P' de coordenadas cartesianas  $(x', y')$ . (figura 3)

Observamos que  $\overline{OP} = \overline{OP'}$ ,  $x = \overline{OP} \cos \varphi$ ,  $y = \overline{OP} \sin \varphi$ ,  $x' = \overline{OP'} \cos(\varphi + \alpha)$  e  $y' = \overline{OP'} \sin(\varphi + \alpha)$ .

Obtemos assim, por coordenadas cartesianas do ponto P' em função do ângulo  $\alpha$ ,

$$(x \cos \alpha - y \sin \alpha, x \sin \alpha + y \cos \alpha),$$

visto que

<sup>2</sup> Existem dois sentidos de orientação para um ângulo no plano euclidiano. O sentido dos ponteiros do relógio (sentido horário) e o sentido contrário aos dos ponteiros do relógio (sentido anti-horário)

$$\begin{aligned}
x' &= \overline{OP'} \cos(\varphi + \alpha) \\
&= \overline{OP'} \cos \varphi \cos \alpha - \overline{OP'} \sin \varphi \sin \alpha \\
&= \overline{OP} \cos \varphi \cos \alpha - \overline{OP} \sin \varphi \sin \alpha \\
&= x \cos \alpha - y \sin \alpha
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
y' &= \overline{OP'} \sin(\varphi + \alpha) \\
&= \overline{OP'} \cos \varphi \sin \alpha + \overline{OP'} \sin \varphi \cos \alpha \\
&= \overline{OP} \cos \varphi \sin \alpha + \overline{OP} \sin \varphi \cos \alpha \\
&= x \sin \alpha + y \cos \alpha .
\end{aligned}$$

Assim, podemos associar a esta transformação a matriz ortogonal<sup>3</sup>  $\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$ . Consequentemente, a matriz de transformação homogênea associada, que denotaremos por  $R_{O,\alpha}$ , é

$$R_{O,\alpha} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

---

<sup>3</sup>Uma matriz é denominada *matriz ortogonal* se a inversa da matriz é igual à sua transposta.

A matriz de transformação homogénea associada à inversa desta rotação é igual à transposta da matriz de transformação homogénea associada a tal transformação, isto é,  $R_{O,\alpha}^{-1} = R_{O,\alpha}^t$ , visto tratar-se de uma matriz ortogonal.

Observamos que

$$R_{O,\alpha} R_{O,\alpha}^t = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3,$$

bem com,

$$R_{O,\alpha}^t R_{O,\alpha} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3.$$

Se considerarmos a rotação no sentido horário, teremos como a sua matriz de transformação homogénea associada a matriz  $R_{O,\alpha}^t$ .

A *meia-volta*, ou *reflexão em ponto*, ou *simetria pontual*, que denotaremos por  $\Sigma_O$ , é um caso particular da rotação, quando a amplitude do ângulo de rotação é igual a  $180^\circ$  (ou  $\pi$  rad). Neste caso, temos como matriz de transformação homogénea associada a esta transformação, considerada em torno da origem do referencial, a matriz denotada por  $M_O$ ,

$$M_O = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dado um ponto de coordenadas homogéneas  $(x : y : 1)$ , temos que

$$\Sigma_O(x : y : 1) = (-x : -y : 1),$$

resultante de

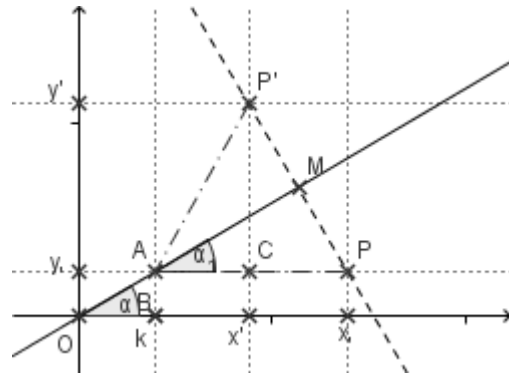
$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Observamos que quando a amplitude do ângulo de rotação é um múltiplo de  $360^\circ$ , ou quando o vector de translação é nulo, a transformação geométrica deixa todos os pontos do plano euclidiano invariantes. Tal transformação é denominada *Identidade* e a denotaremos por  $I_d$ , sendo a sua matriz de transformação homogénea associada  $I_3$ .

Analisemos o que ocorre a um ponto, qualquer, pela transformação geométrica, denominada *reflexão em recta*, ou *simetria axial*, relacionada com uma recta  $r$  que passa pela origem do referencial e forma um ângulo de amplitude igual a  $\alpha$  com o eixo  $Ox$ , e a qual denotaremos por  $\Sigma_r$ .

$$\Sigma_r: \mathcal{P}_\zeta \rightarrow \mathcal{P}_\zeta$$

$$(x, y) \mapsto (x', y')$$



**Figura 4** – Reflexão em recta

Consideremos a recta  $r$  não paralela aos eixos coordenados (figura 4) e de equação  $x \sin \alpha - y \cos \alpha = 0$ . Dado um ponto  $P$ , qualquer, de coordenadas cartesianas  $(x, y)$ , este é transformado, pela reflexão na recta  $r$ , no ponto  $P'$  de coordenadas cartesianas  $(x', y')$ , onde  $PP' \perp r$ .

Sendo  $\{M\} = PP' \cap r$ , então  $M$  é ponto médio do segmento  $[PP']$  e a recta  $r$  é a mediatriz deste mesmo segmento.

Consideremos um ponto  $A$  pertencente a recta  $r$  e com a mesma ordenada do ponto  $P$ .

Como o ponto  $A$  pertence à recta  $r$ , temos que  $\overline{AP'} = \overline{AP}$ . Então o triângulo  $[APP']$  é isósceles.

Consideremos também o ponto  $B$  com a mesma abcissa do ponto  $A$  e pertencente ao eixo  $Ox$ .

Sendo o ângulo  $\hat{BOA} = \alpha$ , temos que  $\frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$  e o ângulo  $\hat{PAP'} = 2\alpha$ .

Se considerarmos o ponto  $C$  pertencente à recta  $AP$  e com a mesma abcissa do ponto  $P'$ , temos que

$$\overline{AC} = \overline{AP'} \cos 2\alpha \quad \text{e} \quad \overline{P'C} = \overline{AP'} \sin 2\alpha.$$

Atendendo ao facto que  $x' = \overline{OB} + \overline{AC}$  e  $y' = \overline{AB} + \overline{P'C}$  (vide figura 4) e supondo que o ponto  $B$  tem coordenadas cartesianas  $(k, 0)$ , segue-se que

$$\begin{aligned} x' &= k + \overline{AP'} \cos 2\alpha \\ &= k + \overline{AP} \cos 2\alpha \end{aligned}$$

$$= k + (x - k) \cos 2\alpha$$

$$= k + x \cos 2\alpha - k \cos 2\alpha$$

$$= x \cos 2\alpha + k - k \cos 2\alpha$$

$$= x \cos 2\alpha + k (1 - \cos 2\alpha)$$

$$= x \cos 2\alpha + y \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} (1 - \cos 2\alpha)$$

$$= x \cos 2\alpha + y \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} 2 \sin^2 \alpha$$

$$= x \cos 2\alpha + y 2 \cos \alpha \sin \alpha$$

$$= x \cos 2\alpha + y \sin 2\alpha$$

e analogamente,

$$y' = y + \overline{AP'} \sin 2\alpha$$

$$= y + (x - k) \sin 2\alpha$$

$$= x \sin 2\alpha + y - y \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \cos 2\alpha$$

$$= x \sin 2\alpha + y \left( 1 - \frac{\cos \alpha 2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin \alpha} \right)$$

$$= x \sin 2\alpha + y (1 - 2 \cos^2 \alpha)$$

$$= x \sin 2\alpha - y \cos 2\alpha$$

Assim, podemos associar a esta transformação a matriz  $\begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{bmatrix}$ . Consequentemente, a matriz de transformação homogénea associada à reflexão na recta  $r$  que passa pela origem do referencial, que denotaremos por  $S_r$ , é

$$S_r = \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha & 0 \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Se a equação da recta for expressa na forma geral  $ax + by = 0$ , fazemos  $a = \sin\alpha$ ,  $b = -\cos\alpha$  e, atendendo às relações trigonométricas, com a substituição directa e conveniente dos valores na matriz anterior, obtemos a matriz resultante que é da forma

$$\begin{bmatrix} \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} & \frac{-2ab}{a^2 + b^2} & 0 \\ \frac{-2ab}{a^2 + b^2} & \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como em ambos os casos as matrizes são ortogonais e simétricas, a transformação inversa é a própria transformação de reflexão em recta, ou seja,  $\Sigma_r^{-1} = \Sigma_r$ . Consequentemente temos que  $S_r^2 = I_3$ .

De seguida listamos algumas matrizes de transformação homogénea associadas às reflexões em rectas particulares.



$$S_{Ox} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ associada a reflexão em relação ao eixo } Ox.$$

$$S_{Oy} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ associada a reflexão em relação ao eixo } Oy.$$

$$S_{bi} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ associada a reflexão em relação à bissectriz dos quadrantes I e III.}$$

$$S_{bp} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ associada a reflexão em relação à bissectriz dos quadrantes II e IV.}$$

Os casos que envolvem rectas paralelas aos eixos coordenados serão vistos no capítulo 5.

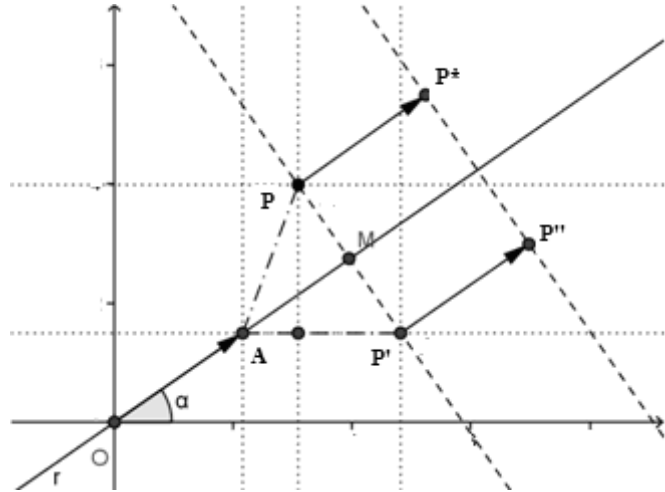
**Definição.** Quando uma transformação, distinta da identidade, admite como inversa a própria transformação, esta é denominada *involutiva*, ou seja, se  $\mathcal{T} \neq I_d$  e  $\mathcal{T}^2 = I_d$ . •

A reflexão em recta é involutiva. Por outras palavras, a imagem de um ponto pela composta de duas reflexões na mesma recta é o próprio ponto.

Passemos à *reflexão deslizante*, ou *translação reflectida*, que denotaremos por  $\delta_{(v,r)}$ , e que pode ser definida como o resultado da composição entre uma reflexão em recta e uma translação cujo vector tem a mesma direcção que a recta.

$$\delta_{(v,r)}: \mathcal{P}_{\mathcal{E}} \rightarrow \mathcal{P}_{\mathcal{E}}$$

$$(x, y) \mapsto (x', y')$$



**Figura 5** – Reflexão deslizante

Consideremos na figura 5 uma recta  $r$  que passe pela origem e forme com o eixo  $Ox$  um ângulo de amplitude igual a  $\alpha$  e um vector na mesma direcção da recta,  $\mathbf{v} = \overrightarrow{OA}$ , cujas coordenadas cartesianas são  $(\rho \cos \alpha, \rho \sin \alpha)$ , onde  $\rho = \|\overrightarrow{OA}\|$ .

Dado o ponto  $P$  de coordenadas cartesianas  $(x, y)$ , este é transformado, por  $\delta_{(v,r)}$ , no ponto  $P''$  de coordenadas cartesianas  $(x'', y'')$ . Simbolicamente,  $\delta_{(v,r)}(P) = P''$ . (vide figura 5)

Podemos obter esta transformação por duas composições:

$$\delta_{(v,r)} = \tau_v \circ \Sigma_r \text{ ou } \delta_{(v,r)} = \Sigma_r \circ \tau_v.$$

A matriz de transformação homogénea associada a esta transformação, denotada por  $D_{(v,r)}$ , é obtida pela simples multiplicação das matrizes de transformação homogénea associadas às respectivas transformações de translação e de reflexão em recta, ou seja,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \rho \cos \alpha \\ 0 & 1 & \rho \sin \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha & 0 \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha & \rho \cos \alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha & \rho \sin \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha & 0 \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \rho \cos \alpha \\ 0 & 1 & \rho \sin \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha & \rho \cos \alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha & \rho \sin \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Assim, a matriz de transformação homogénea associada à reflexão deslizando é

$$D_{(v,r)} = \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha & \rho \cos \alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha & \rho \sin \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Até ao momento, de todas as transformações estudadas, apenas as que envolvem translações são as que necessitam que as suas matrizes associadas sejam quadradas de ordem 3 (matrizes de transformação homogénea) e os elementos envolvidos, os pontos e as rectas, sejam expressas em termos de coordenadas homogéneas. Estas transformações são o caso da translação e da reflexão deslizando.

Já a rotação e a reflexão em recta, em que o ponto envolvido seja a origem do referencial cartesiano, não necessitam que as suas matrizes associadas sejam quadradas de ordem 3, bastando serem de ordem 2, como já foi visto anteriormente.

No entanto, como trabalharemos com a composição de todas estas transformações, nas demonstrações das proposições que se seguem, utilizaremos as matrizes de transformação homogénea como as suas matrizes associadas.

**Proposição 2.2.** *A translação, a rotação, a reflexão em recta e a reflexão deslizante são transformações geométricas que conservam distâncias.*

**Demonstração.** Dados dois pontos quaisquer, P de coordenadas homogéneas  $(p_1 : p_2 : 1)$  e Q de coordenadas homogéneas  $(q_1 : q_2 : 1)$ , e os respectivos transformados por  $\mathcal{T}$ , P' de coordenadas homogéneas  $(p_1' : p_2' : 1)$  e Q' de coordenadas homogéneas  $(q_1' : q_2' : 1)$ , temos, para cada uma das quatro transformações geométricas, o que se segue:

(i) Em relação à *translação*  $\tau_v$ , associada ao vector  $v$ , obtemos pela transformação através das matrizes correspondentes,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 + t_x & q_1 + t_x \\ p_2 + t_y & q_2 + t_y \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

onde  $p_1' = p_1 + t_x$ ,  $p_2' = p_2 + t_y$ ,  $q_1' = q_1 + t_x$  e  $q_2' = q_2 + t_y$ . Observamos então que

$$\begin{aligned} \overline{P'Q'} &= \sqrt{(p_1' - q_1')^2 + (p_2' - q_2')^2} \\ &= \sqrt{((p_1 + t_x) - (q_1 + t_x))^2 + ((p_2 + t_y) - (q_2 + t_y))^2} \\ &= \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2} \\ &= \overline{PQ} \end{aligned}$$

(ii) Em relação à *rotação*  $\Delta_{O,\alpha}$ , de centro O e ângulo  $\alpha$  obtemos as coordenadas homogéneas  $(p_1 \cos \alpha - p_2 \sin \alpha : p_1 \sin \alpha + p_2 \cos \alpha : 1)$  e  $(q_1 \cos \alpha - q_2 \sin \alpha : q_1 \sin \alpha + q_2 \cos \alpha : 1)$  para os pontos  $P' = \Delta_{O,\alpha}(P)$  e  $Q' = \Delta_{O,\alpha}(Q)$ , respectivamente, através do produto

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Analogamente à transformação geométrica anterior, verificamos que  $\overline{P'Q'} = \overline{PQ}$ .

(iii) Em relação à *reflexão em recta*  $\Sigma_r$ , considerando, sem perda de generalidade, a recta  $r$  passando pela origem do referencial e formando com o eixo Ox o ângulo de amplitude igual a  $\alpha$ , obtemos as coordenadas homogéneas  $(p_1 \cos 2\alpha + p_2 \sin 2\alpha : p_1 \sin 2\alpha - p_2 \cos 2\alpha : 1)$  para o ponto  $\Sigma_r(P)$  e  $(q_1 \cos 2\alpha + q_2 \sin 2\alpha : q_1 \sin 2\alpha - q_2 \cos 2\alpha : 1)$  para o ponto  $\Sigma_r(Q)$ , resultantes do produto

$$\begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha & 0 \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

e do mesmo modo, verificamos que  $\overline{P'Q'} = \overline{PQ}$ .

(iv) Finalmente, para a *reflexão deslizante*  $\delta_{(v,r)}$ , onde o eixo  $r$  passa pela origem do referencial, formando com o eixo Ox um ângulo  $\alpha$ , e  $v$  é um vector na mesma direcção que a recta  $r$ , obtemos, respectivamente, para  $P' = \delta_{(v,r)}(P)$  e para  $Q' = \delta_{(v,r)}(Q)$  as seguintes coordenadas homogéneas.

$$P' = ( p_1 \cos 2\alpha + p_2 \sin 2\alpha + \rho \cos \alpha : p_1 \sin 2\alpha - p_2 \cos 2\alpha + \rho \sin \alpha : 1)$$

e

$$Q' = ( q_1 \cos 2\alpha + q_2 \sin 2\alpha + \rho \cos \alpha : q_1 \sin 2\alpha - q_2 \cos 2\alpha + \rho \sin \alpha : 1),$$

através do produto

$$\begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha & \rho \cos \alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha & \rho \sin \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nesta transformação geométrica verificamos também que  $\overline{P'Q'} = \overline{PQ}$ .

Assim, todas as transformações geométricas consideradas conservam a distância. ■



### CAPÍTULO 3 – ISOMETRIAS

**Definição.** Uma *isometria* no plano euclidiano é uma transformação geométrica de  $\mathcal{P}_E$  sobre  $\mathcal{P}_E$  que preserva distâncias, isto é, se  $\Omega$  é uma isometria e P e Q são dois pontos arbitrários do plano euclidiano,  $P, Q \in \mathcal{P}_E$ , sendo  $P' = \Omega(P)$  e  $Q' = \Omega(Q)$ , então a medida do comprimento do segmento  $[PQ]$  é igual à medida do comprimento do segmento  $[P'Q']$ , simbolicamente,  $\overline{PQ} = \overline{P'Q'}$ . •

A translação, a rotação, a reflexão em recta e a reflexão deslizante, pela proposição 2.2, são denominadas isometrias.

Por conservar distância, toda a isometria aplica três pontos colineares em três pontos colineares, conservando a ordem dos pontos, e três pontos não colineares em três pontos não colineares, conservando o ângulo entre eles. Deste modo, a isometria também conserva ângulos livres<sup>4</sup>, mas, no entanto, pode inverter o seu sentido de orientação.

A Identidade,  $I_d$ , é uma isometria e a inversa de uma isometria é também uma isometria, visto que, pela definição apresentada, a isometria é uma transformação geométrica e por conseguinte bijectiva. O resultado da composição finita de isometrias é, também, uma isometria, pois cada isometria preserva o comprimento, e consequentemente, a composta também o preserva.

---

<sup>4</sup> Ângulo livre é o ângulo não submetido a nenhum sentido, quer anti-horário ou quer horário.



**Definição.** Quando uma isometria mantém a orientação de uma figura geométrica após a sua transformação, a isometria é denominada *própria* (ou par) e quando inverte a orientação, é dita *imprópria* (ou ímpar). A translação e a rotação são isometrias próprias. A reflexão em recta e a reflexão deslizante são isometrias impróprias. •

É evidente que a composta de isometrias próprias é sempre uma isometria própria. Bem como, a composta de duas isometrias impróprias, é uma isometria própria. Já a composição de uma isometria própria com uma isometria imprópria, resulta numa isometria imprópria.

As únicas isometrias conhecidas no plano euclidiano são uma das quatro anteriormente definidas, ou seja, as translações, as rotações (meias voltas, quando a amplitude do ângulo é igual a  $180^\circ$ ), as reflexões em recta e as reflexões deslizantes. Por esta razão, qualquer resultante da composição finita de isometrias corresponde a uma, e só uma, das quatro mencionadas.

## CAPÍTULO 4 – MATRIZES DE TRANSFORMAÇÃO HOMOGÉNEA ASSOCIADAS ÀS ISOMETRIAS

As matrizes de transformação homogénea inicialmente associadas a essas isometrias estão relacionadas com a origem do referencial cartesiano. Para obtermos uma matriz de transformação homogénea associada a uma isometria relacionada com um elemento qualquer do plano euclidiano, devemos proceder a um reposicionamento, que coloca o elemento numa posição já conhecida.

De todas as isometrias no plano consideradas, a *translação*, associada a um vector, é a única que mantém inalterada a sua matriz de transformação homogénea associada, pelo facto do vector ser o representativo de uma classe de equivalência e não depender de qualquer ponto ou recta do plano ou espaço. As demais isometrias valer-se-ão desta para se poder obter as respectivas matrizes de transformação homogéneas associadas a cada uma.

Assim, iniciemos o estudo com uma *rotação* de centro distinto da origem do referencial cartesiano.

Seja  $F$ , de coordenadas cartesianas  $(f_1, f_2)$ , um ponto qualquer do plano euclidiano e  $\alpha$  um ângulo orientado<sup>5</sup>.

Consideremos então a rotação de centro  $F$  e de ângulo  $\alpha$ , indicada por  $\Delta_{F, \alpha}$ . A sua matriz de transformação homogénea associada é o produto de três matrizes: a primeira matriz é a matriz de transformação homogénea associada a translação  $\tau_v$ , onde  $v = \overrightarrow{FO} = (-f_1, -f_2)$ , e através da qual a

imagem do ponto F, centro da rotação, coincide com a origem do referencial; a segunda matriz é a matriz de transformação homogênea associada à rotação  $\Delta_{O,\alpha}$ , de ângulo dado e centro na origem e a terceira matriz é a matriz de transformação homogênea associada à translação  $\tau_{-\mathbf{v}}$ , onde  $-\mathbf{v} = \overrightarrow{OF}$  e pela qual o centro, de rotação, volta à sua posição original. Ou seja, sendo a isometria

$$\Delta_{F,\alpha} = \tau_{-\mathbf{v}} \circ \Delta_{O,\alpha} \circ \tau_{\mathbf{v}},$$

a sua matriz de transformação homogênea associada é

$$R_{F,\alpha} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & f_1(1 - \cos \alpha) + f_2 \sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha & -f_1 \sin \alpha + f_2(1 - \cos \alpha) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

resultante de

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & f_1 \\ 0 & 1 & f_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -f_1 \\ 0 & 1 & -f_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

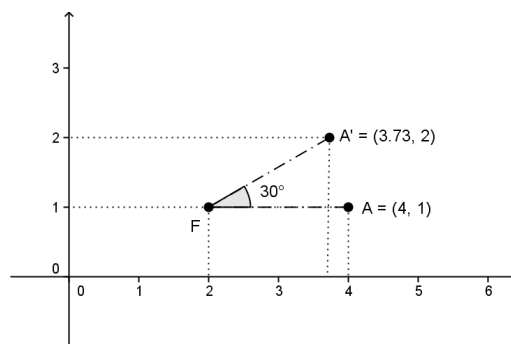
**Exemplo 4.1.** Sejam as coordenadas cartesianas do ponto F, (2,1). Consideremos a rotação de centro em F e ângulo  $+30^\circ$  (sentido anti-horário) (figura 6), encontremos a imagem do ponto A de coordenadas cartesianas (4,1) pela rotação dada  $\Delta_{F,30^\circ}$ .

---

<sup>5</sup> Um ângulo diz-se *orientado*, se possuir um dos sentidos de orientação do plano, ou seja, o sentido anti-horário, ou o sentido horário.

$$\begin{bmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ & 2(1 - \cos 30^\circ) + \sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ & -2\sin 30^\circ + (1 - \cos 30^\circ) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} - \sqrt{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} + 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$



**Figura 6** – Rotação centrada num ponto

Assim, o ponto A', transformado do ponto A pela referida rotação, tem por coordenadas cartesianas  $(\sqrt{3} + 2, 2)$ . ▲

Para uma *meia-volta*, o raciocínio é análogo, obtendo como matriz de transformação homogénea associada

$$M_F = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2f_1 \\ 0 & -1 & 2f_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para a *reflexão em recta* consideremos uma recta qualquer  $f$ , passando por um ponto qualquer, por exemplo, o ponto F de coordenadas cartesianas  $(f_1, f_2)$ , não passando pela origem do referencial cartesiano e formando com o eixo Ox um ângulo de amplitude igual a  $\alpha$ .

A recta  $f$ , de equação  $x \sin \alpha - y \cos \alpha + f_2 \cos \alpha - f_1 \sin \alpha = 0$ , tem por coordenadas homogéneas  $[\sin \alpha : -\cos \alpha : f_2 \cos \alpha - f_1 \sin \alpha]$ .

Analogamente à rotação, temos que

$$\Sigma_f = \tau_{-v} \circ \Sigma_r \circ \tau_v$$

onde  $r$  é a recta que passa pela origem do referencial paralela à recta  $f$ . Consequentemente tem equação  $x \sin \alpha - y \cos \alpha = 0$  e correspondentes coordenadas homogéneas  $[\sin \alpha : -\cos \alpha : 0]$ . O vector  $v$  é definido por um ponto qualquer de  $f$ , suponhamos o ponto  $F$ , e a origem do referencial.

Assim, a matriz de transformação homogénea associada a esta isometria é o produto de

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & f_1 \\ 0 & 1 & f_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha & 0 \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -f_1 \\ 0 & 1 & -f_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$S_f = \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha & f_1(1 - \cos 2\alpha) - f_2 \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha & -f_1 \sin 2\alpha + f_2(1 + \cos 2\alpha) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ou, se considerarmos a recta  $f$  de equação  $ax + by + c = 0$ , o ponto  $F$  terá coordenadas cartesianas

$\left(f_1, \frac{-af_1 - c}{b}\right)$  e a matriz de transformação homogénea associada a esta isometria é o produto de

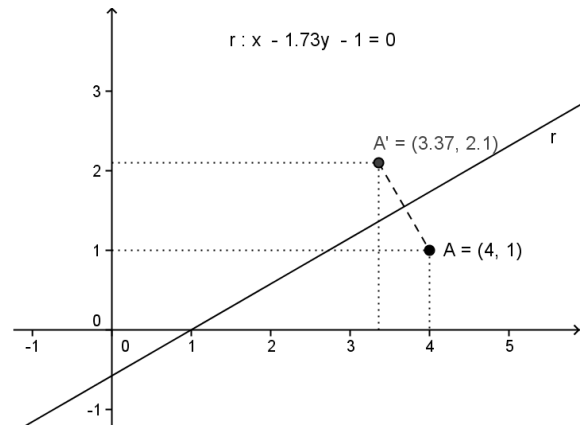
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & f_1 \\ 0 & 1 & \frac{-af_1 - c}{b} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} & \frac{-2ab}{a^2 + b^2} & 0 \\ \frac{-2ab}{a^2 + b^2} & \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -f_1 \\ 0 & 1 & \frac{af_1 + c}{b} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

ou seja,

$$S_f = \begin{bmatrix} \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} & \frac{-2ab}{a^2 + b^2} & \frac{-2ac}{a^2 + b^2} \\ \frac{-2ab}{a^2 + b^2} & \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} & \frac{-2bc}{a^2 + b^2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Exemplo 4.2.** Consideremos a recta de equação geral  $x - \sqrt{3}y - 1 = 0$  passando pelo ponto de coordenadas cartesianas  $\left(5, \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$  e formando um ângulo de amplitude igual a  $30^\circ$  com o eixo Ox (figura 7). A imagem do ponto A de coordenadas cartesianas (4,1) pela reflexão na recta dada tem por coordenadas cartesianas  $\left(\frac{5 + \sqrt{3}}{2}, \frac{3\sqrt{3} - 1}{2}\right)$ , pois

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5 + \sqrt{3}}{2} \\ \frac{3\sqrt{3} - 1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}.$$



**Figura 7** – Reflexão em recta



Para a *reflexão deslizante*,  $\delta_{(\mathbf{v},f)}$ , numa dada recta  $f$  passando por um ponto qualquer distinto da origem do referencial cartesiano e formando um ângulo de amplitude igual a  $\alpha$  em relação ao eixo Ox, e com o vector de translação  $\mathbf{v}$ , na mesma direcção da recta considerada, é evidente que a matriz é associada ao resultado da composição

$$\delta_{(\mathbf{v},f)} = \tau_{-\mathbf{w}} \circ \delta_{(\mathbf{v},r)} \circ \tau_{\mathbf{w}}$$

onde  $r$  é a recta contendo a origem do referencial paralela à recta  $f$  e o vector  $\mathbf{w}$  é definido por um ponto qualquer de  $f$  e pela origem.

Consideremos então a recta  $f$ , de equação  $x \sin \alpha - y \cos \alpha + f_2 \cos \alpha - f_1 \sin \alpha = 0$ , que passa pelo ponto F de coordenadas cartesianas  $(f_1, f_2)$ , e o vector  $\mathbf{v} = (\rho \cos \alpha, \rho \sin \alpha)$ , na mesma direcção da recta  $f$ .

Assim, a matriz de transformação homogénea associada a esta isometria é o produto de

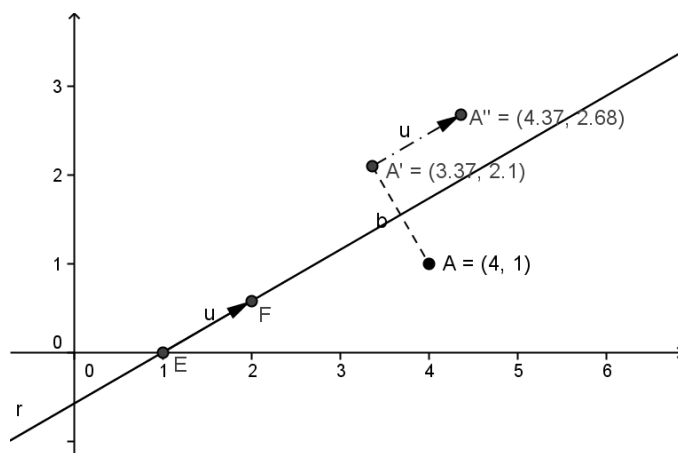
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & f_1 \\ 0 & 1 & f_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha & \rho \cos \alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha & \rho \sin \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -f_1 \\ 0 & 1 & -f_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$D_{(\mathbf{v},f)} = \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha & \rho \cos \alpha + f_1(1 - \cos 2\alpha) - f_2 \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha & \rho \sin \alpha - f_1 \sin 2\alpha + f_2(1 + \cos 2\alpha) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Exemplo 4.3.** Consideremos a recta  $g$  de equação geral  $x - \sqrt{3}y - 1 = 0$  passando pelo ponto de coordenadas cartesianas  $\left(5, \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$  e formando um ângulo de amplitude igual a  $30^\circ$  com o eixo  $Ox$  e o vector  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{u} = \left(1, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$  (vide figura 8). A imagem do ponto  $A$  de coordenadas cartesianas  $(4,1)$  pela reflexão deslizante  $\delta_{(\mathbf{u},g)}$  tem coordenadas cartesianas  $\left(\frac{7+\sqrt{3}}{2}, \frac{-3+11\sqrt{3}}{6}\right)$ .

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{2}{0} & \frac{2}{0} & \frac{6}{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7+\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-3+11\sqrt{3}}{6} \\ 1 \end{bmatrix}$$



**Figura 8** – Reflexão deslizante



Conhecidas as matrizes generalizadas de transformação homogênea associadas às referidas isometrias, passemos à demonstração de algumas proposições referentes às isometrias no plano através da Geometria Analítica.





## CAPÍTULO 5 – REFLEXÃO EM RECTA

A reflexão em recta  $\Sigma_r$ , é uma isometria que pode ser definida, analítica e geometricamente, por:

$$\Sigma_r = \{(P, P') \in \mathcal{P}_{\mathbb{E}} \times \mathcal{P}_{\mathbb{E}} : P' \text{ é o ponto simétrico de } P \text{ em relação a recta } r\}.$$

Observamos que o ponto  $P'$  é o ponto simétrico do ponto  $P$  em relação a  $r$  se, e somente se,  $r$  é a mediatriz do segmento  $[PP']$ . Se considerarmos  $\{F\} = PP' \cap r$ , temos que  $F$  é o ponto médio do segmento  $[PP']$ , ou seja,  $\overline{FP'} = \overline{FP}$ .

Em todas as proposições referenciadas analisaremos sempre dois casos relacionados com a perpendicularidade da recta em relação ao eixo  $Ox$ , ou seja, o caso da recta ser, e não ser, perpendicular ao eixo.

Em algumas das demonstrações, sem perda de generalidade e para simplificação dos cálculos, faremos uso de matrizes de transformação homogénea associadas relacionadas com a origem do referencial cartesiano.

**Proposição 5.1.** *Os pontos invariantes por  $\Sigma_r$  são os pontos da recta  $r$ , e somente eles.*

**Demonstração.** Sem perda de generalidade, consideremos, primeiramente, a recta  $r$  passando pela origem do referencial, distinta do eixo  $Oy$ , e formando com o eixo  $Ox$  um ângulo de amplitude igual a  $\alpha$ . Deste modo,  $r$  tem por coordenadas homogéneas  $[\sin\alpha : -\cos\alpha : 0]$ .

Um ponto desta recta tem como coordenadas homogéneas, por exemplo,  $\left( x_o : x_o \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} : 1 \right)$ .

Segue-se então,

$$\begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha & 0 \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_o \\ x_o \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_o \\ x_o \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Se agora a recta  $r$  é uma recta perpendicular ao eixo  $Ox$ , então esta tem por coordenadas homogéneas  $[1 : 0 : -c]$  e um dos seus pontos tem, por exemplo, por coordenadas homogéneas  $(c : y_o : 1)$ , então

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ y_o \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ y_o \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Em ambos os casos, os pontos pertencentes as rectas de reflexão ficam invariantes.

Se, por outro lado, temos que os pontos ficam invariantes por uma reflexão em recta, e considerando uma recta qualquer de coordenadas homogéneas  $[\sin \beta : -\cos \beta : 0]$ , segue-se que:

$$\begin{bmatrix} \cos 2\beta & \sin 2\beta & 0 \\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_o \\ x_o \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_o \\ x_o \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Donde concluimos que

$$x_o \cos 2\beta + x_o \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \sin 2\beta = x_o \quad \text{e}$$

$$x_o \sin 2\beta - x_o \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cos 2\beta = x_o \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha},$$

que ocorre apenas quando  $\beta = \alpha$ . (i)

Para uma recta de coordenadas homogéneas  $[1 : 0 : -d]$ , temos que

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2d \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ y_o \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ y_o \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Donde concluimos que  $-c + 2d = c$  se, e somente se,  $d = c$ . (ii)

De (i) e (ii) fica demonstrado que os pontos invariantes do plano pela reflexão em recta são apenas os pontos da recta de reflexão, e somente eles. ■

**Proposição 5.2.** *As rectas invariantes por  $\Sigma_r$  são a própria recta  $r$  e todas as rectas perpendiculares à recta  $r$ .*

**Demonstração.** Pela proposição anterior, a reflexão em recta deixa invariante todo o ponto da recta de reflexão, ficando esta também invariante, ponto a ponto. Agora, sem perda de generalidade, consideremos, primeiramente, a recta  $r$  passando pela origem do referencial, distinta do eixo  $Ox$ , e

formando um ângulo de amplitude igual a  $\alpha$ . O declive desta recta é dada por  $\frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}$ . Assim, uma recta  $s$ , perpendicular à recta  $r$  passando por um ponto  $(x_o, y_o)$  tem por equação:

$$\cos\alpha x + \text{sen}\alpha y - (x_o \cos\alpha + y_o \text{sen}\alpha) = 0$$

e por coordenadas homogéneas

$$[\cos\alpha : \text{sen}\alpha : -x_o \cos\alpha - y_o \text{sen}\alpha].$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} [\cos\alpha \quad \text{sen}\alpha \quad -x_o \cos\alpha - y_o \text{sen}\alpha] \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \text{sen} 2\alpha & 0 \\ \text{sen} 2\alpha & -\cos 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} &= \\ &= [\cos\alpha \quad \text{sen}\alpha \quad -x_o \cos\alpha - y_o \text{sen}\alpha]. \end{aligned}$$

Se  $r$  é uma recta perpendicular ao eixo  $Ox$ , então  $r$  tem coordenadas homogéneas  $[1 : 0 : -c]$ .

Assim,

$$[1 \ 0 \ -c] \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [-1 \ 0 \ c],$$

em que  $[-1 : 0 : c] = [1 : 0 : -c]$ .

Em ambos os casos, as rectas invariantes por  $\Sigma_r$  são as rectas perpendiculares à recta  $r$  e a recta de reflexão  $r$ . ■

**Proposição 5.3.** *A imagem por  $\Sigma_r$  de uma recta  $f$ ,  $f \parallel r$ , é uma recta  $f'$ ,  $f' \parallel r$ . As rectas  $f'$  e  $f$  estão à mesma distância da recta  $r$  e em semi-planos opostos em relação à recta  $r$ .*

**Demonstração.** Sem perda de generalidade, consideremos a recta  $r$ , passando pela origem do referencial cartesiano, de equação  $\sin\alpha x - \cos\alpha y = 0$ , não perpendicular ao eixo  $Ox$ , e uma recta qualquer  $f$ , paralela e distinta da recta  $r$ , de equação  $\sin\alpha x - \cos\alpha y + (y_0 \cos\alpha - x_0 \sin\alpha) = 0$ . A recta  $f$  passa pelo ponto  $F$  de coordenadas cartesianas  $(x_0, y_0)$ .

As coordenadas homogêneas das rectas  $r$  e  $f$  são respectivamente  $[\sin\alpha : -\cos\alpha : 0]$  e  $[\sin\alpha : -\cos\alpha : y_0 \cos\alpha - x_0 \sin\alpha]$ .

Assim, obtemos a recta  $f'$  de coordenadas homogêneas  $[\sin\alpha : -\cos\alpha : x_0 \sin\alpha - y_0 \cos\alpha]$  resultante do produto de matrizes

$$[\sin\alpha \quad -\cos\alpha \quad (y_0 \cos\alpha - x_0 \sin\alpha)] \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha & 0 \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A recta  $f'$  é paralela à recta  $f$  e verificamos também que  $f$  e  $f'$  têm a mesma distância<sup>6</sup> à recta  $r$ , ou seja,

$$d_{f,r} = \frac{\left| -x_0 \sin\alpha + y_0 \cos\alpha \right|}{\sqrt{\sin^2\alpha + (-\cos\alpha)^2}} = \frac{\left| x_0 \sin\alpha - y_0 \cos\alpha \right|}{\sqrt{\sin^2\alpha + (-\cos\alpha)^2}} = d_{f',r}.$$

---

<sup>6</sup> A distância entre duas rectas paralelas é a distância de um ponto, pertencente a uma delas, até a outra. Assim, sendo  $P=(p_1, p_2)$  um ponto de uma recta  $p$  e  $ax + by + c = 0$  a equação de uma recta  $q$  paralela à recta  $p$ , a distância,  $d_{p,q}$  é dada por  $\left| \frac{ap_1 + bp_2 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$ .

Se a recta  $f$  é paralela à recta  $r$ , por sua vez, perpendicular ao eixo  $Ox$ , de coordenadas homogêneas  $[1 : 0 : -c]$ , então  $f$  tem como coordenadas homogêneas  $[1 : 0 : -d]$ . Então temos que

$$[1 \ 0 \ -d] \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [-1 \ 0 \ 2c - d].$$

Obtemos  $[1 : 0 : d - 2c]$  por coordenadas homogêneas da recta  $f'$ , também uma recta paralela à recta  $r$ . E as distâncias de  $f$  e  $f'$  em relação a  $r$  serão iguais a  $|d - c|$ .

Em ambos os casos, verificamos a proposição. ■

**Proposição 5.4.** *A imagem por  $\Sigma_r$  de uma recta  $f$  que intersecta a recta  $r$  no ponto  $F$  sob o ângulo  $\theta$ , é uma recta  $f'$  que intersecta a recta  $r$  no ponto  $F$  também sob ângulo  $\theta$ .*

**Demonstração.** Consideremos a recta  $r$  de equação  $\sin\alpha x - \cos\alpha y = 0$ . A recta  $f$ , que intersecta a recta  $r$  no ponto  $F$  sob o ângulo  $\theta$ , tem por equação

$$\sin(\alpha + \theta) x - \cos(\alpha + \theta) y + (y_0 \cos(\alpha + \theta) - x_0 \sin(\alpha + \theta)) = 0.$$

Assim, obtemos a equação da recta  $f'$  por

$$\sin(\alpha - \theta) x - \cos(\alpha - \theta) y + (x_0 \sin(\alpha + \theta) - y_0 \cos(\alpha + \theta)) = 0,$$

resultante de

$$[\sin(\alpha + \theta) \quad -\cos(\alpha + \theta) \quad (y_0 \cos(\alpha + \theta) - x_0 \sin(\alpha + \theta))] \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha & 0 \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Verificamos também que  $f$  e  $f'$  formam o mesmo ângulo<sup>7</sup> em relação à recta  $r$ , ou seja,

$$\begin{aligned}
 \text{tg}(\overset{\wedge}{f'r}) &= \left| \frac{\frac{\text{sen}(\alpha + \theta)}{\cos(\alpha + \theta)} - \frac{\text{sen} \alpha}{\cos \alpha}}{1 + \frac{\text{sen}(\alpha + \theta)}{\cos(\alpha + \theta)} \cdot \frac{\text{sen} \alpha}{\cos \alpha}} \right| \\
 &= \left| \frac{\sec \alpha \sec(\alpha + \theta) \text{sen} \theta}{\cos \theta \sec \alpha \sec(\alpha + \theta)} \right| \\
 &= \left| \frac{-\sec \alpha \sec(\alpha - \theta) \text{sen} \theta}{\cos \theta \sec \alpha \sec(\alpha - \theta)} \right| \\
 &= \left| \frac{\frac{\text{sen}(\alpha - \theta)}{\cos(\alpha - \theta)} - \frac{\text{sen} \alpha}{\cos \alpha}}{1 + \frac{\text{sen}(\alpha - \theta)}{\cos(\alpha - \theta)} \cdot \frac{\text{sen} \alpha}{\cos \alpha}} \right| \\
 &= \text{tg}(\overset{\wedge}{f'r})
 \end{aligned}$$

Consideremos agora, sem perda de generalidade, a recta  $r$  coincidente com o eixo  $Oy$  e a recta  $f$  que passa pela origem do referencial. As coordenadas homogêneas de cada recta são, respectivamente,  $[0 : 1 : 0]$  e  $[\text{sen} \alpha : -\cos \alpha : 0]$ . Assim,

---

<sup>7</sup> Dadas duas rectas concorrentes  $p$  e  $q$ , estas determinam quatro ângulos, dois a dois opostos pelo vértice. Considerando  $\theta_1 + \theta_2 = 180^\circ$ , é evidente que  $\text{tg} \theta_1 = -\text{tg} \theta_2$ . Sendo  $m_p$  e  $m_q$  os coeficientes angulares de  $p$  e  $q$  respectivamente, resultantes de  $\frac{p_{22} - p_{12}}{p_{21} - p_{11}}$  e  $\frac{q_{22} - q_{12}}{q_{21} - q_{11}}$ , onde  $(p_{11}, p_{12})$  e  $(p_{21}, p_{22})$  são pontos distintos da recta  $p$  e  $(q_{11}, q_{12})$  e  $(q_{21}, q_{22})$  são pontos distintos da recta  $q$ , temos que  $\text{tg}(\overset{\wedge}{pq}) = \left| \frac{m_p - m_q}{1 + m_p m_q} \right|$ .



$$[\sin \alpha \quad -\cos \alpha \quad 0] \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [-\sin \alpha \quad -\cos \alpha \quad 0],$$

em que  $[-\sin \alpha : -\cos \alpha : 0] = [\sin(180^\circ - \alpha) : \cos(180^\circ - \alpha) : 0]$ .

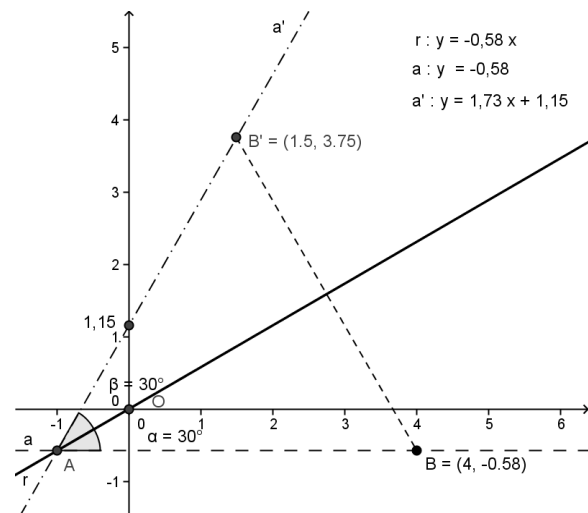
Em ambos os casos, verificamos a proposição. ■

Para percebermos melhor esta proposição, observemos o exemplo que se segue.

**Exemplo 5.1.** Consideremos a reflexão numa recta de coordenadas homogéneas  $\left[ \frac{\sqrt{3}}{3} : -1 : 0 \right]$  de uma recta de coordenadas homogéneas  $\left[ 0 : 1 : \frac{\sqrt{3}}{3} \right]$  (figura 9). Assim,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}$$

em que  $\left[ \frac{\sqrt{3}}{2} : -\frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{3} \right] = [1,73 : -1 : 1,15]$



**Figura 9** – Reflexão em recta



**Proposição 5.5.** *A reflexão em recta inverte a orientação do ângulo.*

**Demonstração.** Sem perda de generalidade, consideremos uma recta  $r$  definida pela equação  $\sin\alpha x - \cos\alpha y = 0$ , e a recta  $f$  de equação  $\sin(\alpha+\theta) x - \cos(\alpha+\theta) y = 0$ , de modo a formar um ângulo  $\alpha + \theta \neq 0^\circ$  em relação à recta  $r$ , no sentido anti-horário, ambas passando pela origem do referencial.

A equação da recta  $f' = \Sigma_r(f)$  é definida por

$$\sin(\alpha - \theta) x - \cos(\alpha - \theta) y = 0.$$

O ângulo orientado que a recta  $r$  determina com a recta  $f$  tem amplitude igual a  $+\theta$ , enquanto que o ângulo orientado que a recta  $f'$  determina em relação à recta  $r$  possui amplitude  $-\theta$  (sentido horário), ou seja,

$$\text{tg}(\hat{rf}) = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad \text{e} \quad \text{tg}(\hat{f'r}) = -\frac{\sin\theta}{\cos\theta}.$$

Se considerarmos agora a recta  $r$  coincidente com o eixo  $Oy$ , temos como coordenadas homogêneas para  $r$ ,  $[0 : 1 : 0]$ , e para  $f$ ,  $[\sin\alpha : -\cos\alpha : 0]$ . Assim,

$$[\sin\alpha \ -\cos\alpha \ 0] \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [-\sin\alpha \ -\cos\alpha \ 0] = [\sin(180^\circ - \alpha) \ \cos(180^\circ - \alpha) \ 0]$$

Fazendo  $\beta = 180^\circ - \alpha$ , notamos que a orientação do ângulo  $\beta$  é contrária à do ângulo  $\alpha$ .

Em ambos os casos, verificamos a proposição. ■

Devido ao resultado demonstrado na proposição anterior, ou seja, a inversão da orientação no plano euclidiano, a reflexão em recta é considerada uma isometria imprópria.

Pelo facto da reflexão em recta ser uma isometria e da composta de um número finito de isometrias ser também uma isometria, é evidente que toda a composta de um número finito de reflexões em rectas é uma isometria no plano, e toda a isometria no plano pode ser representada pela composta de um número finito de reflexões em rectas.

Estes resultados serão a base do desenvolvimento para os capítulos seguintes.

## CAPÍTULO 6 – TRANSLAÇÃO

Passemos a uma isometria composta por duas reflexões em recta e analisemos primeiramente o caso em que as rectas são paralelas.

Consideremos a isometria  $\Omega = \Sigma_g \circ \Sigma_f$ , onde  $f \parallel g$ . Assim,

$$\forall P \in \mathcal{P}_{\mathbb{E}}, \text{ se } \Sigma_f(P) = P' \text{ e } \Sigma_g(P') = P'', \text{ então } \Omega(P) = P''.$$

Sejam  $(x, y)$  as coordenadas cartesianas do ponto  $P$ . Consideremos as rectas  $f$  e  $g$ , paralelas, pelas suas coordenadas homogêneas, respectivamente,  $[a : b : c]$  e  $[a : b : d]$ . Nestas condições, a distância entre  $f$  e  $g$  é igual a  $\left| \frac{d - c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$ , e o correspondente vector distância da recta  $f$  para a recta  $g$  é  $\left( \frac{a(c - d)}{a^2 + b^2}, \frac{b(c - d)}{a^2 + b^2} \right)$ .

Observamos que a imagem do ponto  $P$  por  $\Sigma_f$  é o ponto  $P'$  de coordenadas cartesianas  $\left( \frac{(b^2 - a^2)x - 2a(c + by)}{a^2 + b^2}, \frac{-2b(c - ax) + (a^2 - b^2)y}{a^2 + b^2} \right)$ , e a imagem do ponto  $P'$  por  $\Sigma_g$  é o ponto  $P''$  de coordenadas cartesianas  $\left( \frac{2a(c - d)}{a^2 + b^2} + x, \frac{2b(c - d)}{a^2 + b^2} + y \right)$ .

Pela transformação  $\Sigma_g \circ \Sigma_f$  e através das matrizes de transformação homogénea associadas a cada uma das reflexões em recta, respectivamente,

$$\begin{bmatrix} \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} & \frac{-2ab}{a^2 + b^2} & \frac{-2ad}{a^2 + b^2} \\ \frac{-2ab}{a^2 + b^2} & \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} & \frac{-2bd}{a^2 + b^2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} & \frac{-2ab}{a^2 + b^2} & \frac{-2ac}{a^2 + b^2} \\ \frac{-2ab}{a^2 + b^2} & \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} & \frac{-2bc}{a^2 + b^2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{2a(c-d)}{a^2 + b^2} \\ 0 & 1 & \frac{2b(c-d)}{a^2 + b^2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Segue-se que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{2a(c-d)}{a^2 + b^2} \\ 0 & 1 & \frac{2b(c-d)}{a^2 + b^2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2a(c-d)}{a^2 + b^2} + x \\ \frac{2b(c-d)}{a^2 + b^2} + y \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Observamos que a matriz de transformação homogénea associada à transformação  $\Sigma_g \circ \Sigma_f$ ,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{2a(c-d)}{a^2+b^2} \\ 0 & 1 & \frac{2b(c-d)}{a^2+b^2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

pode ser considerada associada a uma translação de vector igual ao dobro do vector  $\left( \frac{a(c-d)}{a^2+b^2}, \frac{b(c-d)}{a^2+b^2} \right)$ .

Assim, pela isometria  $\Omega = \Sigma_g \circ \Sigma_f$  todos os pontos são transladados pelo vector correspondente ao vector  $\overrightarrow{PP''}$ . Notamos que a norma do vector  $\overrightarrow{PP''}$  não depende da posição do ponto P e é igual a  $2 \left| \frac{d-c}{\sqrt{a^2+b^2}} \right|$ , ou seja, o dobro da distância entre as rectas  $f$  e  $g$ .

Concluimos então, do estudo feito, a seguinte proposição:

**Proposição 6.1.** *A composta  $\Sigma_g \circ \Sigma_f$  de duas reflexões em rectas paralelas,  $f$  e  $g$ , é a translação  $\tau_{2d}$ , cujo vector  $d$  é o dobro do vector distância da recta  $f$  à recta  $g$ .*

**Proposição 6.2.** *Toda a translação  $\tau_v$  pode ser representada, de infinitas maneiras, como o resultado da composição de duas reflexões em rectas, desde que as duas rectas consideradas sejam paralelas e de vector distância igual à metade do vector da translação.*

**Demonstração.** Consideremos o vector  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ , uma recta qualquer  $a$ , perpendicular à direcção do vector, passando pelo ponto A, de coordenadas cartesianas  $(a_1, a_2)$ , e a recta  $b$  paralela à recta  $a$ , passando pelo ponto B, tal que  $\overrightarrow{AB} = \mathbf{v}/2$ .

Assim, a recta  $a$  terá por coordenadas homogéneas  $[v_1 : v_2 : -a_1v_1 - a_2v_2]$  e a recta  $b$  terá por coordenadas homogéneas  $[v_1 : v_2 : -a_1v_1 - a_2v_2 - \frac{v_1^2 + v_2^2}{2}]$ .

Encontremos a imagem de um ponto qualquer P, de coordenadas cartesianas  $(p_1, p_2)$ , pela composta das reflexões em recta  $\Sigma_b \circ \Sigma_a$ .

Consideremos as matrizes de transformação homogéneas associadas a cada uma das reflexões em recta  $\Sigma_a$  e  $\Sigma_b$ , respectivamente,

$$S_a = \begin{bmatrix} \frac{-v_1^2 + v_2^2}{v_1^2 + v_2^2} & -\frac{2v_1v_2}{v_1^2 + v_2^2} & \frac{2v_1(a_1v_1 + a_2v_2)}{v_1^2 + v_2^2} \\ -\frac{2v_1v_2}{v_1^2 + v_2^2} & \frac{v_1^2 - v_2^2}{v_1^2 + v_2^2} & \frac{2v_2(a_1v_1 + a_2v_2)}{v_1^2 + v_2^2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e}$$

$$S_b = \begin{bmatrix} \frac{-v_1^2 + v_2^2}{v_1^2 + v_2^2} & -\frac{2v_1v_2}{v_1^2 + v_2^2} & \frac{2v_1\left(a_1v_1 + a_2v_2 + \frac{1}{2}(v_1^2 + v_2^2)\right)}{v_1^2 + v_2^2} \\ -\frac{2v_1v_2}{v_1^2 + v_2^2} & \frac{v_1^2 - v_2^2}{v_1^2 + v_2^2} & \frac{2v_2\left(a_1v_1 + a_2v_2 + \frac{1}{2}(v_1^2 + v_2^2)\right)}{v_1^2 + v_2^2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ao calcular  $S_b S_a \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 1 \end{bmatrix}$ , obtemos o ponto de coordenadas  $(p_1+v_1, p_2+v_2)$ , que corresponde a ima-

gem por translação do ponto P segundo o vector  $\mathbf{v}$ .

Assim, como as rectas foram arbitrárias, apenas satisfazendo a condição de serem paralelas e de distância igual a metade do vector, a proposição fica demonstrada. ■

**Proposição 6.3.** *Toda a translação  $\tau_{\mathbf{v}}$  é uma isometria que aplica uma recta  $g$  numa recta  $g'$ , com  $g' \parallel g$ .*

**Demonstração.** Consideremos a recta  $g$  pelas suas coordenadas homogéneas  $[a : b : c]$  e um seu ponto qualquer de coordenadas homogéneas  $(x : y : 1)$ . Pela proposição 2.1 sabemos que uma transformação geométrica preserva a incidência, assim,

$$[a \ b \ c] \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad [a' \ b' \ c'] \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = 0.$$

Visto que podemos considerar  $I_3$  como  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -v_1 \\ 0 & 1 & -v_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & v_1 \\ 0 & 1 & v_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ , em que  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & v_1 \\ 0 & 1 & v_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  é a matriz

de transformação homogénea associada à translação de vector  $\mathbf{v}$ ,  $\tau_{\mathbf{v}}$ , temos que as igualdades acima se mantêm.



Deste modo, podemos considerar  $[a \ b \ c] \begin{bmatrix} 1 & 0 & -v_1 \\ 0 & 1 & -v_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [a' \ b' \ c']$ , e através do produto

$[a \ b \ c] \begin{bmatrix} 1 & 0 & -v_1 \\ 0 & 1 & -v_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ , encontrar as coordenadas homogéneas da recta  $g' = \tau_v(g)$ , ou seja,

$$[a : b : -a v_1 - b v_2 + c].$$

Concluimos então que a recta  $g'$  é paralela a recta  $g$ . ■

**Proposição 6.4.** *A translação  $\tau_v$  não possui nenhum ponto invariante se o vector  $v$  não é nulo.*

**Demonstração.** Seja  $v \neq 0$ ,  $v = (v_1, v_2)$ , e consideremos um ponto qualquer  $P$  de coordenadas cartesianas  $(p_1, p_2)$ . Pela translação  $\tau_v$  a imagem do ponto  $P$  é o ponto  $P'$  de coordenadas cartesianas  $(p_1 + v_1, p_2 + v_2)$ . Visto que  $v_1 \neq 0$  e  $v_2 \neq 0$ , então  $P \neq P'$  e concluimos que a translação  $\tau_v$  não possui nenhum ponto invariante. ■

**Proposição 6.5.** *A translação  $\tau_v$ , com  $v \neq 0$ , deixa invariante somente as rectas que estão na direcção de  $v$ .*

**Demonstração.** Consideremos a recta  $g$  paralela ao vector  $v = (v_1, v_2)$ , então  $g$  tem por coordenadas homogéneas  $[v_2 : -v_1 : x_0 v_2 + y_0 v_1]$ , em que  $(x_0, y_0)$  são as coordenadas cartesianas de um ponto qualquer da recta  $g$ .

A transformação da recta  $g$  pela translação  $\tau_v$  é obtida por

$$\begin{bmatrix} v_2 & -v_1 & x_0v_2 + y_0v_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -v_1 \\ 0 & 1 & -v_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Assim, a recta  $\tau_v(g)$  tem por coordenadas homogéneas  $[v_2 : -v_1 : x_0v_2 + y_0v_1]$ , donde concluimos que  $\tau_v(g) = g$ . ■

**Proposição 6.6.** *A composta de duas ou mais translações é uma translação.*

**Demonstração.** Provemos através do princípio de indução matemática.

Consideremos inicialmente duas translações quaisquer  $\tau_v$ , com  $v \neq 0$ , e  $\tau_w$ , com  $w \neq 0$ , onde  $v \neq w$ , e as suas respectivas matrizes de transformação homogénea associadas,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & v_1 \\ 0 & 1 & v_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 1 & 0 & w_1 \\ 0 & 1 & w_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Obtemos, como produto das matrizes consideradas, a matriz  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & v_1 + w_1 \\ 0 & 1 & v_2 + w_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  que corresponde à

matriz de transformação homogénea associada à translação de vector  $v + w$ .

Suponhamos que a composta de  $n$  translações  $\tau_{\mathbf{v}_i}$ , com  $\mathbf{v}_i \neq 0$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  é uma translação

de vector  $\sum_{i=1}^n \mathbf{v}_i$ , cuja matriz de transformação homogénea associada é 
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \sum_{i=1}^n \mathbf{v}_{i_1} \\ 0 & 1 & \sum_{i=1}^n \mathbf{v}_{i_2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
 e verifiquemos

se a composta para  $n+1$  translações é uma translação.

Consideremos a matriz de transformação homogénea associada 
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \mathbf{v}_{n+1_1} \\ 0 & 1 & \mathbf{v}_{n+1_2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
 respeitante a

translação de vector  $\mathbf{v}_{n+1}$ . Temos,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \sum_{i=1}^n \mathbf{v}_{i_1} \\ 0 & 1 & \sum_{i=1}^n \mathbf{v}_{i_2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \mathbf{v}_{n+1_1} \\ 0 & 1 & \mathbf{v}_{n+1_2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \sum_{i=1}^n \mathbf{v}_{i_1} + \mathbf{v}_{n+1_1} \\ 0 & 1 & \sum_{i=1}^n \mathbf{v}_{i_2} + \mathbf{v}_{n+1_2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{v}_{i_1} \\ 0 & 1 & \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{v}_{i_2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matriz de transformação homogénea associada a uma translação de vector  $\sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{v}_i$ . ■

**Proposição 6.7.** *A composição de translações é comutativa.*

**Demonstração.** Consideremos duas translações quaisquer  $\tau_{\mathbf{v}}$ , com  $\mathbf{v} \neq 0$ , e  $\tau_{\mathbf{w}}$ , com  $\mathbf{w} \neq 0$ , sendo  $\mathbf{v} \neq \mathbf{w}$ , e as suas respectivas matrizes de transformação homogénea associadas

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & v_1 \\ 0 & 1 & v_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & w_1 \\ 0 & 1 & w_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A composta  $\tau_v \circ \tau_w$ , associada à translação de vector  $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ , tem por matriz de transformação

homogénea associada a matriz  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & v_1 + w_1 \\ 0 & 1 & v_2 + w_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

Como  $v_1, v_2, w_1$  e  $w_2$  são números reais, é válida a propriedade comutativa, ou seja,

$$v_1 + w_1 = w_1 + v_1 \quad \text{e} \quad v_2 + w_2 = w_2 + v_2,$$

segue-se então que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & v_1 + w_1 \\ 0 & 1 & v_2 + w_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & w_1 + v_1 \\ 0 & 1 & w_2 + v_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & w_1 \\ 0 & 1 & w_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & v_1 \\ 0 & 1 & v_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo concluímos que,  $\tau_v \circ \tau_w = \tau_w \circ \tau_v$ . ■



## CAPÍTULO 7 – ROTAÇÃO

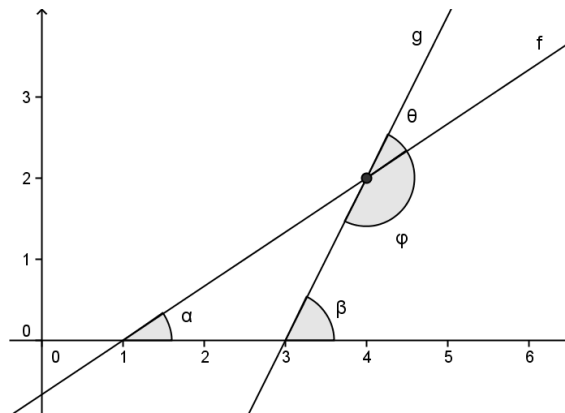
Consideremos agora o caso em que na composição de duas reflexões em recta, as rectas são concorrentes.

Seja a isometria  $\Omega = \Sigma_g \circ \Sigma_f$ , onde  $f$  e  $g$  são rectas concorrentes num ponto  $F$ . assim,

$$\forall P \in \mathcal{P}_{\mathbb{E}}, \text{ se } \Sigma_f(P) = P' \text{ e } \Sigma_g(P') = P'', \text{ então } \Omega(P) = P''.$$

Consideremos o ponto de intersecção  $F$ , de coordenadas homogéneas  $(f_1 : f_2 : 1)$ , das duas rectas  $f$  e  $g$ , definidas pelas suas coordenadas homogéneas  $[\sin\alpha : -\cos\alpha : f_2 \cos\alpha - f_1 \sin\alpha]$  e  $[\sin\beta : -\cos\beta : f_2 \cos\beta - f_1 \sin\beta]$ , respectivamente.

As rectas  $f$  e  $g$  se intersectam sob o ângulo positivo,  $+\theta$ , (sentido anti-horário) e sob o ângulo negativo (sentido horário)  $-\varphi$ . Assim, temos que  $\beta = \alpha + \theta$  (figura 10).



**Figura 10** – Reflexão em duas rectas concorrentes

As matrizes de transformação homogénea associadas às reflexões em rectas, nas rectas  $f$  e  $g$ , são, respectivamente,

$$S_f = \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha & f_1(1 - \cos 2\alpha) - f_2 \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha & -f_1 \sin 2\alpha + f_2(1 + \cos 2\alpha) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$S_g = \begin{bmatrix} \cos 2\beta & \sin 2\beta & f_1(1 - \cos 2\beta) - f_2 \sin 2\beta \\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta & -f_1 \sin 2\beta + f_2(1 + \cos 2\beta) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Assim, a matriz de transformação homogénea associada a  $\Sigma_g \circ \Sigma_f$ , é da forma

$$\begin{bmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta & f_1(1 - \cos 2\theta) + f_2 \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta & -f_1 \sin 2\theta + f_2(1 - \cos 2\theta) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ou

$$\begin{bmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta & 2 \sin \theta (f_2 \cos \theta + f_1 \sin \theta) \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta & 2 \sin \theta (-f_1 \cos \theta + f_2 \sin \theta) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

que corresponde a matriz de transformação homogénea associada a uma rotação de centro no ponto  $(f_1, f_2)$  e ângulo positivo  $+2\theta$ .

Do estudo feito, concluímos, então, a seguinte proposição:

**Proposição 7.1.** A composta  $\Sigma_g \circ \Sigma_f$  de duas reflexões em rectas concorrentes,  $f$  e  $g$ , que se intersectam no ponto  $F$ , sob ângulo orientado  $\gamma$ , é a rotação,  $\Delta_{F, \gamma}$ , cujo ângulo de rotação é o dobro do ângulo  $\theta$  da recta  $f$  à recta  $g$ , ou seja  $2\theta = \gamma$ .  $\square$

**Proposição 7.2.** Toda rotação  $\Delta_{F, \gamma}$  pode ser representada de infinitas maneiras como composta de duas reflexões em rectas, desde que as duas rectas consideradas se intersectem no ponto  $F$ , sob o ângulo  $\frac{\gamma}{2}$ .

**Demonstração.** Consideremos o ponto  $F$  de coordenadas cartesianas  $(f_1, f_2)$ , o ângulo positivo  $+\gamma$ , uma recta qualquer  $a$ , passando pelo ponto  $F$ , e uma recta  $b$ , também passando por  $F$  e formando o ângulo positivo de  $+\frac{\gamma}{2}$  com a recta  $a$ .

Sejam as coordenadas homogêneas das rectas  $a$  e  $b$ ,  $[\sin\alpha : -\cos\alpha : f_2 \cos\alpha - f_1 \sin\alpha]$  e  $[\sin(\alpha + \frac{\gamma}{2}) : -\cos(\alpha + \frac{\gamma}{2}) : f_2 \cos(\alpha + \frac{\gamma}{2}) - f_1 \sin(\alpha + \frac{\gamma}{2})]$ , respectivamente.

Encontremos a imagem de um ponto qualquer  $P$  de coordenadas cartesianas  $(p_1, p_2)$ , pela composta de reflexões em recta,  $\Sigma_b \circ \Sigma_a$ .

Consideremos as matrizes de transformação homogêneas associadas a cada uma das reflexões em recta  $\Sigma_a$  e  $\Sigma_b$ , respectivamente,

$$S_a = \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha & f_1(1 - \cos 2\alpha) - f_2 \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha & -f_1 \sin 2\alpha + f_2(1 + \cos 2\alpha) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



e

$$S_b = \begin{bmatrix} \cos 2\left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right) & \sin 2\left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right) & f_1\left(1 - \cos 2\left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right)\right) - f_2 \sin 2\left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right) \\ \sin 2\left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right) & -\cos 2\left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right) & -f_1 \sin 2\left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right) + f_2\left(1 + \cos 2\left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right)\right) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ao calcular  $S_b S_a$ , obtemos a matriz  $\begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & f_1(1 - \cos \gamma) + f_2 \sin \gamma \\ \sin \gamma & \cos \gamma & -f_1 \sin \gamma + f_2(1 - \cos \gamma) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  que corresponde à

matriz de transformação homogénea associada à uma rotação de centro no ponto F e ângulo positivo  $\gamma$ .

Assim, como as rectas foram arbitrárias, apenas satisfazendo a condição de serem concorrentes no ponto F e formando o ângulo positivo  $+\frac{\gamma}{2}$ , a proposição fica demonstrada. ■

**Proposição 7.3.** *A rotação  $\Delta_{F, \gamma}$ , de centro no ponto F e ângulo não nulo, tem somente o ponto F invariante.*

**Demonstração.** Seja  $\Delta_{F, \gamma}$  uma rotação de centro no ponto F de coordenadas cartesianas  $(f_1, f_2)$  e ângulo não nulo,  $\gamma$ , cuja matriz de transformação homogénea associada é

$$\begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & f_1(1 - \cos \gamma) + f_2 \sin \gamma \\ \sin \gamma & \cos \gamma & -f_1 \sin \gamma + f_2(1 - \cos \gamma) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Seja P um ponto qualquer de coordenadas cartesianas  $(p_1, p_2)$ .

Façamos  $\Delta_{F,\gamma}(P) = P$  através das suas correspondentes matrizes.

Assim,

$$\begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & f_1(1 - \cos \gamma) + f_2 \sin \gamma \\ \sin \gamma & \cos \gamma & -f_1 \sin \gamma + f_2(1 - \cos \gamma) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

donde,

$$\begin{bmatrix} f_1 + (p_1 - f_1) \cos \gamma + (f_2 - p_2) \sin \gamma \\ f_2 + (p_2 - f_2) \cos \gamma + (-f_1 + p_1) \sin \gamma \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Esta igualdade só ocorre se, e somente se,  $p_1 = f_1$  e  $p_2 = f_2$ , ou seja, o único ponto invariante pela rotação  $\Delta_{F,\gamma}$  é o seu centro. ■

**Proposição 7.4.** *A rotação  $\Delta_{F,\gamma}$ , de centro no ponto  $F$  e ângulo não nulo, deixa as rectas que passam por  $F$  invariantes se, e somente se, o ângulo de rotação for de  $180^\circ$  (ou  $\pi$  rad).*

**Demonstração.** Sejam  $(f_1, f_2)$  as coordenadas cartesianas do ponto  $F$  e consideremos inicialmente o ângulo de rotação igual a  $180^\circ$ .

Seja a matriz de transformação homogénea associada a rotação  $\Delta_{F,180^\circ}$  a que se segue:

$$R_{F,180^\circ} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2f_1 \\ 0 & -1 & 2f_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Seja  $r = [\sin\alpha : -\cos\alpha : f_2 \cos\alpha - f_1 \sin\alpha]$  uma recta que passa pelo ponto F e determinando um ângulo  $\alpha$  com o eixo Ox. Então, obtemos como imagem da recta  $r$ , por esta rotação, a recta de coordenadas homogéneas  $[-\sin\alpha : \cos\alpha : -f_2 \cos\alpha + f_1 \sin\alpha]$ , resultante de

$$[\sin\alpha \quad -\cos\alpha \quad f_2 \cos\alpha - f_1 \sin\alpha] \cdot (R_{F, 180^\circ})^{-1}.$$

No caso da recta  $r$  ter por coordenadas homogéneas  $[1 : 0 : -f_1]$ , obtemos as coordenadas homogéneas de  $\Delta_{F, 180^\circ}(r) = [-1 : 0 : f_1]$ .

Concluimos, em ambos os casos, que as rectas ficam invariantes. (i)

Consideremos agora uma rotação de centro no ponto F e ângulo  $\gamma$ , distinta da identidade, isto é,  $\gamma \neq 0^\circ$ , e que deixe as rectas, passando pelo ponto F, invariantes.

A matriz de transformação homogénea associada é

$$R_{F, \gamma} = \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & f_1(1 - \cos\gamma) + f_2\sin\gamma \\ \sin\gamma & \cos\gamma & -f_1\sin\gamma + f_2(1 - \cos\gamma) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ao calcular

$$[\sin\alpha \quad -\cos\alpha \quad (f_2 \cos\alpha - f_1 \sin\alpha)] \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & f_1(1 - \cos\gamma) + f_2\sin\gamma \\ \sin\gamma & \cos\gamma & -f_1\sin\gamma + f_2(1 - \cos\gamma) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1},$$

obtemos  $[\sin(\alpha + \gamma) \quad -\cos(\alpha + \gamma) \quad f_2 \cos(\alpha + \gamma) - f_1 \sin(\alpha + \gamma)]$ .

Como  $[\sin\alpha : -\cos\alpha : f_2 \cos\alpha - f_1 \sin\alpha] = [-\sin\alpha : \cos\alpha : -f_2 \cos\alpha + f_1 \sin\alpha]$ , podemos obter as relações

$$\sin(\alpha + \gamma) = \sin\alpha \quad \text{e} \quad \cos(\alpha + \gamma) = \cos\alpha$$

ou

$$\sin(\alpha + \gamma) = -\sin\alpha \quad \text{e} \quad \cos(\alpha + \gamma) = -\cos\alpha.$$

Como sabemos que,

$$\sin(\alpha + \gamma) = \sin\alpha \cos\gamma + \sin\gamma \cos\alpha \quad \text{e} \quad \cos(\alpha + \gamma) = \cos\alpha \cos\gamma - \sin\alpha \sin\gamma,$$

concluimos que  $\cos\gamma = 1$  e  $\sin\gamma = 0$ , ou  $\cos\gamma = -1$  e  $\sin\gamma = 0$ , obtendo, como valores para o ângulo,  $\gamma = 0^\circ$  ou  $\gamma = 180^\circ$ .

Se considerarmos  $r = [1 : 0 : -f_1]$ , visto que  $[1 : 0 : -f_1] = [-1 : 0 : f_1]$ , temos

$$[1 : 0 : -f_1] = [\cos\gamma : -\sin\gamma : -f_1 \cos\gamma + f_2 \sin\gamma]$$

ou

$$[-1 : 0 : f_1] = [\cos\gamma : -\sin\gamma : -f_1 \cos\gamma + f_2 \sin\gamma]$$

Donde também concluimos que  $\gamma = 0^\circ$  ou  $\gamma = 180^\circ$ .

Atendendo que consideramos desde o início  $\gamma \neq 0^\circ$ , então  $\gamma = 180^\circ$ . (ii)

De (i) e de (ii), a proposição fica assim demonstrada. ■

**Proposição 7.5.** *Seja  $p$  uma recta arbitrária e  $p'$  a sua imagem por  $\Delta_{F,\gamma}$ , então a recta  $p$  intersecta a recta  $p'$  sob o ângulo de rotação  $\gamma$ , se este não for nulo ou raso. Caso contrário, a recta  $p$  é paralela à recta  $p'$ .*

**Demonstração.** Seja  $p$  a recta passando por  $A = (a_1, a_2)$  e determinando um ângulo positivo  $\alpha$  com o eixo  $Ox$ , esta tem como coordenadas homogêneas  $[\sin\alpha : -\cos\alpha : a_2 \cos\alpha - a_1 \sin\alpha]$ .

Sem perda de generalidade, consideremos a rotação de centro na origem do referencial cartesiano  $O$  e ângulo  $\theta$ . A imagem da recta  $p$  por  $\Delta_{O,\theta}$  é a recta  $p'$  de coordenadas homogêneas

$$[\sin(\alpha-\theta) : -\cos(\alpha-\theta) : a_2 \cos\alpha - a_1 \sin\alpha].$$

Ao calcular o ângulo entre as rectas  $p$  e  $p'$ , verificamos que este tem amplitude igual a  $\theta$ .

No caso de  $\theta = 0^\circ$  ou  $\theta = 180^\circ$ , averiguamos que a imagem da recta  $p$  é a recta de coordenadas homogêneas  $[\sin\alpha : -\cos\alpha : a_2 \cos\alpha - a_1 \sin\alpha]$  ou  $[-\sin\alpha : \cos\alpha : a_1 \sin\alpha - a_2 \cos\alpha]$ , respectivamente, e ambas são paralelas à recta dada. ■

**Proposição 7.6.** *A composta de duas rotações de mesmo centro e com ângulos diferentes,  $\alpha$  e  $\beta$ , é uma rotação neste mesmo centro e de ângulo  $\alpha + \beta$ .*

**Demonstração.** Sejam  $\Delta_{F,\alpha}$  e  $\Delta_{F,\beta}$  duas rotações de centro no ponto  $F$  de coordenadas cartesianas  $(f_1, f_2)$  e ângulos não nulos  $\alpha$  e  $\beta$ , respectivamente, cujas matrizes de transformação homogênea associadas são as seguintes:

$$R_{F,\alpha} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & f_1(1-\cos\alpha) + f_2\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha & -f_1\sin\alpha + f_2(1-\cos\alpha) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e}$$

$$R_{F,\beta} = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & f_1(1 - \cos \beta) + f_2 \sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta & -f_1 \sin \beta + f_2(1 - \cos \beta) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Então, } R_{F,\alpha} R_{F,\beta} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) & f_1(1 - \cos(\alpha + \beta)) + f_2 \sin(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) & -f_1 \sin(\alpha + \beta) + f_2(1 - \cos(\alpha + \beta)) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Observamos que a matriz resultante é a matriz de transformação homogénea associada a uma rotação de centro no ponto F e de ângulo  $\alpha + \beta$ . ■

**Proposição 7.7.** *A composição de rotações com o mesmo centro é comutativa.*

**Demonstração.** Pela proposição anterior, a composta de duas rotações com o mesmo centro, por exemplo o ponto F, e amplitudes de ângulos diferentes,  $\alpha$  e  $\beta$ , é uma rotação neste mesmo centro e com a amplitude de ângulo igual a  $\alpha + \beta$ , e de matriz de transformação homogénea associada igual a

$$R_{F,\alpha+\beta} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) & f_1(1 - \cos(\alpha + \beta)) + f_2 \sin(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) & -f_1 \sin(\alpha + \beta) + f_2(1 - \cos(\alpha + \beta)) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned} R_{F,\alpha+\beta} &= \begin{bmatrix} \cos(\beta + \alpha) & -\sin(\beta + \alpha) & f_1(1 - \cos(\beta + \alpha)) + f_2 \sin(\beta + \alpha) \\ \sin(\beta + \alpha) & \cos(\beta + \alpha) & -f_1 \sin(\beta + \alpha) + f_2(1 - \cos(\beta + \alpha)) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= R_{F,\beta+\alpha}. \end{aligned}$$

Logo,  $\Delta_{F,\alpha} \circ \Delta_{F,\beta} = \Delta_{F,\beta} \circ \Delta_{F,\alpha}$ . ■

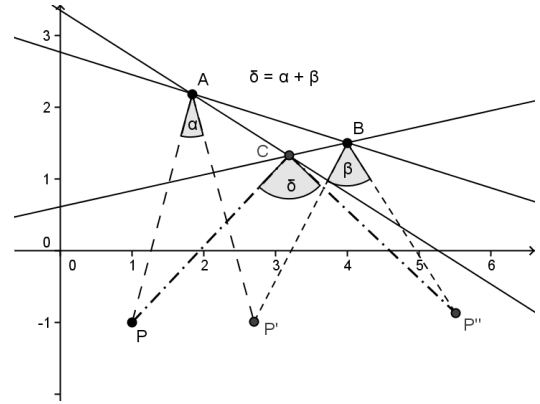
**Proposição 7.8.** *A composta de duas rotações é uma translação, se a soma das amplitudes dos ângulos for nulo, ou é uma rotação, se a soma das amplitudes dos ângulos de rotação for diferente de zero.*

**Demonstração.** Consideremos duas rotações distintas,  $\Delta_{A,\alpha}$  e  $\Delta_{B,\beta}$ , (figura 11) e as suas respectivas matrizes de transformação homogênea associadas

$$R_{A,\alpha} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & a_1(1 - \cos \alpha) + a_2 \sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha & -a_1 \sin \alpha + a_2(1 - \cos \alpha) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$R_{B,\beta} = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & b_1(1 - \cos \beta) + b_2 \sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta & -b_1 \sin \beta + b_2(1 - \cos \beta) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$



**Figura 11** – Composição de duas rotações em centros distintos e  $\alpha + \beta \neq 0^\circ$

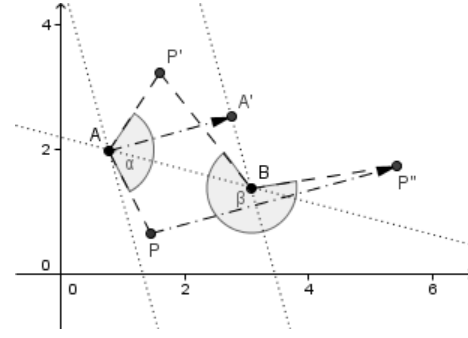
Ao calcular  $R_{B,\beta} R_{A,\alpha}$ , obtemos

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) & b_1 + (a_1 - b_1)\cos \beta - a_1 \cos(\alpha + \beta) + (b_2 - a_2)\sin \beta + a_2 \sin(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) & b_2 + (a_2 - b_2)\cos \beta - a_2 \cos(\alpha + \beta) + (a_1 - b_1)\sin \beta - a_1 \sin(\alpha + \beta) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

em que para  $\alpha + \beta \neq 0^\circ$ , está associada à rotação de centro no ponto C, distinto dos pontos A e B, e cuja amplitude do ângulo de rotação igual a  $\alpha + \beta$ .

Se  $\alpha + \beta = 0^\circ$  (figura 12), temos a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & (b_1 - a_1)(1 - \cos \beta) + (b_2 - a_2)\sin \beta \\ 0 & 1 & (b_2 - a_2)(1 - \cos \beta) + (a_1 - b_1)\sin \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



**Figura 12** – Composição de duas rotações em centros distintos e  $\alpha + \beta = 0^\circ$

que está associada à translação de vector

$$((b_1 - a_1)(1 - \cos \beta) + (b_2 - a_2)\sin \beta, (b_2 - a_2)(1 - \cos \beta) + (a_1 - b_1)\sin \beta),$$

e que corresponde ao dobro do vector distância entre as rectas que passam por A e B, respectivamente. ■

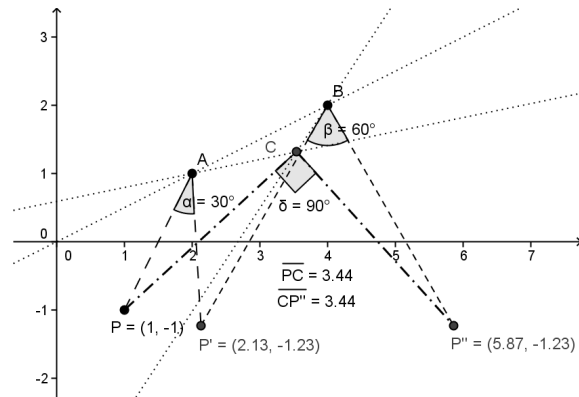
**Exemplo 7.1.** Consideremos duas rotações distintas,  $\Delta_{A, \alpha}$  e  $\Delta_{B, \beta}$ , com centro nos pontos A e B, de coordenadas cartesianas, (2, 1) e (4, 2), respectivamente, e de ângulos  $\alpha = 30^\circ$  e  $\beta = 60^\circ$  (vide figura 13).

$$\begin{bmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ & 4(1 - \cos 30^\circ) + 2\sin 30^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ & -4\sin 30^\circ + 2(1 - \cos 30^\circ) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ & 2(1 - \cos 30^\circ) + \sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ & -2\sin 30^\circ + (1 - \cos 30^\circ) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ & 4 + (2 - 4)\cos 60^\circ - 2\cos 90^\circ + (2 - 1)\sin 60^\circ + 1\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ & 2 + (1 - 2)\cos 60^\circ - 1\cos 90^\circ + (2 - 4)\sin 60^\circ - 2\sin 90^\circ \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} - \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} - \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$



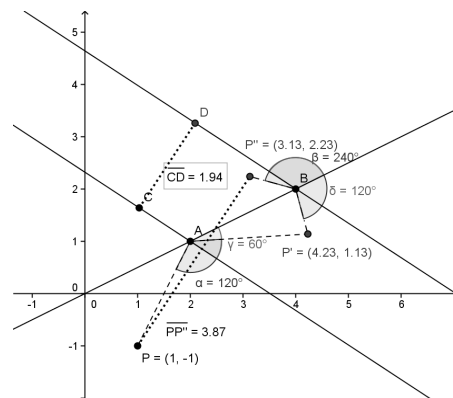
**Figura 13** – Composição de duas rotações em centros distintos

Observamos que a composta  $\Delta_{B, \beta} \circ \Delta_{A, \alpha}$  corresponde a  $\Delta_{C, \alpha+\beta}$ .



**Exemplo 7.2.** Consideremos as duas rotações do exemplo anterior, mas com a amplitude dos ângulos igual a:  $\alpha = 120^\circ$  e  $\beta = 240^\circ$  (figura 14).

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} + \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} + \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$



**Figura 14** – Composição de duas rotações em centros distintos

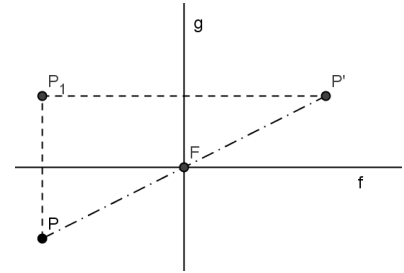
Observamos que a composta  $\Delta_{B, \beta} \circ \Delta_{A, \alpha}$  corresponde a uma translação do ponto P segundo o vector  $v = 2 \overrightarrow{CD}$ .



## CAPÍTULO 8 – MEIA-VOLTA

Consideremos o caso particular da composição entre duas reflexões em recta, quando estas são perpendiculares entre si (figura 15).

Sendo assim, o ângulo entre as rectas tem amplitude igual a  $90^\circ$ , pela proposição 7.1, a composta de duas reflexões em rectas é uma rotação de centro no ponto de intersecção das rectas e ângulo orientado de  $180^\circ$ , ou seja, uma meia-volta, e pelo facto de ser um caso particular da rotação, valem todas as propriedades vistas no capítulo 7.



**Figura 15** – Reflexão em duas rectas perpendiculares

Podemos então definir uma meia-volta por

$$\Sigma_F = \{(P, P') \in \mathcal{P}_{\mathbb{C}} \times \mathcal{P}_{\mathbb{C}} : P' \text{ é o ponto simétrico de } P \text{ em relação ao ponto } F\}.$$

Observamos que nestas condições, o ponto F é ponto médio do segmento  $[PP']$ .

A matriz de transformação homogénea associada a  $\Sigma_F = \Sigma_g \circ \Sigma_f$  é obtida através das matrizes de transformação homogénea associadas a cada uma das reflexões em recta consideradas.

Assim, sejam  $f$  e  $g$  duas rectas perpendiculares entre si que se intersectam no ponto F de coordenadas cartesianas  $(f_1, f_2)$  de coordenadas homogéneas  $[\sin \alpha : -\cos \alpha : f_2 \cos \alpha - f_1 \sin \alpha]$  e  $[\sin \beta : -\cos \beta : f_2 \cos \beta - f_1 \sin \beta]$ , respectivamente, onde  $\beta = \alpha + 90^\circ$ . As matrizes de transformação homogénea associadas a cada uma destas reflexões em recta são, respectivamente,

$$S_f = \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha & f_1(1 - \cos 2\alpha) - f_2 \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha & -f_1 \sin 2\alpha + f_2(1 + \cos 2\alpha) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$S_g = \begin{bmatrix} -\cos 2\alpha & -\sin 2\alpha & f_1(1 + \cos 2\alpha) + f_2 \sin 2\alpha \\ -\sin 2\alpha & \cos 2\alpha & +f_1 \sin 2\alpha + f_2(1 - \cos 2\alpha) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ao calcular  $S_g S_f$  obtemos

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2f_1 \\ 0 & -1 & 2f_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Se considerarmos agora as rectas  $f = [1 : 0 : -f_1]$  e  $g = [0 : 1 : -f_2]$ , perpendiculares, que se intersectam no ponto F, as respectivas matrizes de transformação homogénea associadas são:

$$S_f = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2f_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad S_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2f_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ao calcular  $S_g S_f$  obtemos também

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2f_1 \\ 0 & -1 & 2f_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

que corresponde à matriz de transformação homogénea associada a um rotação de centro no ponto de coordenadas cartesianas  $(f_1, f_2)$  e ângulo de  $180^\circ$ .

Com o que observamos, podemos enunciar a seguinte proposição:

**Proposição 8.1.** *Uma meia-volta,  $\Sigma_F$ , é a composta de duas reflexões em rectas perpendiculares,  $f$  e  $g$ , que se intersectam no ponto  $F$ .* □

**Proposição 8.2.** *A composição de duas reflexões em rectas perpendiculares é comutativa.*

**Demonstração.** Consideremos duas rectas  $f$  e  $g$ , perpendiculares entre si, que se intersectam no ponto  $F$  de coordenadas cartesianas  $(f_1, f_2)$ , definidas, respectivamente, pelas coordenadas homogéneas  $[\sin\alpha : -\cos\alpha : f_2 \cos\alpha - f_1 \sin\alpha]$  e  $[\cos\alpha : \sin\alpha : -f_2 \sin\alpha - f_1 \cos\alpha]$ . As matrizes de transformação homogénea associadas a cada uma destas reflexões em recta são, respectivamente, como já vimos anteriormente,

$$S_f = \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha & f_1(1 - \cos 2\alpha) - f_2 \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha & -f_1 \sin 2\alpha + f_2(1 + \cos 2\alpha) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$S_g = \begin{bmatrix} -\cos 2\alpha & -\sin 2\alpha & f_1(1 + \cos 2\alpha) + f_2 \sin 2\alpha \\ -\sin 2\alpha & \cos 2\alpha & +f_1 \sin 2\alpha + f_2(1 - \cos 2\alpha) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Considerando a transformação  $\Sigma_f \circ \Sigma_g$ , temos que  $S_f S_g = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2f_1 \\ 0 & -1 & 2f_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

Consideremos agora as rectas  $f = [1 : 0 : -f_1]$  e  $g = [0 : 1 : -f_2]$ , perpendiculares, que se intersectam no ponto  $F$ , as respectivas matrizes de transformação homogénea associadas são:

$$S_f = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2f_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad S_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2f_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Verificamos também que  $S_f S_g = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2f_1 \\ 0 & -1 & 2f_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

Notamos que  $S_f S_g$  corresponde à matriz obtida anteriormente pela transformação  $\Sigma_g \circ \Sigma_f$ .

Logo,  $S_f S_g = S_g S_f$ , ou seja, a composição de duas reflexões em rectas perpendiculares é comutativa. ■

**Proposição 8.3.** *Uma meia-volta é involutiva.*

**Demonstração.** Seja  $F$  um ponto de coordenadas cartesianas  $(f_1, f_2)$ , como a matriz de transformação homogénea associada

$$M_F = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2f_1 \\ 0 & -1 & 2f_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

não é a matriz identidade de ordem 3,  $\Sigma_F \neq I_d$ .

Por sua vez, como já vimos,  $M_F \cdot M_F = I_3$ .

Concluimos que a isometria  $\Sigma_F$  é involutiva. ■

**Proposição 8.4.** *A imagem de uma recta  $s$ , por  $\Sigma_F$ , é uma recta  $s'$  paralela à recta  $s$ .*

**Demonstração.** Consideremos a recta  $s$  de coordenadas homogéneas  $[a : b : c]$ . Pela meia-volta em relação ao ponto  $F$  de coordenadas cartesianas  $(f_1, f_2)$ , temos

$$[a \ b \ c] \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2f_1 \\ 0 & -1 & 2f_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [-a \ -b \ 2af_1 + 2bf_2 + c],$$

em que  $[a : b : -2af_1 - 2bf_2 - c]$  são as coordenadas homogéneas de uma recta paralela à recta  $s$ . ■

**Proposição 8.5.** *A meia-volta em relação ao ponto  $F$ , deixa invariante a recta  $f$  se, e somente se, a recta  $f$  passa por  $F$ .*

**Demonstração.** A rotação, pela proposição 7.4, deixa invariantes todas as rectas que passam pelo ponto  $F(f_1, f_2)$  se, e somente se, o ângulo de rotação for de amplitude igual a  $180^\circ$  (ou  $\pi$  rad).

Sendo a meia-volta o caso particular da rotação, fica então demonstrada a proposição. ■

**Proposição 8.6.** *O ponto médio do segmento com extremos nos pontos  $A$  e  $\Sigma_F(A)$  é o ponto  $F$ .*

**Demonstração.** Consideremos os pontos  $F$  e  $A$  de coordenadas cartesianas  $(f_1, f_2)$  e  $(a_1, a_2)$ , respectivamente. O ponto  $A' = \Sigma_F(A)$  tem por coordenadas cartesianas  $(2f_1 - a_1, 2f_2 - a_2)$ , resultante de

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2f_1 \\ 0 & -1 & 2f_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2f_1 - a_1 \\ 2f_2 - a_2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ao calcular as coordenadas cartesianas do ponto médio do segmento  $[AA']$ , obtemos as coordenadas cartesianas do ponto  $F$ . ■

**Proposição 8.7.** *A meia-volta, relativa ao ponto  $F$ , deixa invariante o ponto  $A$  se, e somente se,  $A$  for coincidente com  $F$ .*

**Demonstração.** Consideremos os pontos  $F$  e  $A$  de coordenadas cartesianas  $(f_1, f_2)$  e  $(a_1, a_2)$ , respectivamente, e seja o ponto  $A$  invariante por  $\Sigma_F$ .

Assim,

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2f_1 \\ 0 & -1 & 2f_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} 2f_1 - a_1 \\ 2f_2 - a_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Donde concluímos que  $2f_1 - a_1 = a_1$  e  $2f_2 - a_2 = a_2$ , se, e só se,  $f_1 = a_1$  e  $f_2 = a_2$ .

Logo, a meia-volta deixa invariante apenas o ponto correspondente ao seu centro. ■

**Proposição 8.8.** *A transformação inversa da composição de meias-voltas é igual à composição de meias-voltas, mas na ordem inversa dos pontos.*

**Demonstração.** Consideremos dois pontos A e B de coordenadas cartesianas  $(a_1, a_2)$  e  $(b_1, b_2)$ , respectivamente. As matrizes de transformação homogénea associadas às meias-voltas nestes pontos são, respectivamente,

$$M_A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2a_1 \\ 0 & -1 & 2a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad M_B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2b_1 \\ 0 & -1 & 2b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Observamos que

$$(M_B M_A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2b_1 - 2a_1 \\ 0 & 1 & 2b_2 - 2a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2a_1 - 2b_1 \\ 0 & 1 & 2a_2 - 2b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = M_A^{-1} M_B^{-1} = M_A M_B$$

Suponhamos, pelo princípio de indução finita sobre  $n \in \mathbb{N}$ , que este facto se verifica, através das suas matrizes de transformação homogénea associadas, para um número finito de reflexões em pontos, ou seja,

$$(M_{A_n} \cdot \dots \cdot M_{A_1})^{-1} = M_{A_1} \cdot \dots \cdot M_{A_n}.$$

Verificamos que para  $M_{A_{n+1}} \cdot \dots \cdot M_{A_1}$ , temos

$$\begin{aligned} (M_{A_{n+1}} \cdot \dots \cdot M_{A_1})^{-1} &= (M_{A_{n+1}} (M_{A_n} \cdot \dots \cdot M_{A_1}))^{-1} \\ &= (M_{A_n} \cdot \dots \cdot M_{A_1})^{-1} \cdot (M_{A_{n+1}})^{-1} \end{aligned}$$

e pela hipótese de indução segue-se que



$$\left( M_{A_{n+1}} \cdot \dots \cdot M_{A_1} \right)^{-1} = M_{A_1} \cdot \dots \cdot M_{A_{n+1}}$$

Assim,  $\left( \Sigma_{A_n} \circ \dots \circ \Sigma_{A_1} \right)^{-1} = \Sigma_{A_1} \circ \dots \circ \Sigma_{A_n}$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . ■

**Proposição 8.9.** *A composta  $\Sigma_G \circ \Sigma_F$ , de meias-voltas, em relação aos pontos  $G$  e  $F$ , é a translação de vector  $2\overrightarrow{FG}$ , isto é,  $\Sigma_G \circ \Sigma_F = \tau_{2\overrightarrow{FG}}$ .*

**Demonstração.** Consideremos dois pontos  $A$  e  $B$  de coordenadas cartesianas, respectivamente  $(a_1, a_2)$  e  $(b_1, b_2)$ . As matrizes de transformação homogénea associadas às meias-voltas com centros nestes pontos são, respectivamente,

$$M_A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2a_1 \\ 0 & -1 & 2a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad M_B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2b_1 \\ 0 & -1 & 2b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ao calcular a matriz de transformação homogénea associada a  $\Sigma_B \circ \Sigma_A$ , obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2b_1 - 2a_1 \\ 0 & 1 & 2b_2 - 2a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ que corresponde à matriz de transformação homogénea associada a uma transla-}$$

ção de vector  $(2b_1 - 2a_1, 2b_2 - 2a_2)$ , isto é,  $2\overrightarrow{AB}$ . ■

Considerando a proposição anterior e o facto demonstrado na proposição 6.6, podemos enunciar o que se segue

**Proposição 8.10.** *A composta de um número par de meias-voltas é uma translação.* □

**Proposição 8.11.** *Toda a translação pode ser representada, de infinitas maneiras, como a composta de duas meias-voltas, desde que o vector de translação seja o dobro do vector definido pelos pontos relativos às meias-voltas.*

**Demonstração.** Sem perda de generalidade, consideremos o vector  $\mathbf{v} = (2v_1, 2v_2)$ , um ponto  $A(a_1, a_2)$  qualquer, e um ponto  $B$  com as seguintes coordenadas cartesianas  $(a_1 + v_1, a_2 + v_2)$ .

Assim, o vector  $\overrightarrow{AB}$  tem como coordenadas cartesianas  $(v_1, v_2)$ , ou seja, corresponde a metade do vector  $\mathbf{v}$ .

Encontremos a imagem de um ponto qualquer  $P(p_1, p_2)$ , pela composta das meias-voltas,  $\Sigma_B \circ \Sigma_A$ . Assim,

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2(a_1 + v_1) \\ 0 & -1 & 2(a_2 + v_2) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2a_1 \\ 0 & -1 & 2a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 + 2v_1 \\ p_2 + 2v_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Obtemos o ponto de coordenadas cartesianas  $(p_1 + 2v_1, p_2 + 2v_2)$ , que corresponde a imagem pela translação do ponto  $P$  segundo o vector  $\mathbf{v}$ .

Assim, como os pontos foram arbitrários, apenas satisfazendo a condição de formarem um vector correspondente a metade do vector considerado, a proposição fica demonstrada. ■

**Proposição 8.12.** *Se o ponto  $Q$  é o ponto médio do segmento com extremos nos pontos  $P$  e  $R$ , então  $\Sigma_Q \circ \Sigma_P = \tau_{\overline{PR}} = \Sigma_R \circ \Sigma_Q$ .*

**Demonstração.** Sem perda de generalidade, consideremos o vector  $\mathbf{v} = (2v_1, 2v_2)$ , um ponto  $P (p_1, p_2)$  qualquer e um ponto  $R$  com as seguintes coordenadas cartesianas  $(p_1 + 2v_1, p_2 + 2v_2)$ . O ponto médio,  $Q$ , do segmento  $[PR]$  tem por coordenadas cartesianas  $(p_1 + v_1, p_2 + v_2)$ , resultante de  $\frac{P + R}{2}$ .

Verificamos que a matriz de transformação homogénea associada à isometria  $\Sigma_Q \circ \Sigma_P$  é definida por

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2(p_1 + v_1) \\ 0 & -1 & 2(p_2 + v_2) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2p_1 \\ 0 & -1 & 2p_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2v_1 \\ 0 & 1 & 2v_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

e a matriz de transformação homogénea associada à isometria  $\Sigma_R \circ \Sigma_Q$  é definida por

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2(p_1 + 2v_1) \\ 0 & -1 & 2(p_2 + 2v_2) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2(p_1 + v_1) \\ 0 & -1 & 2(p_2 + v_2) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2v_1 \\ 0 & 1 & 2v_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ou seja, a matriz de transformação homogénea associada à translação de vector  $\overrightarrow{PR}$ .

■

**Proposição 8.13.** *A composta de três meias-voltas é uma meia-volta.*

**Demonstração.** Consideremos três pontos quaisquer  $A$ ,  $B$  e  $C$ , de respectivas coordenadas cartesianas  $(a_1, a_2)$ ,  $(b_1, b_2)$  e  $(c_1, c_2)$ . As matrizes de transformação homogénea associadas às meias-voltas com centros nestes pontos são, respectivamente,

$$M_A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2a_1 \\ 0 & -1 & 2a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2b_1 \\ 0 & -1 & 2b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } M_C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2c_1 \\ 0 & -1 & 2c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ao calcular o produto destas matrizes, obtemos a matriz

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2(a_1 - b_1 + c_1) \\ 0 & -1 & 2(a_2 - b_2 + c_2) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

associada a uma meia-volta, que tem por centro, o ponto de coordenadas cartesianas

$$(a_1 - b_1 + c_1, a_2 - b_2 + c_2).$$

■

Podemos induzir o resultado anterior enunciando a seguinte proposição:

**Proposição 8.14.** *A composta de um número ímpar de meias-voltas é uma meia-volta.*

□

**Proposição 8.15.** *Se os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  não são colineares, então  $\Sigma_A \circ \Sigma_B \circ \Sigma_C = \Sigma_D$ , onde  $[ABCD]$  é um paralelogramo.*

**Demonstração.** Consideremos o ponto  $D$  com coordenadas cartesianas  $(d_1, d_2)$ . Segue-se da proposição 8.13, que o ponto  $D$  tem por coordenadas cartesianas  $(a_1 - b_1 + c_1, a_2 - b_2 + c_2)$ . Logo,

$$d_1 = a_1 - b_1 + c_1 \quad \text{e} \quad d_2 = a_2 - b_2 + c_2.$$

Assim,  $d_1 - c_1 = a_1 - b_1$  e  $d_2 - c_2 = a_2 - b_2$ , e se fizermos  $(a_1 - b_1, a_2 - b_2) = \overrightarrow{BA}$  e  $(d_1 - c_1, d_2 - c_2) = \overrightarrow{CD}$ , concluímos que  $[ABCD]$  é um paralelogramo.

■

Os resultados das proposições 8.13 e 8.15 podem ser formalmente enunciados como:

**Lei do Paralelogramo 8.16.**  $\Sigma_{F1} \circ \Sigma_{F2} \circ \Sigma_{F3} \circ \Sigma_{F4} = I_d$  se, e somente se, os pontos  $F_1, F_2, F_3$  e  $F_4$  (nesta ordem) forma um paralelogramo. □

Como consequência, temos as duas proposições que se seguem:

**Proposição 8.17.** Dados quaisquer três pontos, dos pontos  $A, B, C$  e  $D$ , não necessariamente distintos, então o quarto ponto é unicamente determinado pela equação  $\tau_{2BA} = \Sigma_D \circ \Sigma_C$ . □

**Proposição 8.18.** Numa composição de três meias-voltas, a ordem dos pontos pode ser trocada pela ordem inversa dos mesmos, isto é,  $\Sigma_P \circ \Sigma_Q \circ \Sigma_R = \Sigma_R \circ \Sigma_Q \circ \Sigma_P$ . □

Considerando o resultado anterior e a proposição 8.14 temos que:

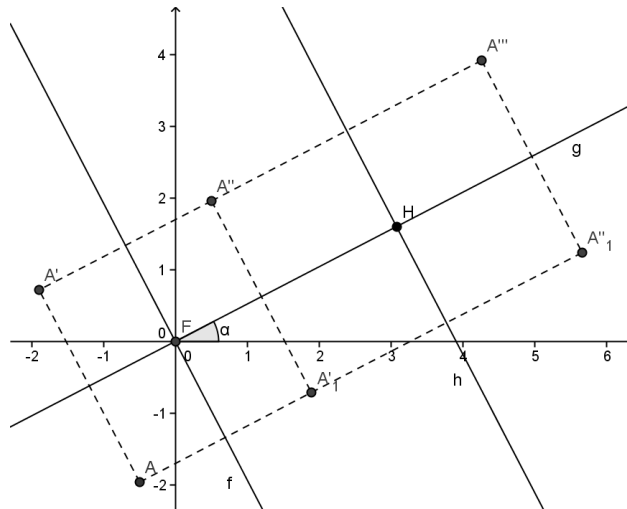
**Proposição 8.19.** Numa composição de um número ímpar de reflexões em pontos, a ordem dos pontos pode ser trocada pela ordem inversa. □

## CAPÍTULO 9 – REFLEXÃO DESLIZANTE

Passemos agora à isometria composta por três reflexões em recta, considerando primeiramente o seguinte caso particular: sejam  $f, g$  e  $h$  três rectas, tais que  $f \perp g$ ,  $h \perp g$  e  $f \neq h$  e sejam  $\{F\} = f \cap g$  e  $\{H\} = h \cap g$ . Consideremos a isometria  $\Omega = \Sigma_h \circ \Sigma_g \circ \Sigma_f$ .

Para facilitar os cálculos, e sem perda da generalidade, consideraremos as rectas  $f$  e  $g$  perpendiculares entre si e passando pela origem do referencial e  $h$  a recta paralela a  $f$ , conseqüentemente perpendicular a  $g$ , passando pelo ponto  $H$  de coordenadas cartesianas  $(x_0, y_0)$ , onde  $x_0 = \rho \cos \alpha$  e  $y_0 = \rho \sin \alpha$  (vide figura 16) Assim, o vector  $\mathbf{v}$  da reflexão deslizante tem por coordenadas cartesianas  $(2\rho \cos \alpha, 2\rho \sin \alpha)$ .

As coordenadas homogêneas das rectas  $f, g$  e  $h$  são  $[\cos \alpha : \sin \alpha : 0]$ ,  $[\sin \alpha : -\cos \alpha : 0]$  e  $[\cos \alpha : \sin \alpha : -\rho]$ , respectivamente.



**Figura 16** – Reflexão deslizante

As matrizes de transformação homogénea associadas a estas reflexões em rectas são

$$S_f = \begin{bmatrix} -\cos 2\alpha & -\sin 2\alpha & 0 \\ -\sin 2\alpha & \cos 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, S_g = \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha & 0 \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$S_h = \begin{bmatrix} -\cos 2\alpha & -\sin 2\alpha & 2\rho \cos \alpha \\ -\sin 2\alpha & \cos 2\alpha & 2\rho \sin \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Em virtude da perpendicularidade entre  $f$  e  $g$  e entre  $h$  e  $g$ , são equivalentes as seguintes representações da isometria dada, verificadas através das respectivas matrizes de transformação homogénea associadas.

Consideremos a matriz  $D = S_h S_g S_f$ ,

$$D = \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha & 2\rho \cos \alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha & 2\rho \sin \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Seja  $S_g S_f = M_O$ ,

$$M_O = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ao fazer  $S_h M_O$ , ou seja,

$$\begin{bmatrix} -\cos 2\alpha & -\sin 2\alpha & 2\rho \cos \alpha \\ -\sin 2\alpha & \cos 2\alpha & 2\rho \sin \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

obtemos

$$\begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha & 2\rho \cos \alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha & 2\rho \sin \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ou seja, a matriz D.

Consideremos agora  $S_h S_g = M_H$ ,

$$M_H = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2\rho \cos \alpha \\ 0 & -1 & 2\rho \sin \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

temos que  $M_H S_f = D$ .

Do facto de  $f \perp g$  e  $h \perp g$ , e pela proposição 8.3, ainda podemos considerar

$$D = S_h S_f S_g \quad \text{ou} \quad D = S_g S_h S_f.$$

Assim, pela proposição 6.1, se  $S_h S_f = T_{2FH}$ ,

$$T_{2FH} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2\rho \cos \alpha \\ 0 & 1 & 2\rho \sin \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Obtemos D através de

$$T_{2FH} S_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2\rho \cos \alpha \\ 0 & 1 & 2\rho \sin \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha & 0 \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



ou de

$$S_g \ T_{\overline{2FH}} = \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha & 0 \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2\rho \cos \alpha \\ 0 & 1 & 2\rho \sin \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Notamos que obtemos sempre a mesma isometria, isto é, a reflexão deslizante.

São imediatas as seguintes proposições:

**Proposição 9.1.** *O vector da reflexão deslizante é paralelo ao seu eixo.*

□

**Proposição 9.2.** *A composição de uma reflexão em recta com uma translação, cujo vector tem a mesma direcção que a recta, é comutativa.*

□

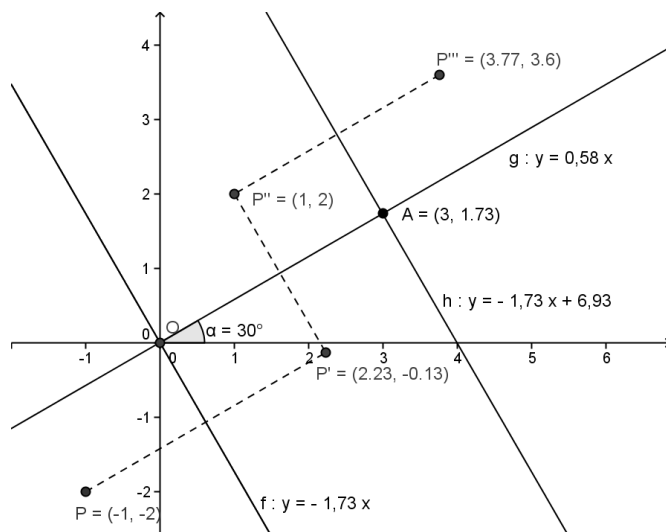
É evidente que o vector  $\mathbf{v}$  e o eixo  $g$  são determinados biunivocamente pela reflexão deslizante, isto é, se  $\delta_{(\mathbf{v},g)} = \delta_{(\mathbf{w},k)}$ , então  $\mathbf{v} = \mathbf{w}$  e  $g = k$ .

Para perceber melhor esta isometria, observemos o exemplo que se segue.

**Exemplo 9.1.** Consideremos as rectas  $f$  e  $g$  passando na origem, formando respectivamente os ângulos de  $120^\circ$  e  $30^\circ$ , e a recta  $h$  passando pelo ponto  $A$  de coordenadas  $(3, \sqrt{3})$ , cujas equações são,

respectivamente,  $y + \sqrt{3}x = 0$ ,  $y - \frac{\sqrt{3}}{3}x = 0$  e  $x + \frac{\sqrt{3}}{3}y - 4 = 0$  (figura 17). Encontremos a imagem do ponto P de coordenadas  $(-1, -2)$  pela reflexão deslizante  $\delta_{(v,r)} = \Sigma_h \circ \Sigma_g \circ \Sigma_f$ .

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 6 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 2\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{2} - \sqrt{3} \\ 1 + \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$



**Figura 17** – Reflexão deslizante

O ponto de coordenadas cartesianas  $\left(\frac{11}{2} - \sqrt{3}, 1 + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$  é a imagem do ponto P pela reflexão deslizante.



**Proposição 9.3.** *Uma translação que deixa invariante a recta  $g$  comuta com uma reflexão deslizante de eixo  $g$ .*

**Demonstração.** Consideremos uma translação de vector  $\mathbf{w}$  que deixa invariante a recta  $g$ . Pela proposição 6.6, o vector desta translação tem a mesma direcção que a recta. Pela proposição 9.1, o

vector da reflexão deslizante  $\mathbf{v}$  é paralelo ao seu eixo  $g$ . Daí concluímos que os vectores  $\mathbf{w}$  e  $\mathbf{v}$  são paralelos. Pelas proposições 7.1 e 9.2, segue-se que

$$\tau_{\mathbf{w}} \circ \delta_{(\mathbf{v},g)} = \tau_{\mathbf{w}} \circ \tau_{\mathbf{v}} \circ \Sigma_g = \tau_{\mathbf{v}} \circ \tau_{\mathbf{w}} \circ \Sigma_g = \tau_{\mathbf{v}} \circ \Sigma_g \circ \tau_{\mathbf{w}} = \delta_{(\mathbf{v},g)} \circ \tau_{\mathbf{w}}$$

que demonstra a proposição. ■

**Proposição 9.4.** *A reflexão numa recta pode ser considerada como um caso particular de uma reflexão deslizante de vector nulo.*

**Demonstração.** É imediato que se considerarmos o vector nulo como vector da reflexão deslizante, temos

$$\delta_{(\mathbf{0},g)} = \tau_{\mathbf{0}} \circ \Sigma_g = I_d \circ \Sigma_g = \Sigma_g.$$
■

**Proposição 9.5.** *A reflexão deslizante  $\delta_{(\mathbf{v},g)}$  não tem pontos invariantes se  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ .*

**Demonstração.** Tendo a reflexão deslizante o vector diferente do vector nulo, a translação que a compõe também possui vector não nulo e tendo em conta a proposição 6.4, verificamos que não há pontos invariantes. Assim, a reflexão deslizante não possui pontos invariantes. ■

**Proposição 9.6.** *O ponto médio do segmento cujos extremos são um ponto qualquer do plano e a sua respectiva imagem pela reflexão deslizante, pertence ao eixo da reflexão deslizante.*

**Demonstração.** Sem perda da generalidade, consideraremos o eixo  $g$  da reflexão deslizante  $\delta_{(\mathbf{v},g)}$  passando pela origem do referencial e o vector  $\mathbf{v}$  na mesma direcção da recta  $g$ . Nestas condições,  $\mathbf{v}$  tem por coordenadas cartesianas  $(\rho \cos \alpha, \rho \sin \alpha)$  e a recta  $g$  tem por coordenadas homogéneas  $[\sin \alpha : -\cos \alpha : 0]$ .

Seja P um ponto qualquer do plano euclidiano de coordenadas cartesianas  $(p_1, p_2)$ .

A matriz de transformação homogénea associada a esta isometria é

$$\begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha & \rho \cos \alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha & \rho \sin \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

As coordenadas cartesianas de P', imagem do ponto P pela isometria  $\delta_{(v,g)}$ , são

$$(\rho \cos \alpha + p_1 \cos 2\alpha + p_2 \sin 2\alpha, \rho \sin \alpha - p_2 \cos 2\alpha + p_1 \sin 2\alpha).$$

Ao calcular as coordenadas cartesianas  $(n_1, n_2)$  do ponto N, ponto médio do segmento [PP'] temos,

$$n_1 = \frac{1}{2} \rho \cos \alpha + p_1 \cos^2 \alpha + p_2 \cos \alpha \sin \alpha$$

$$n_2 = \frac{1}{2} \rho \sin \alpha + p_2 \sin^2 \alpha + p_1 \cos \alpha \sin \alpha$$

onde verificamos que N pertence ao eixo g, pois

$$[\sin \alpha \quad -\cos \alpha \quad 0] \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \rho \cos \alpha + p_1 \cos^2 \alpha + p_2 \cos \alpha \sin \alpha \\ \frac{1}{2} \rho \sin \alpha + p_2 \sin^2 \alpha + p_1 \cos \alpha \sin \alpha \\ 1 \end{bmatrix} = 0. \quad \blacksquare$$

**Proposição 9.7.** *O quadrado de uma reflexão deslizante é uma translação distinta da identidade.*

**Demonstração.** Consideremos, sem perda de generalidade, a reflexão deslizante  $\delta_{(\mathbf{v},g)}$ , com o eixo  $g$  passando pela origem do referencial e vector  $\mathbf{v} = (\rho \cos \alpha, \rho \sin \alpha)$ , e a sua respectiva matriz de transformação homogénea associada

$$D_{(\mathbf{v},g)} = \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha & \rho \cos \alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha & \rho \sin \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ao calcular  $D^2$ , obtemos a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2\rho \cos \alpha \\ 0 & 1 & 2\rho \sin \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

que está associada a uma translação de vector, em coordenadas cartesianas,  $(2\rho \cos \alpha, 2\rho \sin \alpha)$  e que corresponde ao dobro do vector da reflexão deslizante considerada. ■

**Proposição 9.8.** *Uma reflexão deslizante deixa invariante exactamente uma recta, que é o seu eixo.*

**Demonstração.** Tendo a reflexão deslizante o vector diferente do vector nulo e na direcção do seu eixo, segue-se, pela proposição 6.5, que esta isometria deixa invariante o seu eixo. ■

## CAPÍTULO 10 – TEOREMAS GERAIS E CONCLUSÕES

**Teorema da Redução no Feixe 10.1.** *Se três rectas  $f$ ,  $g$  e  $h$  pertencem a um feixe de rectas  $\mathcal{F}$ , a composta das três reflexões em recta,  $\Sigma_f \circ \Sigma_g \circ \Sigma_h$ , é igual a uma reflexão numa recta do feixe, isto é, existe uma recta  $m \in \mathcal{F}$ , tal que,  $\Sigma_f \circ \Sigma_g \circ \Sigma_h = \Sigma_m$ .*

**Demonstração.** Consideremos, primeiramente, um feixe de rectas paralelas. Sejam as rectas  $f$ ,  $g$  e  $h$  pertencentes a este feixe, então terão como coordenadas homogéneas:

$$f = [a : b : c], g = [a : b : d] \text{ e } h = [a : b : e], \text{ com } c, d, e \in \mathfrak{R}, \text{ distintos entre si.}$$

A cada reflexão numa destas rectas, associamos a respectiva matriz de transformação homogénea,

$$S_f = \begin{bmatrix} \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} & \frac{-2ab}{a^2 + b^2} & \frac{-2ac}{a^2 + b^2} \\ \frac{-2ab}{a^2 + b^2} & \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} & \frac{-2bc}{a^2 + b^2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad S_g = \begin{bmatrix} \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} & \frac{-2ab}{a^2 + b^2} & \frac{-2ad}{a^2 + b^2} \\ \frac{-2ab}{a^2 + b^2} & \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} & \frac{-2bd}{a^2 + b^2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$S_h = \begin{bmatrix} \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} & \frac{-2ab}{a^2 + b^2} & \frac{-2ae}{a^2 + b^2} \\ \frac{-2ab}{a^2 + b^2} & \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} & \frac{-2be}{a^2 + b^2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ao calcular o produto  $S_f S_g S_h$ , obtemos a matriz

$$\begin{bmatrix} \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} & \frac{-2ab}{a^2 + b^2} & \frac{-2a(c - d + e)}{a^2 + b^2} \\ \frac{-2ab}{a^2 + b^2} & \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} & \frac{-2b(c - d + e)}{a^2 + b^2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

associada à reflexão na recta cujas coordenadas homogéneas são  $[a : b : c - d + e]$ , e consequentemente pertence ao mesmo feixe de rectas paralelas. (i)

Consideremos agora um feixe de rectas concorrentes num dado ponto. Sem perda de generalidade, consideremos o ponto como sendo a origem do referencial. As rectas  $f$ ,  $g$  e  $h$  pertencentes a este feixe tem por coordenadas homogéneas:

$f = [\sin \alpha : -\cos \alpha : 0]$ ,  $g = [\sin \beta : -\cos \beta : 0]$  e  $h = [\sin \gamma : -\cos \gamma : 0]$ , com os ângulos  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  diferentes entre si.

A cada reflexão numa destas rectas, associamos a respectiva matriz de transformação homogénea,

$$S_f = \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha & 0 \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, S_g = \begin{bmatrix} \cos 2\beta & \sin 2\beta & 0 \\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } S_h = \begin{bmatrix} \cos 2\gamma & \sin 2\gamma & 0 \\ \sin 2\gamma & -\cos 2\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ao calcular o produto  $S_f S_g S_h$ , obtemos a matriz

$$\begin{bmatrix} \cos 2(\alpha + \beta + \gamma) & \sin 2(\alpha + \beta + \gamma) & 0 \\ \sin 2(\alpha + \beta + \gamma) & -\cos 2(\alpha + \beta + \gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

associada à reflexão na recta cujas coordenadas homogéneas são  $[\sin(\alpha+\beta+\gamma) : -\cos(\alpha+\beta+\gamma) : 0]$  e, consequentemente, pertence ao mesmo feixe de rectas concorrentes na origem do referencial, o ponto O de coordenadas cartesianas (0,0). (ii)

Pelos dois resultados, (i) e (ii), fica demonstrado o teorema. ■

Consideremos agora três rectas quaisquer, não pertencentes ao mesmo feixe. Sem perda de generalidade, sejam  $f$ ,  $g$  e  $h$  três rectas, tais que a recta  $f$  coincidente com o eixo Ox, a recta  $g$  passando pela origem do referencial e formando um ângulo  $\alpha$  com o eixo Ox, um ponto desta recta, G, de coordenadas cartesianas  $(\rho \cos \alpha, \rho \sin \alpha)$  e uma recta  $h$  passando pelo ponto G e formando um ângulo  $\beta$  com o eixo Ox. Seja também  $\Omega = \Sigma_h \circ \Sigma_g \circ \Sigma_f$ .

Nestas condições as coordenadas homogéneas das rectas são, respectivamente,  $[0 : -1 : 0]$ ,  $[\sin \alpha : -\cos \alpha : 0]$  e  $[\sin \beta : -\cos \beta : \rho \sin(\alpha-\beta)]$ . Se considerarmos o ponto  $\{F\} = f \cap h$ , este tem por coordenadas cartesianas,  $\left( \frac{-\sin(\alpha-\beta)}{\sin \beta}, 0 \right)$ .

As respectivas matrizes de transformação homogénea associadas às reflexões em recta  $\Sigma_f$ ,  $\Sigma_g$  e  $\Sigma_h$  são,

$$S_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, S_g = \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha & 0 \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$S_h = \begin{bmatrix} \cos 2\beta & \sin 2\beta & -2\rho \sin \alpha \sin(\alpha-\beta) \\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta & 2\rho \cos \alpha \sin(\alpha-\beta) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Ao calcular a matriz de transformação homogénea associada a  $\Omega$  temos

$$S_f \ S_g \ S_h = \begin{bmatrix} \cos 2(\alpha - \beta) & -\sin 2(\alpha - \beta) & -2 \rho \sin \alpha \sin(\alpha - \beta) \\ -\sin 2(\alpha - \beta) & -\cos 2(\alpha - \beta) & 2 \rho \cos \alpha \sin(\alpha - \beta) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Verifiquemos que esta matriz de transformação homogénea está associada a uma reflexão deslizante.

Dada a isometria  $\Sigma_h \circ \Sigma_g \circ \Sigma_f$ , consideremos uma recta  $r$ , perpendicular à recta  $f$  e pertencente ao feixe de rectas pelo ponto  $G$ . Nestas condições, a recta  $r$  tem por equação  $x = \rho \cos \alpha$ .

Como a recta  $r$  pertencem ao feixe pelo ponto  $G$  no qual passam também as rectas  $h$  e  $g$ , então, pelo Teorema da Redução no Feixe 10.1,  $\Sigma_h \circ \Sigma_g \circ \Sigma_r = \Sigma_s$ .

Encontremos a matriz de transformação homogénea associada à reflexão na recta  $s$ . Para tal consideremos a matriz de transformação homogénea associada a  $\Sigma_r$ ,

$$S_r = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \rho \cos \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

então

$$S_s = \begin{bmatrix} -\cos 2(\alpha - \beta) & \sin 2(\alpha - \beta) & \rho (\cos \alpha + \cos(3\alpha - 2\beta)) \\ \sin 2(\alpha - \beta) & \cos 2(\alpha - \beta) & \rho (\sin \alpha - \sin(3\alpha - 2\beta)) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Por sua vez, temos

$$\begin{aligned}
\Omega &= \Sigma_h \circ \Sigma_g \circ \Sigma_f \\
&= \Sigma_h \circ \Sigma_g \circ I_d \circ \Sigma_f \\
&= \Sigma_h \circ \Sigma_g \circ (\Sigma_r \circ \Sigma_r) \circ \Sigma_f \\
&= (\Sigma_h \circ \Sigma_g \circ \Sigma_r) \circ \Sigma_r \circ \Sigma_f \\
&= \Sigma_s \circ \Sigma_r \circ \Sigma_f
\end{aligned}$$

em que a recta  $r$  é perpendicular à recta  $f$  e à recta  $s$ , pertence ao feixe das rectas  $h$ ,  $g$  e  $r$ .

Agora, consideremos uma recta  $t$ , perpendicular à recta  $s$  e pertencente ao feixe das rectas que contém as rectas  $r$  e  $f$ .

Primeiramente, encontremos o ponto  $\{R\} = f \cap r$ , o ponto  $R$  tem por coordenadas cartesianas  $(\rho \cos \alpha, 0)$  e a recta  $s$  tem por coordenadas homogéneas  $[\cos(\alpha - \beta) : -\sin(\alpha - \beta) : -\rho \cos(2\alpha - \beta)]$ .

Assim, a recta  $t$  tem por coordenadas homogéneas

$$[\sin(\alpha - \beta) : \cos(\alpha - \beta) : -\rho \cos \alpha \sin(\alpha - \beta)].$$

Como a recta  $t$  pertence ao feixe de rectas concorrentes no ponto  $R$ , pelo qual passam também as rectas  $f$  e  $r$ , então, pelo Teorema da Redução no Feixe 10.1,  $\Sigma_t \circ \Sigma_r \circ \Sigma_f = \Sigma_w$ .

Encontremos a matriz de transformação homogénea associada à reflexão na recta  $w$ . Para tal consideremos a matriz de transformação homogénea associada a  $\Sigma_t$ ,

$$S_t = \begin{bmatrix} \cos 2(\beta - \alpha) & \sin 2(\beta - \alpha) & \rho (\cos \alpha - \cos \alpha \cos(2(\beta - \alpha))) \\ \sin 2(\beta - \alpha) & -\cos 2(\beta - \alpha) & \rho \cos \alpha \sin(2(\beta - \alpha)) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

então

$$S_w = \begin{bmatrix} -\cos 2(\alpha - \beta) & \sin 2(\alpha - \beta) & 2 \rho \cos \alpha \cos^2(\alpha - \beta) \\ \sin 2(\alpha - \beta) & \cos 2(-\alpha + \beta) & \rho \cos \alpha \sin(2(-\alpha + \beta)) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Por sua vez, temos

$$\begin{aligned} \Omega &= \Sigma_s \circ \Sigma_r \circ \Sigma_f \\ &= \Sigma_s \circ I_d \circ \Sigma_r \circ \Sigma_f \\ &= \Sigma_s \circ (\Sigma_t \circ \Sigma_t) \circ \Sigma_r \circ \Sigma_f \\ &= \Sigma_s \circ \Sigma_t \circ (\Sigma_t \circ \Sigma_r \circ \Sigma_f) \\ &= \Sigma_s \circ \Sigma_t \circ \Sigma_w \end{aligned}$$

em que a recta  $t$  é perpendicular à recta  $s$  e à recta  $w$  pertence ao feixe das rectas  $t$ ,  $r$  e  $f$ .

Agora estamos com a composição de três rectas nas condições iniciais apresentadas no capítulo 9 e resultando a mesma isometria, ou seja, uma reflexão deslizante de eixo  $t$  e de vector correspondendo ao dobro do vector entre as rectas paralelas,  $w$  e  $s$ .

Assim, a matriz de transformação homogénea associada à  $\Omega = \delta_{(v,t)}$  é o produto

$$S_s \ S_t \ S_w = \begin{bmatrix} \cos 2(\alpha - \beta) & -\sin 2(\alpha - \beta) & -2 \rho \sin \alpha \sin(\alpha - \beta) \\ -\sin 2(\alpha - \beta) & -\cos 2(\alpha - \beta) & 2 \rho \cos \alpha \sin(\alpha - \beta) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

evidentemente, o mesmo obtido pelo produto  $S_f \ S_g \ S_h$ .

Para calcularmos o vector  $v$ , primeiramente encontremos as coordenadas homogéneas do ponto  $\{T\} = s \cap t$ , através das respectivas coordenadas homogéneas das rectas  $s$  e  $t$ , em que

$$s = [\cos(\alpha - \beta) : -\sin(\alpha - \beta) : -\rho \cos(2\alpha - \beta)] \text{ e } t = [\sin(\alpha - \beta) : \cos(\alpha - \beta) : -\rho \cos \alpha \sin(\alpha - \beta)].$$

Assim,

$$t_1 = \begin{vmatrix} -\sin(\alpha - \beta) & -\rho \cos(2\alpha - \beta) \\ \cos(\alpha - \beta) & -\rho \cos \alpha \sin(\alpha - \beta) \end{vmatrix}, \quad t_2 = \begin{vmatrix} -\rho \cos(2\alpha - \beta) & \cos(\alpha - \beta) \\ -\rho \cos \alpha \sin(\alpha - \beta) & \sin(\alpha - \beta) \end{vmatrix} \text{ e}$$

$$t_3 = \begin{vmatrix} \cos(\alpha - \beta) & -\sin(\alpha - \beta) \\ \sin(\alpha - \beta) & \cos(\alpha - \beta) \end{vmatrix}.$$

$$\text{Daí, } T = \left( \rho \cos \alpha - \frac{1}{2} \rho \sin \alpha \sin(2(\alpha - \beta)) : \rho \sin \alpha \sin^2(\alpha - \beta) : 1 \right)$$

$$\text{Assim, } v = 2\overrightarrow{RT} = (-\rho \sin \alpha \sin(2(\alpha - \beta)), 2\rho \sin \alpha \sin^2(\alpha - \beta)).$$

Considerando os resultados anteriormente obtidos, podemos enunciar a seguinte proposição:

**Proposição 10.2.** *A composta de três reflexões em recta é uma reflexão deslizante de vector não nulo, se e somente se, as rectas não pertencem ao mesmo feixe.* □

**Teorema da Redução Geral.10.3.** *Todo a composta de quatro reflexões em rectas é igual à composta de duas reflexões em rectas, isto é,  $\Omega = \Sigma_f \circ \Sigma_g \circ \Sigma_h \circ \Sigma_m$ , e então existem duas rectas  $a$  e  $b$ , tais que  $\Omega = \Sigma_a \circ \Sigma_b$ .*

**Demonstração.** Consideremos as rectas  $f, g, h$  e  $m$  de equações

$$f : -\operatorname{sen}\alpha x + \cos\alpha y + (f_1 \operatorname{sen}\alpha - f_2 \cos\alpha) = 0$$

$$g : -\operatorname{sen}\beta x + \cos\beta y + (g_1 \operatorname{sen}\beta - g_2 \cos\beta) = 0$$

$$h : -\operatorname{sen}\gamma x + \cos\gamma y + (h_1 \operatorname{sen}\gamma - h_2 \cos\gamma) = 0$$

$$m : -\operatorname{sen}\delta x + \cos\delta y + (m_1 \operatorname{sen}\delta - m_2 \cos\delta) = 0$$

e as respectivas matrizes de transformação homogénea associadas

$$S_f = \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \operatorname{sen} 2\alpha & f_1(1 - \cos 2\alpha) - f_2 \operatorname{sen} 2\alpha \\ \operatorname{sen} 2\alpha & -\cos 2\alpha & -f_1 \operatorname{sen} 2\alpha + f_2(1 + \cos 2\alpha) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$S_g = \begin{bmatrix} \cos 2\beta & \operatorname{sen} 2\beta & g_1(1 - \cos 2\beta) - g_2 \operatorname{sen} 2\beta \\ \operatorname{sen} 2\beta & -\cos 2\beta & -g_1 \operatorname{sen} 2\beta + g_2(1 + \cos 2\beta) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$S_h = \begin{bmatrix} \cos 2\gamma & \operatorname{sen} 2\gamma & h_1(1 - \cos 2\gamma) - h_2 \operatorname{sen} 2\gamma \\ \operatorname{sen} 2\gamma & -\cos 2\gamma & -h_1 \operatorname{sen} 2\gamma + h_2(1 + \cos 2\gamma) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$S_m = \begin{bmatrix} \cos 2\delta & \operatorname{sen} 2\delta & m_1(1 - \cos 2\delta) - m_2 \operatorname{sen} 2\delta \\ \operatorname{sen} 2\delta & -\cos 2\delta & -m_1 \operatorname{sen} 2\delta + m_2(1 + \cos 2\delta) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ao calcular o produto  $S_f S_g S_h S_m$ , que corresponde à matriz de transformação homogénea associada à isometria  $\Omega$ , obtemos

$$\begin{bmatrix} \cos 2(\alpha - \beta + \gamma - \delta) & -\sin 2(\alpha - \beta + \gamma - \delta) & j \\ \sin 2(\alpha - \beta + \gamma - \delta) & \cos 2(\alpha - \beta + \gamma - \delta) & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

com  $j = f_1 + (g_1 - f_1)\cos 2\alpha + (h_1 - g_1)\cos 2(\alpha - \beta) + (m_1 - h_1)\cos 2(\alpha - \beta + \gamma) - m_1 \cos 2(\alpha - \beta + \gamma - \delta) +$

$+ (g_2 - f_2)\sin 2\alpha + (g_2 - h_2)\sin 2(\alpha - \beta) + (m_2 - h_2)\sin 2(\alpha - \beta + \gamma) - m_2 \sin 2(\alpha - \beta + \gamma - \delta)$

e  $k = f_2 + (g_2 - f_2)\cos 2\alpha + (h_2 - g_2)\cos 2(\alpha - \beta) + (m_2 - h_2)\cos 2(\alpha - \beta + \gamma) - m_2 \cos 2(\alpha - \beta + \gamma - \delta) +$

$+ (g_1 - f_1)\sin 2\alpha + (g_1 - h_1)\sin 2(\alpha - \beta) + (m_1 - h_1)\sin 2(\alpha - \beta + \gamma) - m_1 \sin 2(\alpha - \beta + \gamma - \delta).$

Verificamos que esta matriz de transformação homogénea está associada a uma translação se  $\alpha - \beta + \gamma - \delta = 0^\circ$ , ou esta associada a uma rotação se  $\alpha - \beta + \gamma - \delta \neq 0^\circ$ .

Quer seja uma translação, quer seja uma rotação, pelas proposições 6.2 e 7.2, estas podem ser representadas pela composta de duas reflexões em rectas, o que demonstra o pretendido. ■

Como consequência dos teoremas anteriores, podemos enunciar a seguinte proposição

**Proposição 10.4.**

(a) *Todo a composta de um número par de reflexões em rectas é igual a uma composta de duas reflexões em rectas.*

(b) *Todo a composta de um número ímpar de reflexões em rectas é igual a uma composta de três reflexões em rectas.* □

Muitas mais proposições podem ser apresentadas, pois é um caminho muito interessante de ser desvendado. Deixamos aqui o desafio para quem o quiser seguir, deixando o plano e indo à exploração do espaço.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] Iezzi, G., Dolce, O., *Geometria Analítica*, Editora Moderna SP, 1972.
- [2] Medeiros, L.A., Andrade, N.G., Wanderley, A.M., *Álgebra Vetorial e Geometria*, Editora Campus, RJ, 1981.
- [3] Ledergerber-Ruoff, E. B., *Isometrias e Ornamentos no Plano Euclidiano*, Atual Editora, Editora da Universidade de São Paulo, 1982.
- [4] Martin, G.E., *Transformation Geometry*, Springer-Verlag, 1982.
- [5] Agudo, F.R. Dias, *Introdução à Álgebra Linear e Geometria Analítica*, Livraria Escolar Editora, Lisboa, 1992.
- [6] Giraldes, E., Fernandes, V.H. e Smith, M.P., *Curso de Álgebra Linear e Geometria Analítica*, MacGraw-Hill, 1995.
- [7] Oliveira, A. J. F., *Transformações Geométricas*, Universidade Aberta, Lisboa, 1997.
- [8] Veloso, E., *Geometria: Temas actuais*, Instituto de Inovação Educacional, Lisboa, 1998.
- [9] Araújo, V.A., *Curso de Geometria*, Gradiva, Lisboa, 1998.





## LISTA DE SÍMBOLOS



$\sim$	relação de equivalência	$R_{F,\alpha}$	matriz de transformação homogénea associada à rotação de ângulo com amplitude igual a $\alpha$ no sentido anti-horário em torno de um ponto qualquer do plano euclidiano
$\mathcal{P}_e$	Pontos do Plano Euclidiano	$\Sigma_r$	reflexão na recta $r$
$A, B, \dots$	pontos	$S_r$	matriz de transformação homogénea associada à reflexão na recta $r$
$f, g, h, \dots$	rectas	$S_{Ox}$	matriz de transformação homogénea associada à reflexão no eixo $Ox$
$\mathbf{v}, \mathbf{w}, \dots$	vectores	$S_{Oy}$	matriz de transformação homogénea associada à reflexão no eixo $Oy$
$\ \mathbf{v}\ $	norma do vector $\mathbf{v}$	$S_{bi}$	matriz de transformação homogénea associada à reflexão na bissectriz dos quadrantes ímpares
$ a $	módulo de um número real $a$	$S_{bp}$	matriz de transformação homogénea associada à reflexão na bissectriz dos quadrantes pares
$\alpha, \beta, \dots$	ângulos	$\Sigma_O$	meia-volta em torno da origem do referencial
$(x : y : z)$	coordenadas homogéneas de um ponto	$M_O$	matriz de transformação homogénea associada à meia-volta em torno da origem do referencial
$[a : b : c]$	coordenadas homogéneas de uma recta	$\Sigma_F$	meia-volta em torno de um ponto qualquer do plano euclidiano
$\mathcal{T}$	transformação geométrica	$M_F$	matriz de transformação homogénea associada à meia-volta em torno de um ponto qualquer do plano euclidiano
$T$	matriz de transformação homogénea associada a uma transformação geométrica	$\delta_{(v,r)}$	reflexão deslizante de vector $\mathbf{v}$ e eixo $r$
$I_d$	transformação identidade	$D_{(v,r)}$	matriz de transformação homogénea associada à reflexão deslizante de vector $\mathbf{v}$ e eixo $r$
$I_3$	matriz identidade de ordem 3		
$\Omega$	isometria		
$\tau_v$	translação de vector $\mathbf{v}$		
$T_v$	matriz de transformação homogénea associada à translação		
$\Delta_{O,\alpha}$	rotação de ângulo com amplitude igual a $\alpha$ e no sentido anti-horário em torno do referencial cartesiano		
$R_{O,\alpha}$	matriz de transformação homogénea associada à rotação de ângulo com amplitude igual a $\alpha$ e no sentido anti-horário em torno do referencial cartesiano		
$\Delta_{F,\alpha}$	rotação de ângulo com amplitude igual a $\alpha$ no sentido anti-horário em torno de um ponto qualquer do plano euclidiano		



## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1 – Coordenadas homogéneas.....	18
Figura 2 – Translação.....	23
Figura 3 – Rotação .....	25
Figura 4 – Reflexão em recta .....	28
Figura 5 – Reflexão deslizante.....	33
Figura 6 – Rotação centrada num ponto.....	43
Figura 7 – Reflexão em recta .....	45
Figura 8 – Reflexão deslizante.....	47
Figura 9 – Reflexão em recta .....	56
Figura 10 – Reflexão em duas rectas concorrentes .....	69
Figura 11 – Composição de duas rotações em centros distintos e $\alpha + \beta \neq 0^\circ$ .....	78
Figura 12 – Composição de duas rotações em centros distintos e $\alpha + \beta = 0^\circ$ .....	79
Figura 13 – Composição de duas rotações em centros distintos .....	80
Figura 14 – Composição de duas rotações em centros distintos .....	80
Figura 15 – Reflexão em duas rectas perpendiculares .....	81
Figura 16 – Reflexão deslizante.....	93
Figura 17 – Reflexão deslizante.....	97



## ÍNDICE REMISSIVO





<i>coordenadas homogêneas</i> .....	18, 64, 76
Exemplo .....	42, 45, 47, 56, 79, 80, 96
<i>isometria</i> ....	39, 40, 41, 42, 44, 46, 58, 59, 61, 63, 69, 90, 93, 94, 96, 99
<i>Lei do Paralelogramo</i> 8.16 .....	92
<i>matriz de transformação homogênea</i> .....	21
<i>meia-volta</i> 27, 43, 81, 83, 84, 85, 86, 90, 91	
Proposição 10.2 .....	107
Proposição 10.4 .....	109
Proposição 2.1 .....	21
Proposição 2.2 .....	35
Proposição 5.1 .....	49
Proposição 5.2 .....	51
Proposição 5.3 .....	53
Proposição 5.4 .....	54
Proposição 5.5 .....	57
Proposição 6.1 .....	61
Proposição 6.2 .....	61
Proposição 6.3 .....	63
Proposição 6.4 .....	64
Proposição 6.5 .....	64
Proposição 6.6 .....	65
Proposição 6.7 .....	66
Proposição 7.1 .....	71
Proposição 7.2 .....	71
Proposição 7.3 .....	72
Proposição 7.4 .....	73
Proposição 7.5 .....	76
Proposição 7.6 .....	76
Proposição 7.7 .....	77
Proposição 7.8 .....	78
Proposição 8.1 .....	83
Proposição 8.10 .....	89
Proposição 8.11 .....	89
Proposição 8.12 .....	89
Proposição 8.13 .....	90

Proposição 8.14 .....	91
Proposição 8.15 .....	91
Proposição 8.17 .....	92
Proposição 8.18 .....	92
Proposição 8.19 .....	92
Proposição 8.2 .....	83
Proposição 8.3 .....	84
Proposição 8.4 .....	85
Proposição 8.5 .....	85
Proposição 8.6 .....	85
Proposição 8.7 .....	86
Proposição 8.8 .....	87
Proposição 8.9 .....	88
Proposição 9.1 .....	96
Proposição 9.2 .....	96
Proposição 9.3 .....	97
Proposição 9.4 .....	98
Proposição 9.5 .....	98
Proposição 9.6 .....	98
Proposição 9.7 .....	100
Proposição 9.8 .....	100
<i>reflexão deslizante</i> 13, 22, 33, 35, 36, 39, 40, 46, 47, 96, 97, 98, 100, 107, 109	
<i>reflexão em recta</i> .. 13, 22, 28, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 39, 40, 43, 49, 50, 51, 57, 58, 96	
<i>rotação</i> 13, 22, 25, 27, 28, 35, 36, 39, 40, 41, 42, 44, 70, 71, 72, 73, 74, 76, 77, 78, 81, 82, 85, 109	
<i>Teorema da Redução Geral</i> 10.3 .....	108
<i>Teorema da Redução no Feixe</i> 10.1 .....	101, 104, 105
<i>Transformação Geométrica</i> .....	21
<i>translação</i> . 13, 22, 23, 24, 28, 33, 34, 35, 39, 40, 41, 46, 61, 63, 64, 65, 66, 67, 72, 78, 79, 88, 89, 90, 96, 97, 98, 100, 109	

